

**Képletgyűjtemény az A3 vizsgára**  
Építőkarai Matematika A3

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

**deriváltak:**

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

**differenciálási szabályok:**

$$(cu)' = cu' \quad (c \text{ konstans})$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

**integrálási szabályok:**

$$\int cf \, dx = c \int f \, dx \quad (c \text{ konstans})$$

$$\int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$$

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c,$$

ahol  $F$  az  $f$  primitív függvénye

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) + c,$$

ahol  $F$  az  $f$  primitív függvénye

$$\int f^\alpha f' \, dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ ha } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln |f| + c$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

**nevezetes helyettesítések:**

$$R(e^x) \quad e^x = t$$

$$R(\sqrt{ax+b}) \quad \sqrt{ax+b} = t$$

$$R\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}\right) \quad \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}} = t$$

$$R(\sin x, \cos x) \quad \sin x, \cos x, \tan x, \tan \frac{x}{2} = t$$

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \quad x = a \sin t, \quad x = a \cos t$$

$$R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \quad x = a \sinh t$$

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \quad x = a \cosh t$$

**integrálok:**

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \frac{x}{a} + c, \quad \text{ha } \left|\frac{x}{a}\right| < 1$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} + c, \quad \text{ha } \left|\frac{x}{a}\right| > 1$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$$

1.

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0).$$

egyenletre karakterisztikus egyenlet:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

3. **Próba függvény módszerben**, ha az

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad a \neq 0 \text{ és } t \in I$$

egyenletben

$$g(t) = e^{ut} (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \sin(vt)),$$

ahol  $A_n(t), B_m(t)$  polinomok, melyeknek fokai  $n$  illetve  $m$ , akkor az inhomogén partikuláris alakja:

$$y_{i,p} = t^s e^{ut} (P_k(t) \cos(vt) + Q_k(t) \sin(vt))$$

ahol az  $s$  az  $u + i \cdot v$  multiplicitása a karakterisztikus egyenlet gyökei között.  $P_k(t), Q_k(t)$  általános alakú  $k = \max(n, m)$  fokú polinomok.

4. **Konstans variációs módszerben**:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad t \in I$$

egyenlet  $Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = 0$  homogén részének fundamentális megoldása  $y_1, y_2$ , akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása  $y_{i,p} = C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t)$ , ahol a  $C_1(t), C_2(t)$  függvények deriváltjaira teljesül, hogy:

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0$$

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = g(t)$$

5. **Hiányos másodrendű egyenletben**:

Ha  $y$  hiányzik, a helyettesítés:  $p(x) := y'(x)$ .

Ha viszont az  $x$  hiányzik, akkor a helyettesítés:  $y' = p(y)$

6. **Az  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  differenciálegyenlet egzakt**, ha

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Az egyenlet megoldásához meg kell találni azt az  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amire  $\text{grad}F = (M, N)$ . Ekkor a differenciálegyenlet megoldása:

$$F(x, y) = \text{Const}.$$

## Valószínűségszámítás

**Szorzási szabály:**

$$\mathbb{P}\{E_1 E_2 \dots E_n\} = \mathbb{P}\{E_n | E_1 \dots E_{n-1}\} \dots \mathbb{P}\{E_3 | E_1 E_2\} \cdot \mathbb{P}\{E_2 | E_1\} \cdot \mathbb{P}\{E_1\},$$

**Teljes valószínűség tétele:**

Ha  $F_1, F_2, \dots$  teljes eseményrendszert alkotnak, azaz

$$\bigcup_i F_i = S, \text{ és } F_i \cap F_j = \emptyset \text{ ha } i \neq j, \text{ akkor}$$

$$\mathbb{P}\{E\} = \sum_i \mathbb{P}\{E | F_i\} \cdot \mathbb{P}\{F_i\}.$$

**Bayes Tétel:**

Ha  $F_1, F_2, \dots$  teljes eseményrendszert alkotnak, azaz

$$\bigcup_i F_i = S, \text{ és } F_i \cap F_j = \emptyset \text{ ha } i \neq j, \text{ akkor}$$

$$\mathbb{P}\{F_i | E\} = \frac{\mathbb{P}\{E | F_i\} \cdot \mathbb{P}\{F_i\}}{\sum_j \mathbb{P}\{E | F_j\} \cdot \mathbb{P}\{F_j\}}.$$

### Binomiális( $n, p$ ) eloszlás

→ súlyfüggvénye:

$$p(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

→ várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = np$$

→ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = np(1-p)$$

→ legvalószínűbb értéke:

$$\lfloor (n+1)p \rfloor$$

### Poisson( $\lambda$ ) eloszlás

→ súlyfüggvénye:

$$p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

→ várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

→ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = \lambda$$

→ legvalószínűbb értéke:

$$\begin{cases} \lfloor \lambda \rfloor & , \text{ ha } \lambda \text{ nem egész,} \\ \lambda \text{ és } \lambda - 1 & , \text{ ha } \lambda \text{ egész.} \end{cases}$$

### Geometriai( $p$ ) eloszlás

→ súlyfüggvénye:

$$p(i) = (1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

→ várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

→ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

### Egyenletes( $a, b$ ) eloszlás

→ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{ ha } a < x < b, \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

→ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ ha } a < x < b, \\ 1 & , \text{ ha } x \geq b. \end{cases}$$

→ várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

→ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### Normális( $\mu, \sigma^2$ ) eloszlás

→ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

→ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ ahol } \Phi \text{ a standard normális eloszlásfüggvény.}$$

Minden  $x$ -re  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

→ várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

→ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = \sigma^2$$

### Exponenciális( $\lambda$ ) eloszlás

→ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x > 0, \\ 0 & , \text{ ha } x \leq 0. \end{cases}$$

→ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x > 0, \\ 0 & , \text{ ha } x \leq 0. \end{cases}$$

→ várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$$

→ szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(X) = 1/\lambda^2$$

**DeMoivre-Laplace tétel:** Ha  $X \sim \text{binomiális}(n, p)$ , akkor  $\mathbb{P}\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a)$ .

**Centrális határeloszlás tétel:** Ha  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független azonos eloszlású változók  $\mu$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással, akkor  
 $\mathbb{P}\left\{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a)$

**A standard normális eloszlásfüggvény táblázata**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000