SZTOCHASZTIKUS HIPERBOLIKUS RENDSZEREK KOMPENZÁLT KOMPAKTSÁGÁRÓL

MTA SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁS, 2002 ÁPRILIS 24.

FRITZ JÓZSEF, BME MATEMATIKAI INTÉZET

1. Bevezetés

Előadásom a hidrodinamika mikroszkopikus elméletéhez kapcsolódik, melynek célja a gázok és folyadékok áramlását leíró Euler és Navier–Stokes típusú egyenletek levezetése bizonyos végső elvek, a klasszikus illetve kvantum mechanika törvényei alapján. Euler egyenletei a tömeg, az impulzus és a teljes energia megmaradását fogalmazzák meg parciális differenciálegyenletek alakjában. Maxwell, Boltzmann és Gibbs elképzeléseiből kiindulva, a fizikai elmélet alapjai már a múlt század első felében kialakultak. Az elmélet intenzív továbbfejlesztését kezdetben katonai célú kutatások motiválták, napjainkban a rövidtávú meteorológiai előrejelzés javításának igénye a fő hajtóerő. Megjegyzésre érdemes hogy az első számítógépeket – Neumann János irányításával – hidrodinamikai egyenletek numerikus megoldására is használták, és ezek a kísérletek számos alapvető elméleti felismeréshez is elvezettek.

A matematikai módszerek szintjén C. Morrey [Mor55] nevéhez fűződik az első és utolsó olyan próbálkozás melynek célja Euler egyenleteinek a klasszikus mechanika Newton féle elveiből történő levezetése. Szigorúan egzakt eredmények ugyan nem születtek, de többé - kevésbé világosan körvonalazódtak annak az eljárásnak, az un. *hidrodinamikai határátmenetnek* az elvei, ami a fizikai és a matematikai elméletet kapcsolja össze. Az a banális észrevétel, hogy az anyag igen kis darabjai is rendkívül sok gyorsan mozgó részecskéből állnak, és így a termodinamikai egyensúly kialakulásához vezető folyamatok nagyon gyorsan lezajlanak, a matematika nyelvén a következőképpen fogalmazható meg. Mivel a ”nagy” és a ”gyors” szavakat nem használhatjuk, azt mondjuk hogy bármely (makroszkópikus méretű) térrésznél végtelenhez tart a benne lévő részecskék száma, tehát a szomszédos részecskék távolsága, és a mikroszkopikus események (ütközések) között eltelő idő egyaránt nullához konvergál. Ezt a tényállást rövidesen formalizáljuk.

A hidrodinamikai határátmenet végrehajtása egyáltalán nem könnyű, még a célobjektum, a levezetendő parciális differenciálegyenletek elmélete sem teljes. Bár az általános fizikai elmélet klasszikus (differenciálható) megoldásokról szól, jól tudjuk hogy – bizonyos speciális esetektől eltekintve – lökéshullámok, vagy még bonyolultabb formációk alakulnak ki, amelyek a megoldás folytonosságának megszűnésével járnak. Mivel $\partial_t \rho + \operatorname{div} J = 0$ alakú *megmaradási elvekről* van szó, kézenfekvő a *gyenge megoldás* fogalmának bevezetése, de ezek létezése is problematikus. Még nehezebb a gyenge megoldások egyértelműségének kérdése, a fizika szempontjából legérdekesebb *hiperbolikus* esetben a kezdeti érték a hozzá tartozó gyenge megoldást nem határozza meg, még valamilyen *entrópia elv* is szükséges a fizikailag releváns megoldás kiválasztásához. Erre a jelenségre és következményeire Lax Péter [Lax57,71,73] hívta fel a figyelmet, különösen bonyolultak az egynél több egyenletből álló hiperbolikus rendszerek. Az eredmények túlnyomó többsége egydimenziós fizikai térre korlátozott, lásd például a [Smo94], [Ser99] és [Bre00] monográfiákat.

A megmaradási elvek tényleges levezetéséhez elsősorban a fentebb már említett *lokális termodinamikai egyensúly* kialakulásának mechanizmusát kellene megérteni. Amint azt S. R. S. Varadhan és társai [GPV88] megmutaták, végső soron ez annyit jelent hogy a végtelen fizikai térben definiált *mikroszkópikus dinamika* minden eléggé 'reguláris', és a tér eltolásaival szemben is invariáns stacionárius mértéke a statisztikus mechanikából ismert *Gibbs állapotok* szuperpozíciójaként állítható elő. Ez az állítás olyannyira erősebb a nevezetes, és szintén tisztázatlan *ergodikus hipotézisnél*, hogy tisztán mechanikai rendszerek esetében matematikai tételként valószínüleg nem is igaz. Emiatt a mintegy húsz éve megkezdődött matematikai kutatások sztochasztikus modellek vizsgálatára szorítkoznak: a véletlenség mesterségesen beépített mechanizmusa garantálja a lokális egyensúly létrejöttét. H.-T. Yau vette észre hogy ez elegendő is, feltéve hogy a makroszkópikus megoldás sima, lásd [Yau91], [OVY93]. Parabolikus egyenleteknél ez a nemlineáris esetben is nyugodtan feltehető. A hiperbolikus problémák sokkal bonyolultabbak, nem kerülhetjük meg a parciális differenciálegyenletek szintjén is felmerülő nehézségeket. Nyilván nem meglepő hogy ezek megoldásához a valószínűségszámítás és a parciális differenciálegyenletek elméletéből megismert módszerek egyfajta szintézisére van szükség; olyan általános módszert ismertetünk, amely a lökéshullámok megjelenése után is működik. Konkrétabban, a *kompenzált kompaktság* Tartar - Murat féle elméletének, [Tar79], [Mur78] sztochasztikus rendszerekre történő kiterjesztése a cél; a sztochasztika tudományából a *nemgradiens analízis*, [Var93], és a *logaritmikus Szoboljev egyenlőtlenség*, [Yau97a], [LPY02] a legfontosabb segédeszközünk. Mivel a kompenzált kompaktság módszere csak egydimenziós térben működik, és legfeljebb két megmaradó mennyiség lehet, mi is csak ilyen modellekkel foglalkozunk. A módszer alapelveit a [Fri01] könyvecskében fejtettem ki, lásd még a [Fri03], [FT03], [FN03] dolgozatokat a www.math.bme.hu ∼jofri honlapon.

2. A Hidrodinamikai Határátmenet

Konzervatív rendszer megmaradó mennyiségei térben és időben is aránylag lassan változnak, míg a többi gyorsan oszcillál. Ezek szétválasztása, és a megmaradó mennyiségek makroszkópikus viselkedését leíró parciális differenciálegyenletek kiszűrése történik a hidrodinamikai határátmenet segítségével. A feladat egyszerű, de azért eléggé általános kitűzése a következő. A $\xi = \big(\xi_k(t) : t \geq 0\,,\, k \in \mathbb{Z}\big)$ mikroszkópikus dinamika az $\Omega := E^{\mathbb{Z}}$ szorzattér valamely jól meghatározott Ω_0 részhalmazában definiált Markov folyamat, ahol $\xi_k(t) \in E$;

E az $\mathbb{R}$ számegyenes, esetleg az $\mathbb{R}^2$ sík részhalmaza, véges is lehet. Ez a folyamat *konzervatív* természetű, vagyis van olyan η, $\eta_k := g(\xi_k)$ *megmaradó mennyiség*, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_k(t))$ összeg, amennyiben véges, nem függ az időtől. A második megmaradó mennyiséget, ha van ilyen, ζ jelöli. Fizikai elvek alapján konstruált konzervatív dinamika stacionárius (egyensúlyi) állapotai a megmaradó mennyiségek várható értékeivel paraméterzhető osztályt alkotnak.

Kompakt tartójú és legalábbis folytonos ψ tesztfüggvények segítségével definiáljuk a

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(\psi) &:= \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \psi(t,\varepsilon k)\eta_k(t\varepsilon^\alpha)\,dt\,, \\ P_\varepsilon(\psi) &:= \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \psi(t,\varepsilon k)\,\zeta_k(t\varepsilon^\alpha)\,dt \end{aligned} \tag{2.1}$$

mezőket, ahol az $\varepsilon > 0$ paraméter a hidrodinamikai határátmenet során nullához tart; $\alpha = -1$ a *hiperbolikus*, míg $\alpha = -2$ a *diffúzív skálázás* esetében. A skálázás mikéntje természetesen a választott modelltől függ. Azt várjuk hogy alkalmas kezdeti értékeknél teljesül a nagy számok hidrodinamikai törvénye: a skálázott konzervatív mezők sztochasztikusan konvergálnak valamilyen $u = (\rho,\pi)$ determinisztikus folyamathoz,

$$\begin{aligned} \operatorname{st}\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon(\psi) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi(t,x)\,\rho(t,x)\,dx\,dt\,, \\ \operatorname{st}\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(\psi) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi(t,x)\,\pi(t,x)\,dx\,dt\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

amit a makroszkópikus (Euler) egyenletek határoznak meg. Ezek általában nemlineáris parciális differenciálegyenletek, típusuk a skálatörvénytől függ. A hiperbolikus esetben $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ alakú egyenlet vagy rendszer, diffúzív skálázáskor pedig $\partial_t u = \partial_x^2 f(u)$ alakú parabolikus egyenletek várhatóak. Ha csak egy megmaradási elv van, akkor azt η jelöli, és értelemszerűen $u \equiv \rho$. Az alábbiakban röviden összefoglajuk a fontosabbnak tekintett eredményeket. Az objektumok és fogalmak pontos definícióját illetően kénytelenek vagyunk a [KL99] monográfiára hivatkozni, de a következő szakasztól kezdve, a konkrét eredmények ismertetésekor jóformán csak elemi előismereteket tételezünk fel.

A hidrodinamika mikroszkópikus elméletének első matematikai eredményei hiperbolikus problémákkal kapcsolatosak. Boldrighini, Dobrushin és Sukhov [BDS83] dolgozata az egydimenziós merev golyók hidrodinamikaját irja le; ez a tisztán mechanikai modell az explicit módon tárgyalható ideális gázra redukálható, és végtelen (kontinuum) sok egyenlethez vezet. H. Rost [Ros81] modellje, az *aszimmetrikus kizárások folyamata* (ASEP) speciális kezdeti konfigurációból indulva ritkulási hullám kialakulásához vezet. Általános módszerek eddig csak diffúzív modellek vizsgálatát tették lehetővé, lásd a [Fri87b,87c] és [GPV88] cikkeket a kezdeteket, míg a [Var93] és [VY97] dolgozatokat a módszerek fejlődését illetően. A hidrodinamikai nagy számok törvénye a nagy eltérések és a fluktuációk leírásával egészíthető ki, lásd például a [DV89], [QY98] illetve a [BR84], [CY92], [CLO01] dolgozatokat. A [Spo91], [MP91] és [KL99] monográfiák jó áttekintést adnak a nyolcvanas és a kilencvenes években végbement intenzív fejlődésről, aminek eredményeképpen a hidrodinamikai határátmenet elmélete a sztochasztika egyik húzó ágazatává vált.

A diffúzív skálatörvényű modellek tárgyalhatósága nemcsak a makroszkópikus egyenlet regularitásának köszönhető, hanem annak is hogy ilyenkor a rendszernek több ideje van önmaga megszervezésére, a lokális termodinamikai egyensúly létrehozására. Ez teszi lehetővé alapvetően hiperbolikus modellek diffúzív skálázását olyankor, amikor a kezdeti állapot valamelyik egyensúlyi eloszlás térben inhomogén, kis perturbációja, lásd a [MEL89], [EMY96], továbbá a [LOY97] és a [QY98] cikkeket az inkompresszibilis Navier - Stokes egyenlet levezetéséről. Ennek általában nincsenek klasszikus megoldásai, a gyenge megoldás egyértelműsége sem teljesül.

Sokkal kevesebb ismeretünk van a hiperbolikus skálázás témaköréből, szinte valamennyit fel tudjuk sorolni azok közül, amelyek nem tételezik fel a makroszkópikus megoldás simaságát. Az ASEP modell vizsgálatát [BF88] folytatta, majd [Rez91] és [Sep98] tették teljessé annak igazolásával, hogy a skálázott konzervatív mező (csak egy van, a részecskék száma) a $\partial_t\rho + c\partial_x(\rho - \rho^2) = 0$ Burgers egyenlet egyértelműen meghatározott *entrópikus megoldásához* konvergál. A parciális differenciálegyenletek elméletéből [Rez91] N. Kružkov [Kru70] eredményét használja, [Sep98] pedig a Burgers egyenlet E. Hopftól [Hop50] származó megoldóképletét terjeszti ki a teljesen aszimmetrikus kizárások folyamatára (TASEP). Az ASEP metrikus és termodinamikai entrópiájának kapcsolatát tisztázza [Kos00], míg [Var03] a TASEP nagy eltéréseinek nehéz problémáját is megoldotta. A TASEP egyensúlyi állapotainak kis perturbációit vizsgálja [Sep01]. F. Rezakhanlou [Rez91] dolgozatának másik érdeme *attraktív rácsgázok* általános tárgyalása tetszőleges dimenziójú térben. Ez a módszer R. DiPerna [DiP85] mérték megoldások unicitásáról szóló tételét használja, emiatt a kezdeti feltétel a szokásosnál erősebb.

A fenti eredmények mind lényegesen kihasználják a vizsgált modell speciális szerkezetét; egyenlőre nem látszik hogy lehetne őket lényegesen továbbfejleszteni. Megjegyezzük hogy az ASEP és a TASEP is attraktív, de további kellemes tulajdonságaik is vannak. Mindegyik modell csak egyetlen megmaradó mennyiséggel rendelkezik, és a skálázott konzervatív mező a makroszkópikus egyenlet entrópia feltétel által egyértelműen meghatározott, általában nem folytonos megoldásához konvergál. Jellemző a parciális differenciálegyenletek elméleti eredményeinek és módszereinek kiterjedt alkalmazása.

Mindezek tudatában konkrét célunk olyan módszer kidolgozása, amely eléggé általános, nem feltétlenül attraktív rendszerek esetén is elvezet a hidrodinamikai határátmenet, vagyis a nagy számok törvényének megértéséhez. A két megmaradási elvnek eleget tevő rendszerek biztosan nem attraktivak, de nem csak ezért érdekesek. A legegyszerűbb termodinamikai számítások is legalább két mennyiséget vetnek össze, tehát fizikailag értelmezhető modellnek legalább két megmaradási elvvel kell rendelkeznie. A kompenzált kompaktság sztochasztikus elmélete lehetővé teszi egydimenziós, kétkomponensű hiperbolikus modellek tárgyalását is. Sajnos, két egyenlet esetén még nincsenek eszközeink a határfolyamat egyértelműségének bizonyításához, de igen hosszú ideig a parciális differenciálegyenletek elméletével is ez volt a helyzet. Újabban

A. Bressan [Bre00] olyan közelítő (numerikus) eljárásokat dolgozott ki, amelyek egyértelműen meghatározott gyenge megoldáshoz konvergálnak. Az egyértelműség kulcsa az Olga Oleinik [Ole57] által megfogalmazott entrópia feltétel eléggé bonyolult általánosítása. Egyszerűbb esetekben ez a rendszer *Riemann invariánsaira* vonatkozó egyenletes, de csak féloldalas Lipschitz feltétel. Egyáltalán nem világos hogy sztochasztikus modellek esetében ezt hogy kell érteni, de azért el kell mondani azt is hogy a numerikus eljárásokkal ellentétben, mi nem választhatjuk meg modellünket a legnagyobb hatékonyság elve szerint, azt a statisztikus fizika elvei határozzák meg.

3. Problémák és Eredmények

Általános jelölések és feltételek bevezetése után ismertetjük a vizsgált modelleket és a kapcsolódó eredményeket. A skálázás adott $\varepsilon > 0$ szintjén μ_ε jeöli a ξ folyamat kezdeti eloszlását, míg $\mu_{\varepsilon,n}$ a $\big(\xi_k(0) : |k| \le n\big)$ változók együttes eloszlása. Minden esetben feltesszük hogy a μ_ε mértékekre vonatkozóan

$$\begin{aligned} \operatorname{st}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\varepsilon k)\,\eta_k(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\rho_0(x)\,dx\,dt\,, \\ \operatorname{st}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\varepsilon k)\,\zeta_k(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\pi_0(x)\,dx\,dt\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ahol φ tetszőleges kompakt tartójú folytonos függvény, és a makroszkópikus egyenletek $u_0 = (\rho_0, \pi_0)$ kezdeti értékei lokálisan négyzetesen integrálhatóak. Ha csak egy megmaradó mennyiség van, akkor a második egyenlet persze fölösleges. A folyamat valamelyik kitüntetett stacionárius mértékét λ jelöli, és feltesszük hogy a kezdeti eloszlás S metrikus entrópiája extenzív, vagyis van olyan c_0 konstans hogy

$$S_n[\mu_\varepsilon|\lambda] := \int f_n \log f_n\,d\lambda \le c_0\,n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{és } \varepsilon > 0, \tag{3.2}$$

ahol $f_n := d\mu_{\varepsilon,n}/d\lambda$. Ha az E individuális fázistér véges, akkor ez a feltétel automatikusan teljesül.

A ξ-hez rendelt χ_ε **empirikus folyamat**ot a $\chi_\varepsilon(t,x) = \xi_k(t/\varepsilon)$ ha $x-\varepsilon < \varepsilon k \le x$ képlet definiálja, hasonló ρ_ε és π_ε definíciója η, illetve ζ segítségével. A χ_ε folyamat eloszlását P_ε jelöli, a P_ε osztály feszességét, részsorozatok gyenge konvergenciáját illetően a lokális $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ tér gyenge topológiájára utalunk.

A $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ egyenlet $u = u(t,x)$ **gyenge megoldás**ait a

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \big(u \cdot \psi_t' + f(u) \cdot \psi_x'\big)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \cdot \psi(0,x)\,dx = 0 \tag{3.3}$$

egyenlet jellemzi, aminek minden kompakt tartójú és folytonosan differenciálható ψ tesztfüggvénnyel teljesülnie kell; ψ_t' és ψ_x' a ψ parciális deriváltjai. Ha két egyenlet van, akkor u és f vektor, tehát ψ is az. Nem ritka hogy ugyanahhoz az u_0 kezdeti értékhez igen sok gyenge megoldás tartozik, ezek szelektálására használatos a **Lax entrópia feltétel**. Az egyenlet fázisterén értelmezett $h(u)$ és $J(u)$ függvények **entrópia/fluxus pár**t alkotnak, ha klasszikus u megoldás mentén $\partial_t h(u) + \partial_x J(u) = 0$, vagyis h is megmaradó menynyiség. Az entrópia párokat a $\nabla J = \nabla h \nabla f$ egyenlet jellemzi, ahol ∇ a gradiens képzésének operátora. Valamely u gyenge megoldás entrópia megoldás ha eleget tesz Lax feltételének: konvex h esetén az $X_h := \partial_t h + \partial_x J$ entrópia produkció negatív, vagyis

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(h(u)\psi_t' + J(u)\psi_x'\big)\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty h(u_0(x))\psi(0,x)\, dx \geq 0 \tag{3.4}$$

hacsak $\psi \geq 0$. Szóló egyenlet entrópia megoldását a kezdeti feltétel egyértelműen meghatározza, lásd [Kru70] vagy [Ser99].

Lax egyenlőtlenségét a viszkózus közelítés módszere motiválja. A $\partial_t u_\sigma + \partial_x f(u_\sigma) = \sigma \partial_x^2 u_\sigma$ viszkózus egyenlet $\sigma > 0$ esetén parabolikus, tehát egyértelműen meghatározott klasszikus megoldásai vannak. Kézenfekvő tehát az eredeti egyenlet megoldását a $\sigma \to 0$ határátmenettel meghatározni; ezt tette E. Hopf [Hop50] a Burgers egyenlettel. Ha most h konvex, és J a fluxusa, akkor

$$\begin{aligned} \partial_t h(u_\sigma) + \partial_x J(u_\sigma) &= \sigma \nabla h(u_\sigma) \cdot \partial_x^2 u_\sigma \\ &= \sigma \partial_x \big(h'(u_\sigma) \cdot \partial_x u_\sigma\big) - \sigma \big(\nabla^2 h(u_\varepsilon)\, \partial_x u_\sigma\big) \cdot \partial_x u_\varepsilon\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

ahonnan a $\nabla^2 h(u)$ mátrix pozitivitása miatt (3.4) elég általános feltételek mellett következik.

Amikor csak egy egyenletünk van, akkor az entrópia párokat jellemző $J' = h'f'$ egyenlet mindig megoldható. P. Lax [Lax57,71,73] mutatta meg hogy két egyenletből álló rendszer esetében $\nabla J = \nabla h \nabla f$ (lokális) megoldhatóságának elégséges feltétele az, hogy a rendszer szigorúan hiperbolikus, vagyis a $\nabla f(u)$ mátrixnak az u minden értékéhez két valós sajátértéke tartozik.

Rövidesen kiderül hogy modelljeink szerkezete feltűnően hasonlít a viszkózus közelítés sémájára. A mikroszkópikus folyamat generátora mindig $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \sigma\,\mathfrak{G}$ alakú, ahol $\mathfrak{G}$ szimmetrikus az egyensúlyi mértékekre vonatkozóan. Kedvező esetekben még az is igaz hogy a megmaradó mennyiségek terében $\mathfrak{G}$ (diszkrét) elliptikus operátorként hat. Érdemes szemügyre venni a skálázás után nyert

$$\mathfrak{L}_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\,\mathfrak{L} = \varepsilon^{-1}\,\mathfrak{L}_0 + (\varepsilon\sigma)(\varepsilon^{-2}\,\mathfrak{G})$$

egyenletet, amelyben $-\varepsilon^{-1}\mathfrak{L}_0$ felel meg a viszkózus közelítés elsőrendű $\partial_x f$, $\varepsilon^{-2}\,\mathfrak{G}$ pedig a másodrendű $\partial_x^2 u$ tagjának. A határátmenet során σ függhet az ε paramétertől, de a makroszkópikus viszkozitás $\varepsilon\sigma(\varepsilon)$ együtthatója nyilván eltűnik amint $\varepsilon \to 0$. Nemcsak technikai okok miatt látszik nélkülözhetetlennek az $\varepsilon\sigma^2(\varepsilon) \to +\infty$ ha $\varepsilon \to 0$ feltétel, erről később még lesz szó.

Jelölje most már Γ a konzervatív mennyiségeket, vagyis $\Gamma_k = \eta_k$ ha csak egy, $\Gamma_k = (\eta_k, \zeta_k)$ ha kettő van belőlük. Alakját tekintve $\mathfrak{L}_0\Gamma_k = \Phi_{k-1} - \Phi_k$, ahol Φ a mikroszkópikus fluxus. Azt kell megértenünk hogy a hidrodinamikai határátmenet során elvégezhetjük a

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_0 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon \int_0^\infty \psi(t,\varepsilon k) \cdot \Gamma_k(t/\varepsilon)\, dt \approx -\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \psi_x'(t,\varepsilon k) \cdot \Phi_k(t/\varepsilon)\, dt \approx \\ &-\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \psi_x'(t,\varepsilon k) \cdot f(\hat{u}_\varepsilon(t,\varepsilon k))\, dt \approx -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi_x'(t,x) \cdot f(u)\, dx\, dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

helyettesítéseket, ahol ψ a szokásos tesztfüggvény, u a makroszkópikus megoldás, $\hat{u}_\varepsilon$ pedig a Γ konzervatív mennyiségek alkalmas átlagolással képezett empirikus folyamata, lásd később. Az első lépés triviális, a másik kettő komoly megfontolást igényel.

3.1. **Sztochasztikus oszcillátorok.** Fizikai alapon jól értelmezhető, Ginzburg - Landau típusú modell, lásd [HH77]. Éppen ezért egyáltalán nem meglepő hogy a leginkább kívánatos eredmények bizonyítása egyenlőre csak ábránd, viszont ez a modell jó lehetőséget ad különféle problémák illusztrálására. A $\xi_k = (\eta_k, \zeta_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\eta_k, \zeta_k \in \mathbb{R}$ kordináták időbeli változását, valamely $V : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ potenciál segítségével, sztochasztikus differenciálegyenletek végtelen rendszere határozza meg:

$$\begin{aligned} d\eta_k &= (\zeta_{k+1} - \zeta_k)\, dt + \sigma\, (V'_{k+1} + V'_{k-1} - 2V'_k)\, dt \\ &\qquad + \sqrt{2\sigma/\beta}\, (dw_{k+1} - dw_k) \\ d\zeta_k &= (V'_k - V'_{k-1})\, dt + \bar{\sigma}\, (\zeta_{k+1} + \zeta_{k-1} - 2\zeta_k)\, dt \\ &\qquad + \sqrt{2\bar{\sigma}/\beta}\, (d\bar{w}_k - d\bar{w}_{k-1})\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

ahol $V'_k := V'(\eta_k)$, w_k és $\bar{w}_k$ egymástól is független Wiener folyamatok sorozatai, $\beta > 0$ a rendszer fixen tartott hőmérsékletének reciproka, végül $\sigma, \bar{\sigma} \geq 0$ a *mikroszkópikus viszkozitás* adott paraméterei. Feltesszük hogy V'' korlátos, és $\liminf V''(y) > 0$ amint $|y| \to +\infty$. Ekkor a rendszer driftje egyenletesen Lipshitz folytonos az $e^{-|k|}$ számokkal súlyozott ℓ^2 térben, ahol tehát (3.7) diffúziós folyamatot definiál. Látható hogy η és ζ egyaránt konzervatív, és az egyensúlyi Gibbs állapotok a $z, w \in \mathbb{R}$ számokkal paraméterezett

$$d\lambda_{z,w} := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \exp\bigl(zr_k + wp_k - \beta V(r_k) - \beta p_k^2/2 - F(\beta, z, w)\bigr)\, dr_k\, dp_k$$

szorzatmértékek, ahol

$$F(\beta, z, w) := \log \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(zr + wp - \beta V(r) - \beta p^2/2\bigr)\, dr\, dp$$

a szabad energia. Megjegyezzük hogy η_k egyensúlyi várható értéke $\rho := \lambda_{z,w}(\eta_k) = F'_z(\beta, z, w)$, $\pi := \lambda_{z,w}(\zeta_k) = F'_w(\beta, z, w) = w/\beta$, továbbá parciális integrálással $\lambda_{z,w}(V'_k) = z/\beta$.

A determinisztikus $\sigma = \bar{\sigma} = 0$ és $V'' > 0$ esetben tisztán mechanikai rendszert kapunk: (3.7) egydimenziós, nemlineáris hullámegyenlet diszkretizált változatának tekinthető, ahol η deformációt, ζ pedig impulzust jelent. Pontosabban, a hanghullámok $\partial_t \rho = \partial_x \pi$, $\partial_t \pi = \partial_x V'(\rho)$ izentropikus egyenletéről van szó, amit [Dip83a] tárgyal. Sorsdöntő észrevétel hogy az így megválasztott közelítő eljárárás nem konvergál, lásd [Lax88], [Fri01]. Amint azt az első számítógépes kísérletek is megmutatták, hiperbolikus egyenletek numerikus algoritmusait elliptikus tagokkal kell stabilizálni, lásd [Lax57], [LW62], [DiP83a]. A mi esetünkben ez a $\sigma, \bar{\sigma} > 0$ és $\beta = +\infty$ feltételeket diktálja, de nincs olyan eredmény, amiből pont ennek az eljárásnak a konvergenciája következne.

A másik szélsőség a $\sigma = \sigma_0/\varepsilon$ és $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0/\varepsilon$, $\sigma_0, \bar{\sigma}_0 > 0$ választással kapott gyengén aszimmetrikus feladat, lásd a [Gär88], [KOV89] és [Dit92] cikkeket a kizárásos folyamatokról. Ha V szigorúan konvex, és $\beta = +\infty$, akkor a probléma tisztán parabolikus, és így [Fri85] módszerével igazolható az eljárás konvergenciája; a makroszkópikus egyenletek $\partial_t \rho = \partial_x \pi + \sigma_0 \partial_x^2 V'(\rho)$ és $\partial_t \pi = \partial_x V'(\rho) + \bar{\sigma}_0 \partial_x^2 \pi$. Hasonló, de sokkal nehezebb a sztochasztikus $0 < \beta < +\infty$ eset tárgyalása. Az első általános módszert, a [Fri87b,87c] dolgozatokban kezdeményezett parabolikus perturbációszámítást [FM88] terjesztette ki gyengén aszimmetrikus feladatokra. A fenti eredmény úgy módosul hogy a V' függvényt a $V_k' = V'(\eta_k)$ változók egyensúlyi várható értékével kell helyettesíteni. Mivel $\rho = F_z'$ értéke nem függ w-től, definiálható az $F_z'(\beta,\cdot)$ függvény $S_\rho'(\beta,\cdot)$ inverze, és $V'(\rho)$ helyére $(1/\beta) S_\rho'(\beta,\rho)$ kerül. Megjegyezzük hogy [GPV88] módszerével a degenerált $\bar{\sigma}_0 = 0$ eset is tárgyalható.

A fizikai szempontból legérdekesebb eset az, amikor $0 < \beta < +\infty$, $\sigma = 0$, és $\bar{\sigma} > 0$ értéke nem függ ε-tól. A lokális egyensúly elvén alapuló formális számolással a nemlináris, $\partial_t \rho = \partial_x \pi$, $\partial_t \pi = (1/\beta) \partial_x S'(\beta,\rho)$ *izentropikus hullámegyenletet* kapjuk a hidrodinamikai határátmenet eredményeként. [Yau91] módszerével a határátmenet elvégezhető, feltéve hogy a makroszkópikus egyenletnek az adott kezdeti értékhez klaszikus megoldása van, lásd [Fri01]. A lökéshullámok problémája megoldatlan, a következő szakaszokban egyszerűbb, de messze nem triviális feladatokat ismertetünk.

3.2. **Aszimmetrikus Ginzburg - Landau modellek.** Az oszcillátorokhoz hasonló, szintén potenciállal és sztochasztikus differenciálegyenletekkel adott modell. Egyetlen megmaradó mennyiség van, maga a $\xi \equiv \eta$ konfiguráció. A potenciál $V(y) = U(y) + y^2/2$ alakú, ahol U, U', U'' egyaránt korlátos; ez a feltétel garantálja a logaritmikus Szoboljev egyenlőtlenség érvényességét, lásd [LPY02]. A sztochasztikus dinamika egyenletei:

$$\begin{aligned} d\eta_k = {} & \frac{1}{2}(V_{k-1}' - V_{k+1}')\,dt \\ & + \sigma(\varepsilon)\,(V_{k+1}' + V_{k-1}' - 2V_k')\,dt + \sqrt{2\sigma(\varepsilon)}\,(dw_{k-1} - dw_k)\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

ahol $\eta_k \in \mathbb{R}$, $V_k' =: V'(\eta_k)$, w_k , $k \in \mathbb{Z}$ független Wiener folyamatok sorozata, és a mikroszkópikus viszkozitás $\sigma(\varepsilon) > 0$ együtthatója a skálázás során úgy tart végtelenhez hogy $\varepsilon\sigma^2(\varepsilon) \to +\infty$, de $\varepsilon\sigma(\varepsilon) \to 0$ amint $\varepsilon \to 0$. Ezt a folyamatot is exponenciálisan súlyozott ℓ^2 térben definiáljuk, generátora $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \sigma(\varepsilon)\,\mathfrak{G}$ alalakú, ahol

$$\mathfrak{L}_0 \varphi := \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (V_{k-1}' - V_{k+1}')\,\partial_k \varphi\,,$$

$$\mathfrak{G}\varphi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big((\partial_{k+1} - \partial_k) - (V_{k+1}' - V_k')\big)(\partial_{k+1}\varphi - \partial_k \varphi)\,,$$

és $\partial_k \varphi := \partial\varphi/\partial\eta_k$. A Ginzburg - Landau formalizmusból adódóan az egyensúlyi Gibbs állapotok olyan λ_z , $z \in \mathbb{R}$ egyparaméteres osztályt alkotnak, hogy a λ_z szorzatmérték marginális Lebesgue sűrűsége $g_z(y) := \exp\big(zy - V(y) - F(z)\big)$, ahol

$$F(z) := \log \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(zy - V(y)\big)\,dy\,.$$

Mivel $\rho := \lambda_z(\eta_k) = F'(z)$ és $\lambda_z(V'_k) = z$, a makroszkópikus egyenlet várható alakja $\partial_t\rho + \partial_x S'(\rho) = 0$, ahol S' az F' inverze, vagyis $S(\rho) = \sup_z\{z\rho - F(z)\}$. Ha a V potenciál konvex, akkor (3.8) *összehasonlítási elvnek* tesz eleget, vagyis a modell *attraktív.* Az első eredmény amely nem feltétlenül attraktív modell hidrodinamikai viselkedését írja le, a következő

TÉTEL: *A korábbi feltételek mellett a ρ_ε empirikus folyamat eloszlásasainak P_ε , $\varepsilon > 0$ osztálya feszes, és minden torlódási pontja a $\partial_t\rho + \partial_x S'(\rho) = 0$ egyenlet gyenge megoldásainak halmazára van koncentrálva. Ha a V potenciál szigorúan konvex, akkor ez a halmaz a kezdeti érték és az entrópia feltétel által meghatározott egyetlen $\rho(t,x)$ gyenge megoldásból áll, vagyis*

$$\operatorname{st}\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon(\psi) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi(t,x)\,\rho(t,x)\,dx\,dt$$

minden kompakt tartójú folytonos ψ függvénnyel teljesül.

A teljes bizonyítás a [Fri03] dolgozatban található. A ρ makroszkópikus megoldás egyértelműségéhez V konvexitása azért kell, mert a $\mathfrak{G}\eta_k = V'_{k+1} + V'_{k-1} - 2V'_k$ viszkózus stabilizátor csak ilyenkor elliptikus; nem az attraktivitás a fő, lásd [FN03]. A bizonyítás módszerét, ami előadásom lényege volna, az utolsó szakaszban ismertetjük.

3.3. **Rácsgázok.** Számos olyan diszkét modell ismert amelynek egynél több megmaradó mennyisége van, lásd [Qua92], [EMY96], [Fri01], [TV03a], [FT03]; mindegyikük bolyongó részecskék különféle kölcsönhatásait irja le. A részecskék típusát a szabad mozgásuk (a bolyongás) átlagos sebessége jellemzi, a kölcsönhatás legegyszerűbb formája a kizárás mechanizmusa: foglalt helyre nem szabad ugrani. [EMY96] és [Fri01] sejtautomata jellegű példáiban egy rácspontban egyszerre több, különböző típusú részecske is ülhet, és az ütközés olyan átrendeződést eredményez, amelynél a részecskék száma, és a sebességeik összege nem változik. Szomszédos rácspontokba ellentétes sebességgel érkező részecskék ütközése a cseréjüket jelenti. A párkeltés és megsemmisítés mechanizmusa szintén szomszédos rácspontoknál hat, ellentétes sebességű párok létrehozásához, illetve eltüntetéséhez vezet, vagyis az impulzust megtartja. A sebességváltás művelete egy részecskét ellenkező sebességűre cserél ki, amivel megsérti az impulzus megmaradásának elvét. Sok ilyen modell képzelhető el, lásd [TV03], [FN03] a pontos definicióhoz a kölcsönhatás egyes elemi műveleteinek rátáit is meg kell adni. Az alábbiakban [FT03] példáját ismertetjük.

Az individuális fázistér $E = \{-1, 0, +1\}$, vagyis az Ω konfigurációs tér ξ elemei a $\xi_k = 0, \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$ kétirányban végtelen sorozatok. Jelölje $\mathbb{Z}^*$ a $\mathbb{Z}$ rács $b = (k, k+1)$ éleinek halmazát, ξ^b pedig azt a konfigurációt, amely ξ-ből a ξ_k és ξ_{k+1} kordináták felcserélésével keletkezik. A $\xi(t)$ folyamat generátora $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \sigma(\varepsilon)\mathfrak{G}$, ahol σ ugyanaz mint korábban, míg

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0\varphi(\xi) &:= \sum_{b\in\mathbb{Z}^*} c_b(\xi)\left(\varphi(\eta^b) - \varphi(\eta)\right), \\ \mathfrak{G}\varphi(\xi) &:= \sum_{b\in\mathbb{Z}^*} \left(\varphi(\eta^b) - \varphi(\eta)\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

A $c_b(\xi)$, $b=(k,k+1)$ ráta csak a $\xi_b=(\xi_k,\xi_{k+1})$ rendezett pártól függ, értéke 1 ha $\xi_b=(1,0)$ vagy $(0,-1)$, $c_b(\xi)=2$ ha $\xi_b=(1,-1)$, minden más esetben $c_b(\xi)=0$. A folyamat egyenúlyi állapotai a homogén szorzatmértékek, és így két megmaradó mennyiség van. Az $\eta_k:=1-\xi_k^2$ és $\zeta_k:=-\xi_k$ választással a nevezetes

$$\partial_t\rho+\partial_x(\pi\rho)=0\,,\quad \partial_t\pi+\partial_x(\rho+\pi^2)=0$$

Leroux rendszert kapjuk mint a modell hidrodinamikai viselkedését leíró Euler egyenleteket. [FT03] és [Fri03] alapján állíthatjuk hogy

TÉTEL: *Az empirikus folyamat eloszlásai feszes osztályt alkotnak, és minden határeloszlás a Leroux rendszer entrópikus megoldásainak halmazára koncentrált.*

Ez az első olyan eredmény amely kétkomponensű hiperbolikus modell hidrodinamikai viselkedését tárgyalja. Hiába igazoltuk azonban Lax entrópia egyenlőtlenségét, két egyenletől álló rendszer esetén nem tudjuk hogy ez elegendő-e a gyenge megoldás egyértelműségéhez.

4. A Kompenzált Kompaktság Módszere

Röviden vázoljuk a hidrodinmikai nagy számok törvénye levezetésének főbb gondolatait. [GPV88] óta tudjuk csak igazán hogy az okoskodás kulcsa bizonyos mikroszkópikus és makroszkópikus átlagok ekvivalenciája. Ennek megértéséhez tetszőleges $\alpha_k(t)$ mikroszkópikus folyamat és $l\geq 1$ szám esetén legyen

$$\bar\alpha_{\varepsilon,l}(t,x):=\frac{1}{l}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{\varepsilon,l}(\varepsilon k-x)\,\alpha_l(t/\varepsilon)\,, \tag{4.1}$$

ahol $\mathbf{1}_{\varepsilon,l}$ a $(-\varepsilon l,0]$ intervallum indikátora. Például, $\rho_\varepsilon=\bar\eta_{\varepsilon,1}$, $\bar V'_{\varepsilon,l}$ az $\alpha_k(t)=V'(\eta_k(t))$ folyamatra utal, $\bar u_{\varepsilon,l}:=\bar\Gamma_{\varepsilon,l}$. Az első lépés, ami a hiperbolikus megmaradási elvek elméletében nem szükséges, a mikroszkópikus fluxus $\bar\Phi_{\varepsilon,l}$ átlagának helyettesítése a makroszkópikus fluxus $f(\bar u_{\varepsilon,l})$ folyamatával, amint $\varepsilon\to 0$, majd $l\to+\infty$. A 3.2 szakasz példájában ez lényegében a $\lambda_z(V'_k)=S'(\rho)$ hacsak $\rho=\lambda_z(\eta_k)$ azonosságnak köszönhető, általában azt mondjuk hogy a makroszkópikus fluxus a mikroszkópikus fluxus (kanonikus) egyensúlyi várható értéke. Az (3.6) egyenletben ez a második lépés igen általános feltételek mellett elvégezhető, lásd [GPV88]. Azt se nehéz megmutatni hogy az $\bar u_{\varepsilon,l}$ empirikus folyamat eloszlása feszes a lokális $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ tér gyenge topológiájára vonatkozóan, de az $f(\bar u_{\varepsilon,l})\approx f(u)$ helyettesítéshez ez persze kevés, erős konvergenciát kell megállapítani. Diffúzív skálázáskor, vagyis a $\sigma\approx 1/\varepsilon$ esetben érvényes [GPV88] két - blokk becslése: $\bar u_{\varepsilon,l}\approx\bar u_{\varepsilon,\delta/\varepsilon}$ amint $\varepsilon\to 0$, majd $l\to+\infty$, végül $\delta\to 0$. Hiperbolikus skálázásnál ez a becslés $l=o(1/\varepsilon)$ helyett csak az $l=o(\sqrt{\sigma/\varepsilon})$ sávban működik, valami mást kell kitalálni. Ez a mérték megoldások kompenzált kompaktságának sztochasztikus elmélete.

Jelölje Θ az E fázistér $\hat E$ konvex burkán adott valószínűségi mértékek olyan $\theta=\{\theta_{t,x}:(t,x)\in\mathbb{R}_+^2\}$ osztályainak halmazát, hogy $\theta_{t,x}(|u|^2)$ lokálisan integrálható. Azt mondjuk hogy $\theta\in\Theta$ a $\partial_t u+\partial_x f(u)=0$ egyenlet mérték megoldása ha

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{\hat{E}} \theta_{t,x}(du)\big(u \cdot \psi_t'(t,x) + f(u) \cdot \psi_x'(t,x)\big)\, dx\, dt = 0 \tag{4.2}$$

minden olyan ψ tesztfüggvénnyel teljesül, melynek tartója az $\mathbb{R}_+^2$ belsejében fekszik. A lokális $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ tér minden u eleme reprezentálható a Θ térnek azzal a θ elemével, amit $\theta_{t,x} := \delta_{u(t,x)}$ definiál; itt δ a Dirac mérték. Ugyanakkor minden $\theta \in \Theta$ elem azzal az m_θ mértékkel azonosítható, amit $dm_\theta = dt\, dx\, \theta_{t,x}(du)$ határoz meg az $\mathbb{R}_+^2 \times \hat{E}$ téren, tehát a Θ halmazt elláthatjuk a mértékek gyenge topológiájával. Mostantól kezdve az empirikus folyamat eloszlását ezen a téren képzeljük adottnak, vagyis az empirikus folyamat realizációit az $\mathbb{R}_+^2 \times \hat{E}$ téren adott mértékekként azonosítjuk. Ez azért jó, mert a Θ térben a relatív kompaktság feltétele egyszerűen a mérték lokális korlátossága. Ezt könnyű ellenőrizni, rengeteg sztochasztikus modellről tudjuk hogy az $\bar{u}_{\varepsilon,l}$ empirikus folyamat határeloszlásai a makroszkópikus egyenlet (rendszer) mérték megoldásainak halmazán koncentrálódnak. Az igazi gond annak megmutatása hogy valamely mérték megoldás egyben gyenge megoldás is; a fordított állítás triviális. A $\theta \in \Theta$ eloszláscsalád két entrópia pár, (h_l, J_1) és (h_2, J_2) vonatkozásában akkor rendelkezik a Tartar faktoriáció tulajdonságával, lásd [Tar79], ha majdnem minden $(t,x) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén

$$\theta_{t,x}(h_1 J_2) - \theta_{t,x}(h_2 J_1) = \theta_{t,x}(h_1)\theta_{t,x}(J_2) - \theta_{t,x}(h_2)\theta_{t,x}(J_1)\,. \tag{4.3}$$

Ha csak egy egyenlet van, akkor a $h_1 = u$, $J_1 = f(u)$ és $h_2 = f(u)$, $J_2' = f'^2$ választással könnyű megmutatni hogy minden Tartar szerint faktorizálódó mérték megoldás gyenge megoldás is, feltéve hogy az f függvény gráfja nem tartalmaz egyenes szakaszt. A Leroux rendszer esete hasonló, bár bonyolultabb, lásd [Ser99], általános tételeket R. DiPerna [DiP83a,83b,85], [Che91] és mások bizonyítottak. Eszerint azt kell igazolnunk hogy a mértékként értelmezett empirikus folyamat határeloszlásaira nézve a (4.3) egyenlet elég sok entrópia párral teljesül; ezután már a hiperbolikus megmaradási elvek elméletének eredményei alkalmazandók, amennyiben azok tényleg rendelkezésre is állnak.

A (4.3) Tartar faktorizáció bizonyítása a Lax féle $X = \partial_t h + \partial_x J$ entrópia produkció funkcionál analitikus tulajdonságaira épül. Valamely φ valós függvény egyenletes normáját $\|\varphi\|$, L^p normáját $\|\varphi\|_p$ jelöli, $\|\cdot\|_+$ a $H_{+1}(\mathbb{R}^2)$ tér normája, $\|\varphi\|_+^2 := \|\varphi\|_2^2 + \|\partial_t\varphi\|_2^2 + \|\partial_x\varphi\|_2^2$, végül $H_{-1}(\mathbb{R}^2)$ a $H_{+1}(\mathbb{R}^2)$ duálisa $L^2(\mathbb{R}^2)$-re vonatkozóan.

Tartar és Murat tételének egy változata a következőképpen mondható ki. Legyen $u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $h_1(u_\varepsilon)$, $h_2(u_\varepsilon)$, $J_1(u_\varepsilon)$, $J_2(u_\varepsilon)$ mind korlátos $L^p(\mathbb{R}^2)$-ben, ahol $p > 2$, továbbá

$$X_{i,\varepsilon} := \partial_t h_i(u_\varepsilon) + \partial_x J_i(u_\varepsilon) = Y_{i,\varepsilon} + Z_{i,\varepsilon}\,,$$

ahol $Z_{i,\varepsilon}$ korlátos a mértékek terében, $Y_{i,\varepsilon}$ pedig eltűnik $H_{-1}(\mathbb{R}^2)$-ben. Ha $\theta \in \Theta$ az u_ε torlódási pontja a Θ topológia értelmében amint $\varepsilon \to 0$, akkor θ eleget tesz a (4.3) faktorizációs tulajdonságnak, lásd [Tar79,83], [Mur78] vagy [Hör97].

Ha (h_1, J_1) és (h_2, J_2) entrópia párok, akkor a tétel feltételei a viszkózus közelítés keretei között könnyen igazolhatók, lásd (3.5). Az állításnak lokalizált változata is van, ami az eredeti publikációkban is megjelent.

Tartár és Murat tételének sztochasztikus változatát a következő formában használjuk, lásd [Fri01,03], [TF03]. A szokásos $\bar{u}$ empirikus átlag bizonyos technikai okok miatt nem felel meg igényeinknek, ezért tetszőleges α folyamat $\hat{\alpha}$ skálázott átlagát

$$\hat{\alpha}_\varepsilon(t,x) := \frac{1}{l^2(\varepsilon)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} ||k - x/\varepsilon| - l(\varepsilon)|_+ \, \alpha_k(t/\varepsilon)$$

definiálja, ahol $|x|_+$ az $x \in \mathbb{R}$ szám pozitív része, és az $l(\varepsilon)$ blokkméretet úgy határozzuk meg hogy

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon l^2(\varepsilon)} < +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{l(\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} = 0\,. \tag{4.4}$$

Mivel $\varepsilon\sigma(\varepsilon) \to 0$ és $\varepsilon\sigma^2(\varepsilon) \to +\infty$ amint $\varepsilon \to 0$, $\sqrt{1/\varepsilon} = o(l)$, az $\varepsilon^{-1/2}$-nél kisebb blokkokról semmit sem tudunk majd mondani.

Az entrópia produkció mikroszkópikus változatát $\hat{u}_\varepsilon := \hat{\Gamma}_\varepsilon$ segítségével

$$X_\varepsilon(\psi,h) := -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(h(\hat{u}_\varepsilon)\psi_t'(t,x) + J(\hat{u}_\varepsilon)\psi_x'(t,x)\big)\,dx\,dt \tag{4.5}$$

definiálja. Mivel ψ tartója az $\mathbb{R}^2_+$ belsejének kompakt része, parciális integrálással

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(\psi,h) = {} & M_\varepsilon(\psi,h) \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi(t,x)\big(\mathfrak{L}h(\hat{u}_\varepsilon) + \varepsilon\partial_x J(\hat{u}_\varepsilon)\big)\,dx\,dt \end{aligned} \tag{4.6}$$

adódik, ahol M_ε martingál szerinti sztochasztikus integrál. Tartár és Murat nyomán kidolgozott segédeszközünk a következő lemma, ahol (h_1, J_1) és (h_2, J_2) korlátosan differenciálható entrópia pár, ϕ kompakt tartójú tesztfüggvény, és rendelkezésre áll a már említett $X_\varepsilon(\psi,h) = Y_\varepsilon(\psi,h) + Z_\varepsilon(\psi,h)$ felbontás.

LEMMA: *Tegyük fel hogy $\varepsilon > 0$ és $i = 1,2$ esetén*

$$|Y_\varepsilon(\phi\psi,h_i)| \le A_\varepsilon(\phi)\|\psi\|_+ \quad \textit{és} \quad |Z_\varepsilon(\psi,h_i)| \le B_\varepsilon(\phi)\|\psi\|\,,$$

ahol A_ε és B_ε nem függ az általános ψ tesztfüggvénytől. Ha $\|\phi|\hat{u}_\varepsilon|\|_2^2 \le B_\varepsilon(\phi)$, továbbá $\mathsf{E}A_\varepsilon(\phi) \to 0$ és $\limsup \mathsf{E}A_\varepsilon(\phi) < +\infty$ amint $\varepsilon \to 0$, akkor az $\hat{u}_\varepsilon$ folyamat eloszlásainak osztálya feszes a Θ téren, és (4.3) minden határeloszlásra vonatkozóan majdnem biztosan igaz.

Nem annyira a lemma bizonyítása, mint inkább a feltételek ellenőrzése a nehéz. Az ergodikusság követelménye miatt a mikroszkópikus dinamika szintjén extra konzervatív mennyiségek nem lehetnek jelen, emiatt a $h(\hat{u}_\varepsilon)$ entrópia is a gyorsan változó mennyiségek körébe tartozik. Azt a kiátlagolódási jelenséget, hogy az entrópia oszcillációját a fluxusa kompenzálja, logaritmikus Szoboljev egyenlőtlenség segítségével tudjuk bemutatni. Érdekes hogy a spektrális rést használó becslés itt nem segít. Konkrét számolás mutatja hogy a h változását megadó sztochasztikus egyenlet martingál részének $O(\sigma/l^3\varepsilon)$

a kvadratikus variációja, míg $O(l/\sigma)$ az entrópia produkció kritikus komponensének tekinthető $\mathfrak{L}_0 h + \partial_x J$ tag járuléka, aminek el kell tünni. Ezek összevetéséből kapjuk az $\varepsilon\sigma^2(\varepsilon) \to +\infty$ feltételt. Megjegyezzük hogy $Y_\varepsilon \approx M_\varepsilon$, míg Z_ε főrésze a $\sigma\mathfrak{G}h$ tag járuléka.

Sok olyan mikroszkópikus modell van amelyben Tartar faktorizációs egyenlete levezethető, ilyen a [Fri03] jegyzetben tárgyalt sejtautomata típusú rácsgázok osztálya is. Nem mindegy viszont hogy milyenek az Euler egyenletek; csak a szóló egyenlet kellemes, itt még az unicitással sincs sok gond. Fizikailag motivált feladatoknál két egyenletünk van, és eléggé tipikus hogy a fázistérben szinguláris pontok, sőt vonalak vannak, ahol a ∇f mátrix sajátértékei egybeesnek. Ilyenkor nehézséget okoz a mérték megoldás Dirac tulajdonságának levezetése, vagyis annak igazolása hogy a szóbanforgó mérték valójában függvény. Kivételes a Leroux rendszer, ahol a $\rho+\pi^2 = 0$ vonal szinguláris pontokból áll, a Dirac tulajdonság mégis (elemi módon) igazolható. A hiperbolikus megmaradási elvek elméletében ezt a nehézséget a kezdeti érték olyan *pozitívan invariáns* halmazokra történő megszorításával kerülik meg, amelyek szinguláris pontot nem tartalmaznak. Pozitívan invariáns halmazok konstruálása általában a Riemann invariánsokra vonatkozó maximum elvre vezethető vissza; sok tartalmas példa ismert. Egyenlőre nem világos hogy ez a módszer hogyan vihető át sztochasztikus rendszerekre. Még nehezebbnek látszik a hidrodinamikai határátmenet egyértelműségét garantáló Oleinik - Bressan kritérium ellenőrzése.

References

[BDS83] C. Boldrighini, R. L. Dobrushin, and Yu. M. Sukhov. One-dimensional hard rod caricature of hydrodynamics. *J. Statist. Phys.*, **31**, 1983.

[BF88] A. Benassi and J.-P. Fouque. Hydrodynamic limit for the asymmetric simple exclusion process. *Ann. Inst. H. Poincarè*, **24**:189–200, 1988.

[BR84] Th. Brox and H. Rost. Equilibrium fluctuations of stochastic particle systems: the role of conserved quantities. *Ann. Probab.*, **12**:742–759, 1984.

[Bre00] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One Dimensional Cauchy Problem.* Oxford University Press, Oxford, 2000. Oxford Lecture Series in Math. Appl. 20.

[BS97] C. Boldrighini and Yu. M. Suhov. One-dimensional hard-rod caricature of hydrodynamics: "Navier-Stokes correction" for local equilibrium initial states. *Comm. Math. Phys.*, **189**:577–590, 1997.

[Che91] Gui Qiang Chen. Propagation and cancellation of oscillations for hyperbolic systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**:121–140, 1991.

[CLO01] C. C. Chang, C. Landim, and S. Olla. Equilibrium fluctuations of asymmetric exlusion processes in dimension $d \geq 3$. *Probab. Theory Related Fields*, **119**:381–409, 2001.

[CY92] C. C. Chang and H.-T. Yau. Fluctuations of one-dimensional Ginzburg-Landau models in nonequilibrium. *Comm. Math. Phys.*, **145**:209–234, 1992.

[DF77] R. L. Dobrushin and J. Fritz. Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a hard-core interaction. *Comm. Math. Phys.*, **55**:275–292, 1977.

[DiP83a] R. J. DiPerna. Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **82**:27–70, 1983.

[DiP83b] R. J. DiPerna. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. *Comm. Math. Phys.*, **91**:1–30, 1983.

[DiP85] R. J. DiPerna. Measure-valued solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **88**:223–270, 1985.

[Dit92] P. Dittrich. Long-time behaviour of the weakly asymmetric exclusion process and the Burgers equation without viscosity. *Math. Nachr.*, **155**:279–287, 1992.

[DV89] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Large deviations from a hydrodynamic scaling limit. *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**:243–270, 1989.

[EK86] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov Processes, Characterization and Convergence*. Wiley, New York, 1986.

[EMY96] R. Esposito, R. Marra, and H.-T. Yau. Navier-Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice. *Comm. Math. Phys.*, **182**:395–456, 1996.

[FD77] J. Fritz and R. L. Dobrushin. Non-equilibrium dynamics of two-dimensional infinite particle systems with a singular interaction. *Comm. Math. Phys.*, **57**:67–81, 1977.

[FFL94] J. Fritz, T. Funaki, and J. L. Lebowitz. Stationary states of random Hamiltonian systems. *Probab. Theory Related Fields*, **99**:211–236, 1994.

[FM88] J. Fritz and Ch. Maes. Derivation of a hydrodynamic equation for Ginzburg–Landau models in an external field. *Journ. Statist. Phys.*, **53**:1179–1206, 1988.

[FN03] J. Fritz and Katalin Nagy. On uniqueness of the Euler limit of one-component lattice gas models. *In preparation*, 2003.

[Fri73] J. Fritz. An information-theoretical proof of limit theorems for reversible Markov processes. In *Transactions of the Sixth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes. Prague, 1971*, pages 183–197. Academia, Prague, 1973.

[Fri82] J. Fritz. Stationary measures of stochastic gradient systems, infinite lattice models. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **59**:479–490, 1982.

[Fri85] J. Fritz. On the asymptotic behaviour of Spitzer's model for evolution of one-dimensional particle systems. *J. Statist. Phys.*, **38**:615–647, 1985.

[Fri86] J. Fritz. On the stationary measures of anharmonic systems in the presence of a small thermal noise. *J. Statist. Phys.*, **44**:25–47, 1986.

[Fri87a] J. Fritz. Gradient dynamics of infinite point systems. *Ann. Probab.*, **15**:478–514, 1987.

[Fri87b] J. Fritz. On the hydrodynamic limit of a one-dimensional Ginzburg–Landau lattice model. The a priori bounds. *J. Statist. Phys.*, **47**:551–572, 1987.

[Fri87c] J. Fritz. On the hydrodynamic limit of a scalar Ginzburg- Landau lattice model: the resolvent approach. In *Hydrodynamic behavior and interacting particle systems (Minneapolis, Minn., 1986)*, pages 75–97. Springer, New York, 1987.

[Fri89] J. Fritz. On the hydrodynamic limit of a Ginzburg–Landau lattice model. The law of large numbers in arbitrary dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, **81**:291–318, 1989.

[Fri90] J. Fritz. On the diffusive nature of entropy flow in infinite systems: Remarks to a paper by Guo, Papanicolau and Varadhan. *Comm. Math. Phys.*, **133**:331–352, 1990.

[Fri01] J. Fritz. *An Introduction to the Theory of Hydrodynamic Limits*. The University of Tokyo, ISSN 0919–8180, Tokyo, 2001.

[Fri03] J. Fritz. Entropy pairs and compensated compactness for weakly asymmetric systems, preprint 2002. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 2003.

[FT03] J. Fritz and B. Tóth. Derivation of the Leroux system as the hydrodynamic limit of a two-component lattice gas. *Preprint*, 2003.

[Fun89] T. Funaki. Derivation of the hydrodynamical equation for one- dimensional Ginzburg-Landau model. *Probab. Theory Related Fields*, **82**:39–93, 1989.

[Fun91] T. Funaki. The hydrodynamic limit for a system with interactions prescribed by Ginzburg-Landau type random Hamiltonian. *Probab. Theory Related Fields*, **90**:519–562, 1991.

[Gär88] J. Gärtner. Convergence towards Burger's equation and propagation of chaos for weakly asymmetric exclusion processes. *Stoch. Process. Appl.*, **27**:233–260, 1988.

[GPV88] M. Z. Guo, G.C. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan. Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. *Comm. Math. Phys.*, **118**:31–59, 1988.

[HH77] P. C. Hochenberg and P.I. Halperin. Theory of dynamical critical phenomena. *Review of Modern Physics*, **49**:435–479, 1977.

[Hop50] E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Commun. Pure Appl. Math.*, **3**:201–230, 1950.

[Hör97] L. Hörmander. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equation*. Springer, Berlin - Heidelberg, 1997. Mathèmatiques & Applicationes 26.

[HS77] R. A. Holley and D. W. Stroock. In one and two dimensions, every stationary measure for a stochastic Ising model is a Gibbs state. *Comm. Math. Phys.*, **55**:37–45, 1977.

[Kac78] M. Kac. Some mathematical problems in statistical mechanics. In *Studies in Probability Theory*, pages 180–228. Math. Assoc. America, Washington, DC, 1978.

[KL99] C. Kipnis and C. Landim. *Scaling Limit of Interacting Particle Systems*. Springer, Berlin - Heidelberg, 1999.

[Kos01] Elena Kosygina. The behavior of the specific entropy in the hydrodynamic scaling limit. *Ann. Probab.*, **29**:1086–1110, 2001.

[KOV89] C. Kipnis, S. Olla, and S. R. S. Varadhan. Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes. *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**:115–137, 1989.

[Kru70] N. Kružkov. Firts order quasilinear equations in several independent variables. *Math. USSR Sbornik*, **10**:127–243, 1970.

[Lan79] R. Lang. On the asymptotic behaviour of infinite gradient systems. *Comm. Math. Phys.*, **65**:129–149, 1979.

[Lan96] C. Landim. Hydrodynamical limit for space inhomogeneous one-dimensional totally asymmetric zero-range processes. *Ann. Probab.*, **24**:599–638, 1996.

[Lax57] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws II. *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:537–566, 1957.

[Lax71] P. D. Lax. Shock waves and entropy. In *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, pages 603–634. Academic Press, New York, 1971.

[Lax73] P. D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock wawes*. SIAM, CBMS–NSF 11, 1973.

[Lax84] P. D. Lax. Shock waves, increase of entropy and loss of information. In *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations*, pages 129–171. Springer, New York, 1984.

[Lax88] P. D. Lax. Oscillatory solutions of partial differential and difference equations. In *Mathematics Applied to Science*, pages 155–170. Academic Press, Boston MA, 1988.

[Lig85] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer, New York, 1985.

[LOY97] C. Landim, S. Olla, and H.-T. Yau. First-order correction for the hydrodynamic limit of asymmetric simple exclusion processes in dimension $d \geq 3$. *Comm. Pure Appl. Math.*, **50**:149–203, 1997.

[LPY02] C. Landim, G. Panizo, and H.-T. Yau. Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for unbounded conservative spin systems. *Ann. Inst. H. Poincarè*, **38**:739–777, 2002.

[LW62] P. D. Lax and B. Wendroff. On the stability of difference schemes. *Comm. Pure Appl. Math.*, **15**:363–371, 1962.

[MEL89] Anna De Masi, R. Esposito, and J.L. Lebowitz. Incompressible Navier - Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, **42**:1189–1214, 1989.

[Mor55] C. B. Morrey. On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics. *Comm. Pure Appl. Math.*, **8**:279–326, 1955.

[MP91] Anna De Masi and E. Presutti. *Mathematical Methods for Hydrodynamic Limits.* Springer, Berlin - Heidelberg, 1991.

[Mur78] F. Murat. Compacitè par compensation. *Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa*, **5**:489–507, 1978.

[Ole57] Olga Oleinik. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk.*, **12**:3–73, 1957. AMS Transl. Ser. 2. Vol. 26. pp 95–172.

[OVY93] S. Olla, S. R. S. Varadhan, and H.-T. Yau. Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise. *Comm. Math. Phys.*, **155**:523–560, 1993.

[Qua92] J. Quastel. Diffusion of color in the simple exclusion process. *Comm. Pure Appl. Math.*, **45**:623–679, 1992.

[QY98] J. Quastel and H.-T. Yau. Lattice gases, large deviations, and the incompressible Navier-Stokes equations. *Ann. of Math.*, **148**:51–108, 1998.

[Rez91] F. Rezakhanlou. Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbf{z}^d$. *Comm. Math. Phys.*, **140**:417–448, 1991.

[Ros81] H. Rost. Nonequilibrium behaviour of a many particle process: density profile and local equilibria. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **58**:41–53, 1981.

[Sep98] T Seppäläinen. Coupling the totally asymmetric exclusion process with a moving interface. *Markov Processes Related Fields*, **4**:593–628, 1998.

[Sep01] T. Seppäläinen. Perturbation of the equilibrium for a totally asymmetric exclusion process. *Ann. Probab.*, **29**:176–204, 2001.

[Ser99] D. Serre. *Systems of Conservation Laws 1–2.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Smo94] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations.* Springer, New York, second edition, 1994.

[Spo91] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles.* Springer, Berlin - Heidelberg, 1991.

[Tar79] L. Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. In *Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*, pages 136–212. Pitman, Boston MA, 1979.

[Tar83] Luc Tartar. The compensated compactness method applied to systems of conservation laws. In *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations (Oxford, 1982)*, pages 263–285. Reidel, Dordrecht, 1983.

[TV03a] B. Tóth and B. Valkó. Onsager relation and Eulerian hydrodynamic limit for systems with several conservation laws. *J. Statist. Phys.*, **112**:497–597, 2003.

[TV03b] B. Tóth and B. Valkó. Perturbation of singular equilibria for systems with two conservation laws – hydrodynamic limit. *Preprint*, 2003.

[Var93] S. R. S. Varadhan. Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II. In *Asymptotic Problems in Probability Theory: Stochastic Models and Diffusions on Fractals (Sanda/Kyoto, 1990)*, pages 75–128. Longman, Harlow, 1993.

[Var03] S.R.S. Varadhan. Large deviations for the asymmetric simple exclusion process, preprint 2002. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 2003.

[VY97] S. R. S. Varadhan and H.-T. Yau. Diffusive limit of lattice gas with mixing conditions. *Asian J. Math.*, **1**:623–678, 1997.

[Yau91] H.-T. Yau. Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg- Landau models. *Lett. Math. Phys.*, **22**:63–80, 1991.

[Yau97a] H.-T. Yau. Logarithmic Sobolev inequality for generalized simple exclusion processes. *Probab. Theory Related Fields*, **109**:507–538, 1997.

[Yau97b] H.-T. Yau. Logarithmic Sobolev inequality for lattice gases with mixing conditions. *Commun. Math. Phys.*, **181**:367–408, 1997.