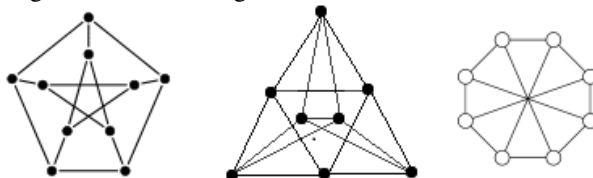
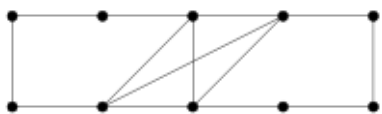


2. gyakorlat

- Számoljuk össze hány különböző Hamilton-kör van G_n -ben, ha:
 - G_n az n csúcsú teljes gráf (K_n), ahol $n \geq 3$;
 - G_n -et úgy kapjuk, hogy K_n -ből elhagyunk egy élet, ahol $n \geq 4$;
- Színezzük ki az alábbi gráfokat a lehető legkevesebb színnel!



- Egy G egyszerű gráfban 2014 csúcsot leszámítva minden csúcs foka legfeljebb 2013. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2014$!
 - A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői. Két csúcs szomszédos, hogyha a megfelelő mezők egy lépésben elérhetőek egymásból huszárral (bástyával). Mutassuk meg, hogy $\chi(G) = \omega(G)$!
 - G csúcsai a (8×8) -as sakktábla mezői, ahol két csúcs szomszédos, ha egy királynak pontosan két lépés kell, hogy az egyikből eljusson a másikba. Határozzuk meg $\chi(G)$ -t! Mi a helyzet, ha a szomszédság feltételét úgy módosítjuk, hogy *legalább* két lépés kelljen?
 - Legyenek F és G tetszőleges egyszerű gráfok, diszjunkt csúcshalmazon, majd készítsük el H -t úgy, hogy F összes csúcsát összekötjük G összes csúcsával. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(H) = \omega(F) + \omega(G)$, illetve $\chi(H) = \chi(F) + \chi(G)$.
 - Legkevesebb hány élet kell törölni az alábbi gráfból, hogy páros gráfot kapjunk?
- 
- Határozzuk meg az összes olyan 10 csúcsú egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 2$, de bárhogyan húzunk be egy új élet, az így kapott G' gráfra $\chi(G') > 2$!
 - Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van köztük olyan, amelyik három másikat is tud ütni!
 - Mutassuk meg, hogy egy egyszerű, e élű G gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$!
 - Mutassuk meg, hogy egy 4 színnel jól színezhető gráf előáll két páros gráfnak az uniójaként!
 - Legyenek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok, továbbá $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$.
 - Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Igazoljuk, hogy az így keletkezett síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetők (azaz különböző színűek azok, amelyeket egy egyenes egy szakasza választ el).
 - Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfnak van egy olyan részgráfja, amiben minden csúcs foka legfeljebb $\chi(G) - 1$.

• Házi feladat

- Legyen G tetszőleges n csúcsú egyszerű gráf. Igazold, hogy $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$ ($\overline{G}$ jelenti G komplementer gráfját).
- Bizonyítsd be, hogy ha egy összefüggő, egyszerű G gráf nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (Δ az adott gráfban előforduló legnagyobb fokszámot jelöli; egy gráf **reguláris**, ha az összes csúcsának ugyanaz a foka).