

2. gyakorlat

1. Számoljuk össze hány különböző Hamilton-kör van G_n -ben, ha:

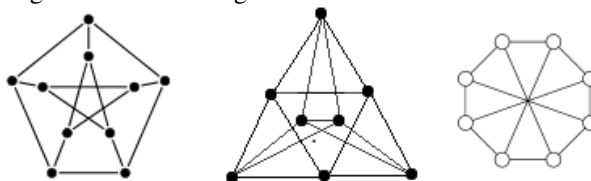
a) G_n az n csúcsú teljes gráf (K_n), ahol $n \geq 3$;

A csúcsok tetszőleges sorrendben történő leírása egyúttal kódol egy Hamilton-kört (hiszen sorban össze vannak kötve a következővel). Azonban ha egy elemet a végéről átrunk az elejére a sorozatnak, akkor lényegében ugyanazt a kört kaptuk, ezt n -szer eljátszhatjuk (másképpen mondva: ezek az esetek abban különböznek, hogy az adott Hamilton-körből honnan indulunk el). Ezen túl ha egy adott sorozatot leírunk egy az egyben visszafele (itt kellett, hogy n legalább 3), az is ugyanaz a Hamilton-kör, csak visszafele jártuk be. Így tehát $n-1$ faktor osztva kettővel Hamilton-kör van a gráfban.

b) G_n -et úgy kapjuk, hogy K_n -ből elhagyunk egy élet, ahol $n \geq 4$;

Az előző esetekből el kell hagyni azokat, amikor az adott két csúcsot egymás mellett írtuk le: egyesítve őket számoljuk meg a lehetőségeket, és ezeket szorozzuk meg kettővel, hiszen őket magukat cserélve az eredetiben különböző Hamilton-kört jelentettek. Így megkapjuk az $(n-1)!/2 - (n-2)!$ végeredményt.

2. Színezzük ki az alábbi gráfokat a lehető legkevesebb színnel!



Az első hárommal ki lehet. Kevesebb nem, mert a „külsője” egy páratlan kör. A másodikat 4-el ki lehet ügyeskedni. 3-mal azért nem, mert a középső háromszög csúcsai különböző színt kell, hogy kapjanak, amik indukálnák a külső háromszög csúcsainak színeit, a belső két csúcsra azonban nem maradna így szín. A harmadikat hárommal könnyű kiszínezni. A külső körből kiindulva csak egyféle képpen lehetne 2-vel színezni, azonban a köztes élek ezt elrontják.

3. Egy G egyszerű gráfban 2014 csúcsot leszámítva minden csúcs foka legfeljebb 2013. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2014$!

Ezt a 2014 csúcsot színezzük ki 2014 külön színnel. A többi pedig mohó módszerrel ki tudjuk színezni, hiszen max. 2013 szomszédjuk van, tehát a 2014 szín közül egy legalább mindig szabad lesz. Így 2014 színnel ki tudjuk mindenképp színezni a gráfot.

4. A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői. Két csúcs szomszédos, ha egy megfelelő mezők egy lépésben elérhetők egymásból huszárral (bástyával). Mutassuk meg, hogy $\chi(G) = \omega(G)$!

Husár esetben a sakktábla eredeti színezése jó lesz, mert mindig sötétről lép világosra, és fordítva, továbbá nyilván van 2 méretű klikk (él). Egy adott sor (vagy oszlop) egy klikk a bástya esetében ezeknek tehát különböző szín kell, például 1,2,...,8. Továbbá ha kiindulunk egy szélső sorból, és a következőt úgy színezzük, hogy az előző színezést eltoljuk, majd a „kieső” színt visszarakjuk a megtolt végére a sornak, akkor egy jó színezést kapunk, mert két azonos színű mező nem lesz se egy oszlopon, se egy soron belül.

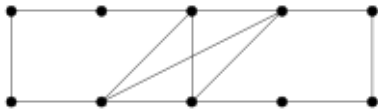
5. G csúcsai a (8×8) -as sakktábla mezői, ahol két csúcs szomszédos, ha egy királynak pontosan két lépés kell, hogy az egyikből eljusson a másikba. Határozzuk meg $\chi(G)$ -t! Mi a helyzet, ha a szomszédosság feltételét úgy módosítjuk, hogy **legalább** két lépés kelljen?

Egy 3×3 -as rész négy sarka klikk. Ha sakktáblát négyes (2×2) -es blokkokba szedjük, akkor ezeket ki tudjuk négy színnel jól színezni: például ha a bal alsó táblanegyedbe eső négy blokkot kiszínezzük a négy színnel, és csak eltoljuk ezt a negyedet a sakktábla maradék részeire. Így $\chi = \omega = 4$. A második esetben annyi módosul, hogy minden 2×2 -es blokknak különböző színt kell adni, így lesz 16 színnel egy színezés, amire klikk, ha tekintjük a blokkok „bal alsó sarkát”. Másként fogalmazva, a páratlan sor- és oszlopszámú mezők klikket alkotnak.

6. Legyenek F és G tetszőleges egyszerű gráfok, diszjunkt csúcshalmazon, majd készítsük el H -t úgy, hogy F összes csúcsát összekötjük G összes csúcsával. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(H) = \omega(F) + \omega(G)$, illetve $\chi(H) = \chi(F) + \chi(G)$.

F és G klikket véve együtt H -ban klikket alkotnak, a méretük összeadódik. Nagyobb pedig skatulya-elv miatt nem lehet, hiszen F -ben vagy G -ben egy „túl nagy” klikket kellene tartalmaznia. Ha kiszínezzük optimálisan F -et, majd G -t teljesen új színekkel, akkor jó színezést kapunk. Jobbat viszont nem produkálhatunk, hiszen F és G csúcspárai mind különböző színt kell, hogy kapjon. Kevesebb színt használva vagy G -ben (mint H részgráfban), vagy F -ben kevesebb színt kellett volna hogy használjunk, mint lehetne.

7. Legkevesebb hány élet kell törölni az alábbi gráfból, hogy páros gráfot kapjunk?



Középen van egy rombuszá döntött teljes 4-es, amiből ugye 2 élet mindenképp törölni kell (egy élet törölve még lenne egy háromszög részgráfja). A négyszög két döntött szélső élét a kapott gráfot pedig ki tudjuk színezní két éllel.

8. Határozzuk meg az összes olyan 10 csúcsú egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 2$, de bárhogyan húzunk be egy új élet, az így kapott G' gráfra $\chi(G') > 2$!
- A páros gráf két osztályra szedhető. A két osztály összes csúcspárja között kell, hogy legyen él, különben még tudnánk mit behuzni úgy, hogy páros maradjon. Tehát az ilyeneket kell megszámlolni, ami egyértelműen megtehető az osztályok méretével (9-1, 8-2, .., 5-5). Így 5 ilyen gráf van.
9. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van köztük olyan, amelyik három másikat is tud ütni!
- Válasszuk szét a huszárokat színük szerint! Az egyik típusú mezőn (pl. világos) lesz legalább 4, míg a ásíkon legfeljebb 3. A világos mezők huszáraiból legalább $4 \cdot 2 = 8$ él fut ki, ami legfeljebb 3 huszárhoz érkezik be, így tehát valamelyiküknek (többnek is) muszáj legalább 3-at befogadnia.
10. Mutassuk meg, hogy egy egyszerű, e élű G gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}!$
- Rajzoljuk le a gráfot úgy, hogy vegyük a színosztályokat egy-egy blokkba, és az élek a blokkok közt futnak (bennük nyilván nem). Távabbá, bármely két színosztály között kell, hogy fusson él, különben ak ét osztályt „egyesíthetnénk”, így eggyel kevesebb színnel ki tudnánk színezní a gráfot. Tehát minden színosztály-párra (amiből $\binom{\chi(G)}{2}$ van) jut legalább egy él.
11. Mutassuk meg, hogy egy 4 színnel jól színezhető gráf előáll két páros gráfnak az uniójaként!
- Az előző feladatmegoldásban leírt módszerrel ábrázoljuk a gráfot! A négy színosztály 1, 2, 3, 4. Ha vesszük az (1, 2) és (3,4) színosztálypárokat, „egyberakva” a csúcsokat, és csak a két párosítás közti éleket, akkor páros gráfunk lesz. Hasonlóan (1, 3), (2, 4) egyesítésekkel páros gráfot kapunk. Az eredeti gráf összes éle megjelenik legalább az egyik páros gráfban, így legyártottuk őket.
12. Legyenek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok, továbbá $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$.
- A színek most ne számok legyenek, hanem rendezett számpárok! A számpárok első koordinátája G_1 -ben vett színe, a második G_2 -ben vett színe legyen. Így összesen $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$ féle számpár lesz legfeljebb, és ez egy jó színezés, hiszen ha két számpár megegyezik, az azt jelenti, hogy az első gráfban és a másodikban is azonos színűek kellettnek, hogy legyenek, így egyikben sem voltak összekötve, tehát a kapott gráfban sem lesznek.
13. Tekintsük a sík egyeneseseinek egy véges halmazát. Igazoljuk, hogy az így keletkezett síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek (azaz különböző színűek azok, amelyeket egy egyenes egy szakasza választ el).
- Dolgozzunk indukcióval! Ha nincs egyenes, rendben vagyunk. Felveszünk egy egyenest: egyértelmű, hogy színezzük. Na most, mikor felveszünk az utolsót, a következőt csináljuk: despoitkusan kiválasztjuk az egyik oldalát, és az ott található összes színt megcseréljük (mint amikor az első egyenest vettük be: az egyik felét átszínezzük a síknak). Ez azért lesz jó, mert a két oldalt külön-külön nyilván rendben van, hiszen rendben volt. A két oldalt pedig az új egyenes határolja, tehát amiket ő választ szét, azok előtte egy tartományt alkottak, tehát egy színűek voltak, viszont most különbözőre váltottuk őket.
14. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfnak van egy olyan részgráfja, amiben minden csúcs foka legalább $\chi(G) - 1$.

• Házi feladat

- Legyen G tetszőleges n csúcsú egyszerű gráf. Igazold, hogy $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$ ($\overline{G}$ jelenti G komplementer gráfját).
- Bizonyítsd be, hogy ha egy összefüggő, egyszerű G gráf nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (Δ az adott gráfban előforduló legnagyobb fokszámot jelöli; egy gráf **reguláris**, ha az összes csúcsának ugyanaz a foka).