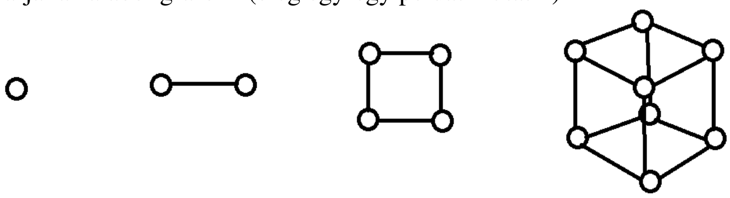
BSZ 2
2014. február 25. Józsa Márton

3. gyakorlat

1. Induljunk ki egy szabályos 2014 szögből. G_1-et úgy kapjuk belőle, hogy a síkidom egy csúcsát összekötjük az összes többivel, ami korábban nem volt szomszédja. G_2-t pedig úgy, hogy felveszünk egy extra pontot, amit összekötönk a 2014 szög összes csúcsával. Döntsük el, hogy intervallámgráfokokat kaptunk-e!
   Az első az: a kitüntetett pont a teljes számegyenes, a többi pedig egymás utáni, csak a szomszédokat metsző intervallumok. A második nem az, hiszen a külső körnek, mint feszített részgráfnak, is intervallumgráfnak kéne lennie, az viszont nem az, hiszen nem tudok intervallumokkal „körbe érni" a számegyenesen.

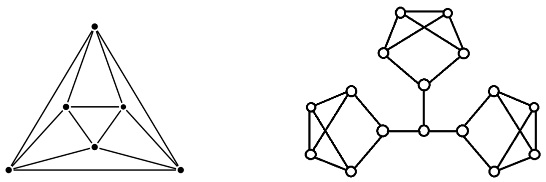
2. Van-e olyan gráf, ami intervallumgráf, de a komplementere nem az?
   Persze. Két diszjunkt él. (A komplementer a négy hosszú kör.)

3. Mely gráfok élgráfjai az alábbi gráfok? (elég egy-egy példát mutatni)

   Egy élnek. Két szomszédos élnek. Saját magának. Semelyiknek: ugyanis tartalmaz egy három ágú csillagot mint feszített részgráf, ami olyasvalaminek kéne az élgráfja legyen, hogy: van egy él (a közepe a csillagnak), ami össze van kötve három másik éllel, amik viszont nincsennek összekötve egymással. No ez nem lehet.

4. Határozzuk meg az alábbi gráfok élkormatikus számát!

   4 4 4 Próbálgatva könnyű megcsinálni 4-ekkel. 3-mal azért nem lehet, mert: van 4 fokú csúcs; egyértelműen lehet haladni 3 színnel, és ellentmondást kapunk; (majdnem) egyértelműen lehet haladni három színnel (egyszer lesz egy döntési helyzet), de az alesetekben ellentmondás jön ki.

5. $V(G) := \{1, 2, ..., 100\}; xy \in E(G) \iff (|x-y| = 1 \vee |x-y| = 50)$. $\chi_e(G) = ?$
   Van három fokú csúcs, tehát 3 szín kell. Annyi elég is, mivel a szomszédos csúcsokból álló utat felemásan 2-vel színezhető, az „50-esekre" a harmadik szín pedig jó.

6. Mutassuk meg, hogy $\chi_e(G) \cdot \nu(G) \geq e$, ahol ν jelenti azon élek maximális számát, melyeknek nincs közös végpontja (e természetesen az élszám).
   Minden élszín osztály egy független élhalmaz, melynek maximális mérete ν. Tehát az összes élszín osztály összes éle, vagyis az összes él, legfeljebb ennyi.

7. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út összes csúcsát összekötjök a másik út összes csúcsával. Lássuk be, hogy $\chi_e(G) = 7$!
   A két utat fessük le 2 színnel, ez nyilván megy. A maradék egy teljes páros gráf, aminek az éleit azért tudjuk 5 színnel kiszínezni. Ezt például így tudjuk megtenni: rendezzük két sorba a csúcsokat, egymással szemben. A szemközt haladó élek egy színt kapnak. Ami a szemközti csúcstól eggyel jobbra lévővel van összekötve (pl. fentről nézve), az a következő szín (értelemszerűen az utolsó visszaugrik az elejére, stb. Így 5 színnel ki tudtuk színezni a maradék gráfot, tehát összesen 7-et használtunk fel. Kevesebbel meg persze nyilván nem lehet, hiszen van hetedfokú csúcs, nem is kevés.

8. $a)$ Kosárlabda bajnokságot szervezünk. 2013 csapat van, és mindegyik csapatnak legalább egyszer kell játszania az összes többi csapat ellen. Egy fordulóban minden csapat legfeljebb egyszer játszhat. Legkevesebb hány fordulóra van szükség a bajnokság lebonyolításához?
   Vegyük a teljes 2013 csúcsú gráfot. Egy csúcs egy csapat, az élek a meccsek. Ki kell kiszíneznünk az éleket úgy, hogy egy csúcsból ne vezessen ki két azonos színű él. Az így kapott színek lesznek a fordulók: a 3. színnel színezett élek (csapatpárosítások) a 3. fordulóban lejátszott meccseket jelentik. Minden csúcs foka 2012, tehát a Vizing-tétel értelmében legfeljebb 2013 színnel ki tudjuk színezni az éleket. Ennyi viszont kell is, hiszen öszesen 2013*2012/2 él van, viszont egy színhez legfeljebb 1006 él tartozhat , hiszen 2013-ból

legfeljebb 2012 független pár lehet. Így 2012 forduló esetén max 2012*1006 meccs játszható le, ami kevés.
$b)$ Sikeresen lezajlott az előző félévben a bajnokság a 2013 csapattal. A félév végén azonban a színvonalon aluli játék miatt a rettegett $SzIT$ csapat úgy döntött, hogy csatlakozik a következő bajnoksághoz, így már 2014 csapat verseng. Bizonyítsuk be, hogy részvételük nem növeli a szükséges fordulók számát!
Az $a)$ részből adódik, hogy mindig egy csapat pihen, 2013 résztvevő esetén. Mindig pont egy, és mindig pont más. Így ha az eredetileg pihenő csapaot részesítjük abban a hatalmas megtiszteltetésben, hogy pályára léphet a $SzIT$ ellen, akkor - nem növelve a fordulók számát - ismét lejátszottuk az összes kellő meccset.

9. (Sakktáblás feladat 2. gyakorlatról) G csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői, ahol két csúcs szomszédos, ha egy királynak pontosan két lépés kell, hogy az egyikből eljusson a másikba. Határozzuk meg $\chi(G)$-t! Mi a helyzet, ha a szomszédság feltételét úgy módosítjuk, hogy *legalább* két lépés kelljen?
   Egy 3x3-as rész négy sarka klikk. Ha sakktáblát négyes (2x2-es) blokkokba szedjük, akkor ezeket ki tudjuk négy színnel jól színezni: például ha a bal alsó táblanegyedbe eső négy blokkot kiszínezzük a négy színnel, és csak eltoljuk ezt a negyedet a sakktábla maradék részeire. Így khí=omega=4. A második esetben annyi módosul, hogy minden 2x2-es blokknak különböző színte kell adni, így lesz 16 színnel egy színezés, amire klikk, ha tekintjük a blokkok „bal alsó sarkát". Másként fogalmazva, a páratlan sor- és oszlopszámú mezők klikket alkotnak.

10. Bizonyítsuk, hogyha egy síkgráf tartományai kiszínezhetőek két színnel, akkor minden foka páros!
    Nézzünk egy tetszőleges csúcsot! Abba a tartományok amolyan háromszög-szerűen futnak be. Azok felváltva vannak színezve, körbe. És hogy a kör végén stimmeljen a szín az elsőhöz, páros sok tartománynak kellett befutnia a csúcsba, ami azt eredményezi, hogy a foka páros.

11. $a)$ Egy egyszersű, 673 csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan 2013 éle van!
    Euler-egyenlőtlenséget felhasználhatjuk (n-e+l=2), továbbá a háromszög struktúrából 2e=3l, hiszen minden lapra jut pontosan 3 él, de ekkor minden élet két oldalról számoltunk meg. n=673, behelyettesítünk, és kijön aminek ki kell jönnie (nem, nem az).
    $b)$ Lássuk be, hogyha egy síkbarajzolható G gráfnak kevesebb, mint $3n - 6$ éle van, akkor be tudunk húzni egy új élet, hogy a kapodd gráf továbbra is egyszerű, síkbarajzolható marad!
    Az kell, hogy van tartomány, ami nem háromszög (ekkor lesz „átló"). Az előző feladatból, háromszögesített síkgráf esetén pont ezt a korlátot kapjuk, ha elhagyunk élet, akkor utána azt „visszahúzhatjuk", és csak így lehet kevesebb éle egy síkgráfnak, rögzített csúcsszám esetén.
    $c)$ Igazoljuk, hogy minden síkgráf tartalmaz olyan csúcsot, aminek a foka legfeljebb 5.
    Tfh. nem, vagyis minden fokszám legalább 6. Ekkor az összfokszám legalább 6n, ami az élszám kétszerese, viszont akkor legalább 3n él lenne, és egy síkgráfnak legfeljebb 3n-6 éle lehet (feltéve, hogy n elég nagył; ha n kicsi, akkor meg nincs gond amúgy se).
    $d)$ Mutassuk meg, hogyha egy gráf legalább 11 csúccsal rendelkezik, akkor vagy ő, vagy a komplementere biztosan nem síkgráf.
    A vizsgált két gráf összélszáma $\binom{n}{2}$ (minden él vagy az egyikben, vagy a másikban van). $n \geq 12$ esetben azonban a $2(3n - 6)$, ami élük lehetne összesen, ha mindketten síkgráfok lennének, kevesebb.

12. Egy kovex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög, valamint minden csúcsában pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és a nyolcszöglapok számának különbsége?
    Használjuk ki az Euler-egyenlőséget, ahol l helyébe kettő paramétert írunk a megfelelő síkidomoknak. Továbbá ha felírjuk azt, hogy a 8·<8-szögek száma> + 4·<4-szögek száma> az egyenlő $3n$ (hiszen lényegében minden csúcsot pontosan háromszor számoltunk meg). Akkor ha ezeket összerakjuk, megkapjuk az eredményt.

- **Házi feladat**

1. Van egy 20 csúcsú gráfunk, amiben minden csúcs foka 8. Válasszunk ki egy tetszőleges csúcsot a gráfból, és hagyjuk el (a rá illeszkedő élekkel együtt, természetesen)! Igazoljok, hogy a gráf élkormatikus száma nem változott!

2. Induljunk ki egy 5 hosszú körből, majd minden élét cseréljük le három párhuzamosra. Mennyi az így kapott gráf élkormatikus száma? (A gráf nem lesz egyszerű, így nem használható a Vizing-tétel.)