

5. gyakorlat

- 7 lány (A,B, . . . , G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házassulandó korba a Kőnig törzsben. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a lentebbi táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?
 - Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldd meg a feladatot erre az esetre is!

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

A megváltoztatott ábra mutat egy jó (fiúkat lefedő) párosítást. A b) részben pedig ha nézzük az 1-es, 3-as, 5-ös, illetve 6-os fiúkat, akkor ők összesen 3 lány közül hajlandóak választani, de 4-en vannak, megsérül a Hall-tétel feltétele.

- Vegyünk egy összefüggő páros gráfot, azzal a feltétellel, hogy a gráf A osztályában a csúcsoknak a fokszáma mind különböző szám. Mutassuk meg, hogy van a gráfban A-t fedő párosítás!
Soroljuk fel a csúcsokat A-ból, fokszám szerint növelve sorrendben. Az elsőnek a foka legalább egy, mivel őf. a gráf, tehát valakihez be tudjuk párosítani. Tegyük is ezt meg! Ekkor a következő csúcs lehetséges párainak száma eggyel csökkent, viszont legalább 2 szomszédja van, tehát neki is marad egy szomszédja, akinek még nincs párja. Általában a $k + 1$ -edik csúcs foka legalább $k + 1$, és előtte k párt képeztünk, tehát a szomszédai között az egyik legalább még nem foglalt, így tudunk csinálni teljes párosítást mohó módon.
- Bizonyítsuk be, hogy minden reguláris páros gráfban van teljes párosítás!
(Reguláris: minden fokszám azonos.) Legelőször is belátjuk, hogy a két színosztály mérete megegyezik. Az egyik mérete $|A|$, a másiké $|B|$, az általános fokszám pedig d . Ekkor a gráfban összesen $|A| \cdot d$ él van, hiszen minden A-beli csúcsból d él indul ki. Hasonlóan, az élszám egyúttal $|B| \cdot d$ -vel is megegyezik, tehát $|A| = |B|$. A továbbiakban Hall-tétel feltételét ellenőrizzük. Tegyük fel indirekt, hogy egy X képe kisebb ($|X| > |N(X)|$)! Ekkor a két rész ($X, N(X)$) között futó élek száma pontosan $|X| \cdot d$, viszont $N(X)$ mérete kisebb, tehát kell legyen legalább egy csúcs $N(X)$ -ben, aminek a foka szigorúan nagyobb, mint d . Ez ellentmondás. Tehát mindig teljesül a Hall-tétel feltétele, így lesz teljes párosítás.
- Igaz-e, hogy egy tetszőleges G gráf mindazon élei, amelyek G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
Nem. Ellenpélda a 4 csúcsú teljes gráf. Van benne 3 hosszú „kör”, valamint minden él előáll egy teljes párosítás egyik éleként, hiszen bármelyik élt ha veszem, a kimaradó csúcspár is egy él, ez a két él együtt pedig egy teljes párosítás.
- Bizonyítsuk be, hogy minden r -reguláris páros G gráfra $\chi_e(G) = r$.
A korábbi feladattól tudjuk, hogy van benne (egy) teljes párosítás. Legyen ez egy színosztálya az éleknek, majd ezeket hagyjuk el! Ekkor a maradék gráf $r - 1$ -reguláris lesz, amiben szintén van teljes párosítás, és így tovább, folytathatjuk $r - 1$, azaz 0-ig. Tehát összesen r színosztállyal lefedtük az összes élet, tehát r színnel ki tudjuk színezni jól az éleket (kevesebbel nyilván nem).
- Adott egy $n \times n$ -es mátrix, melynek minden sorában és oszlopában pontosan k darab egyes van, a többi elem nulla. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki.
Vegyünk a következő páros gráfot: az egyik osztály csúcsai a mátrix egyes sorai, a másik osztály pedig az oszlopokat reprezentálja. Két csúcs legyen szomszédos, ha az adott sor és oszlop metszeténél 1-es van. Ekkor minden csúcs foka k , vagyis reguláris a páros gráf, van benne teljes párosítás, és egy teljes párosítás pedig pont azt jelenti, hogy kiválasztottunk egyeseket úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egyet-egyét.
- Legyen G egy olyan (nem feltétlenül páros) 100 csúcsú gráf, ahol minden csúcs foka legalább 50. Igaz-e, hogy van G -nek teljes párosítása?
A Dirac-tétel (emlékszünk rá? :P) miatt van a gráfban Hamilton-kör, ami ugye átmegy minden csúcson, és jelen esetben páros hosszú. Ha ennek a Hamilton-körnek vesszük minden második élét, az pontosan egy teljes párosítás.

8. Legyen G egy 8 csúcsú gráf, amit egy 7 csúcsból álló útból úgy kapunk, hogy hozzáveszünk egy csúcsot, amit összekötünk az út összes csúcsával. Mennyi lesz $\tau(G)$?
- Az új csúcsához vezető éleket le kell fedni, viszont nem szeretnénk az összes csúcsot kiválasztani a lefogó pontthalmazunkba az úthoz, tehát az új csúcsot vegyük be! Kimaradt tehát az út, aminek az éleit 3 csúccsal tudjuk lefedni (minden másodikat véve), kevesebb pedig nem különben lenne egy él, aminek a végpontjait nem vettük be. Tehát $\tau = 4$.
9. Egy ünnep alkalmával a török szultán udvarában a férfiak két-két háremhölgyet választanak. Mi a feltétele annak, hogy minden férfi neki tetsző két háremhölgygel tölthesse az éjszakát?
- A Hall-tétel rejtelseit átgondolva juthatunk arra a következtetésre, hogy a férfiak osztályának tetszőleges részhalmazára igaznak kell lennie, hogy a képe legalább kétszer akkora, mint ő maga.
10. Tegyük fel, hogy a $4n$ pontú, egyszerű G gráf élei úgy vannak piros, fehér illetve zöld színre színezve, hogy G minden páratlan köre tartalmaz piros, fehér és zöld színű élt is. Mutassuk meg, hogy G élszámára
- a) $|E(G)| \leq 12n^2$
 b) $|E(G)| \leq 6n^2$
- teljesül!
- Az a) rész egyszerűen belátható, hiszen ennyi éle nem is lehet egy akármilyen $4n$ csúcsú gráfnak. De meg lehet oldani úgy is, hogy ha tekintünk egy élosztályt (vigyázat, nem egy „jőszínezésről” van szó!), akkor az páros gráfot kell, hogy meghatározzon, hiszen nem alkotnak páratlan kört. $4n$ csúcsú páros gráfnak pedig legfeljebb $2n \cdot 2n$, azaz $4n^2$ éle lehet ($x \cdot (4n - x)$ fv. maximuma). Tehát a három osztály méretének az összege, ami az élszám, legfeljebb $12n^2$. Igen ám, de ez az érvelés elmondható ugyanígy, ha nem egy, hanem két élosztályt rakunk össze, az is páros gráf még, tehát bármely kettő összege legfeljebb $4n^2$. Innen pedig primitív algebra belátni, hogy a három összege legfeljebb $6n^2$.

• Házi feladat

1. Igazold, hogy egy 2-reguláris páros gráfban a különböző teljes párosítások száma 2^k , ahol k az összefüggő komponensek számát fejezi ki!