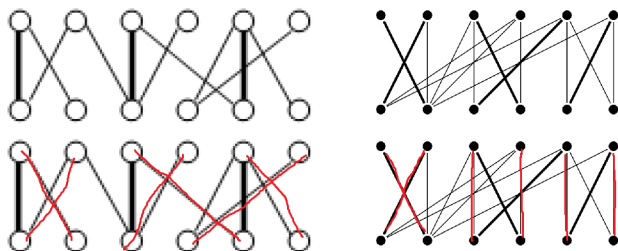
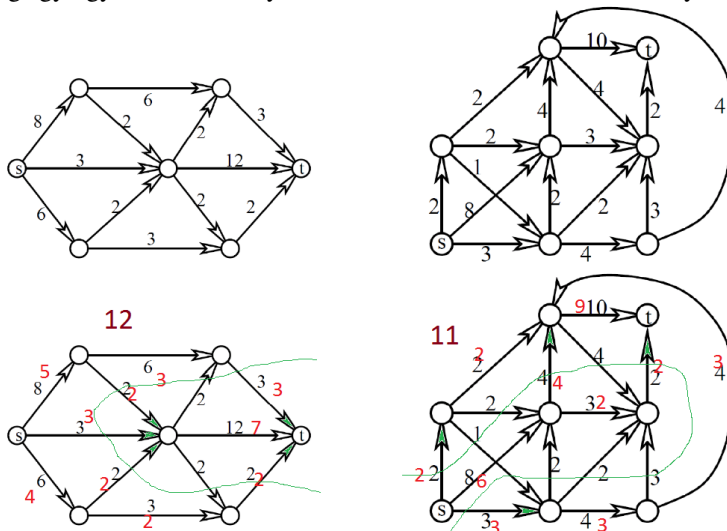


6. gyakorlat

1. Keressünk az alábbi gráfokban maximális párosítást, *javító algoritmussal*!



2. Adjunk meg egy-egy maximális folyamatot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, nincs nagyobb!



3. Legyenek egy gráf csúcsai legyenek az 1, 2, ..., 20 számok. Egy irányított él pedig úgy nézzon ki, hogy a kisebb számból megy a nagyobbba, feltéve, hogy a különbségük legfeljebb öt, továbbá minden él kapacitása legyen egy. Mennyi az így kapott hálózatban az 1-ből a 20-ba tartó maximális folyam értéke?

Mivel az 1 csúcsból 5 él megy ki, nagyobb nem lehet. Ekkorát viszont lehet is csinálni: indítsuk a folyamatot 1-nek az összes szomszédjába, onnan pedig mindig az 5 távolságra lévő csúcsokba, egészen míg a 20-ast el nem tudják érni.

4. (Egészértékűségi lemma: Ha egy hálózatban minden él kapacitása egész, akkor van olyan maximális folyam, ami a gráf minden élén egész értéket vesz fel.)

Feladat: Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások tetszőleges hálózatban.

a) Ha minden élen a kapacitás értéke páros, akkor van olyan maximális folyam, amely minden élen páros.

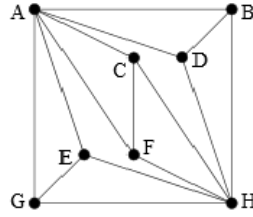
Igaz, hiszen ha minden élkapacitást, és a folyam nagyságát átskalázzuk, a felét vesszük, akkor az EgÉr lemma miatt meg lehet csinálni egészekkel, majd visszaaszorzunk mindent kettővel.

b) Ha minden élen a kapacitás értéke páratlan, akkor van olyan maximális folyam, amely minden élen páratlan. Ez nem igaz, van rá ellenpélda: legyen a forrásból két külön út, ahol minden kapacitás 1, a két út pedig találkozzék egy csúcsban, a célállomás előtt, amely két csúcs közt mondjuk 3 nagyságú kapacitás van. Ekkor minden kapacitás páratlan, a max folyam mégis 2 (páros).

5. Egy hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

Vegyük a színpárokon a maximális folyamatokat, ez összesen 30 nagyságú, ám valamit többször használva túlléphetünk a megengedett kapacitást. De mivel minden élet max kétszer használtunk korlátan belül, így ha ezt a folyamatot mindenhol pontosan megfelezzük, akkor kapunk egy 15 nagyságú jó folyamatot (ennél jobb korlát nincs, mert van ilyenre példa).

1. Hány plusz élet kell behúzni, hogy az alábbi gráfban legyen Hamilton-kör?



2. Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 4. Mutassuk meg, hogy van a gráfban (pontosan) 4 hosszú kör.
3. Egy gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 100$ számok, két (különböző) csúcsot összekötünk, ha a szorzatuk osztható 7-tel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.
4. Vegyük a $4 \times 4 \times 4$ -es térrácsot. Mennyi az ebből kapott G gráf $\chi_e(G)$ -je?
5. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Következik-e ebből, hogy a gráfban van teljes párosítás?
6. Jelölje G_8 azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_8) = 8$. Ekkor G_8 -nak 191 csúcsa van. Határozzuk meg $\nu(G_8)$, vagyis a G_8 -beli független élek maximális számának értékét!

(Ezen feladatok megoldása részletesen megtalálható a cs.bme.hu/bsz2 oldalon, a régebbi ZH-k közt.)