

7. gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy egy k -szorosan összefüggő 100 pontú gráfnak legalább $k \cdot 50$ éle van.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf legalább $n/2$ -szeresen összefüggő, akkor van benne Hamilton-kör.
3. Legyen $k \leq n - 1$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-1}{2}$, akkor a gráf k -szorosan összefüggő.
4. Mutassuk egy olyan gráfot, aminek az élösszefüggősége „nagyon nagy”, a pontösszefüggősége pedig 1.
5. Tetszőleges $k \leq l$ pozitív egészekre konstruáljunk egy olyan gráfot, amely k -szorosan pontösszefüggő, és l -szeresen élösszefüggő.
6. Legyen G az a gráf, amit egy nyolc hosszú körből úgy kapunk, hogy a szemközi csúcsait egy-egy éllel összekötjük. Mutassuk meg, hogy ekkor $\kappa(G)$ pontosan 3.
7. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r -elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r -elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k -összefüggő ($\kappa(G)$)?
8. Bizonyítsuk be, hogy ha az azonos csúcshalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1)\lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1)\kappa(G_2)$? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két halmaz uniója adja.)
9. Tegyük fel, hogy G egy egyszerű gráf, és kétszeresen összefüggő. Vegyünk hozzá egy új v csúcsot, amit összekötünk G két különböző csúcsával. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 2-összefüggő marad!
10. Tegyük fel, hogy a G gráf rögzített u és v csúcsait összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az u és v pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?
11. Legyen k pozitív egész, G pedig egy legalább $2k + 1$ csúcsú, k -szorosan csúcsösszefüggő gráf. Definiáljuk H gráfot úgy, hogy a csúcsai G csúcsai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő csúcsok G -ben vagy szomszédosak voltak, vagy volt közös szomszédjuk. Bizonyítsuk be, hogy H $2k$ -szorosan csúcsösszefüggő.
12. Legyen G reguláris, összefüggő, páros gráf, továbbá legalább három csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ekkor G 2-szeresen is összefüggő.

• Házi feladat

1. Azonos csúcshalmazon vett két fa uniójának legfeljebb mekkora lehet a pontösszefüggősége?
2. Igazoljuk, hogy ha egy 2014 csúcsú gráf 11-szeresen csúcsösszefüggő, akkor bármely két csúcsa közt vezet legfeljebb 183-élű út.