

8. gyakorlat

1. Péter a XXI. században született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?
2. Mely pozitív egészeknek van ugyanannyi páros osztója, mint ahány páratlan?
3. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető.
4. Melyik az a legkisebb 3-mal osztható szám, melynek 15 osztója van?
5. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, és a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A cellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség mindegyike végigvonul a börtönön, és mindegyik átfordít néhány zárat, mégpedig úgy, hogy a k . feleség minden k . záron pontosan egyet fordít. Miután mind a 100 feleség végigment, a nyitott ajtajú cellákban lévő rabok kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
b) A sah következő születésnapján a feleségek rosszkednek, és így most a k . feleség minden k . záron pontosan k -t fordít. Ebben az évben mely cellában lakó rabok szabadulnak ki?
6. Melyek azok a p prímszámok, melyekre
a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
b) $p^2 + 2$ is prím?
c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
7. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?
8. Hány olyan háromjegyű szám van, mely osztóinak száma osztható 11-gyel?
9. Egy n pozitív egész számról tudjuk, hogy osztóinak száma p , ahol p prímszám. Állapítsuk meg, hogy az ezen p darab osztóból alkotható összes számpár közül hány lesz relatív prím.
10. Legyenek n és k pozitív egészek, melyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n+1)! + k$ számoknak?
11. Bizonyítsd be, hogyha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.
12. Mely természetes számoknak van olyan többszöröse, melynek tízes számrendszerbeli alakja csak a 0 és 1 számjegyeket tartalmazza?

• Házi feladat

1. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{45n+12}{18n+5}$ tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető.
2. Van olyan p prímszám, amire $p^4 + 4$ is prím?