

8. gyakorlat

1. Péter a XXI. században született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?

Ha nem relatív prímek, akkor van valódi közös osztójuk, aminek egyúttal osztania kell a különbséget, vagyis 53-at. 53 prím, így ez a közös osztó 53, vagyis Péter születésének évét osztja 53. a XXI. századi eddigi évek közül ezt csak a 2014 tudja.

2. Mely pozitív egészeknek van ugyanannyi páros osztója, mint ahány páratlan?

Az osztók úgy néznek ki, hogy vesszük a prímtényező felbontást, és a kitevőket csökkentgetjük. A páratlan osztó azt jelenti, hogy a 2 kitevője 0. Ha 2 maximális kitevője 1, akkor minden páratlanhoz létezik pontosan egy páros, továbbá ha nagyobb lenne, akkor lenne még extra páros osztó, tehát a válasz: páros, de 4-el nem osztható számok.

3. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető.

Euklideszi algoritmust futtatunk: $21n + 4 = (14n + 3) + 7n + 1$; $14n + 3 = 2 * (7n + 1) + 1$, amiből kiolvasható, hogy a legnagyobb közös osztó n -től függetlenül az 1, vagyis a tört nem egyszerűsíthető.

4. Melyik az a legkisebb 3-mal osztható szám, melynek 15 osztója van?

Prímtényező felbontásból kiindulva, egy számnak összesen $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ osztója van. Ez úgy lehet 15, hogy az egyik kitevő (az egyik α) 14, vagy pedig az egyik 2, a másik 4. Ezen hárommal osztható számok közül a legkisebb a $2^4 \cdot 3^2 = 144$.

5. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, és a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A cellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség mindegyike végigvonul a börtönön, és mindegyik átfordít néhány zárat, mégpedig úgy, hogy a k . feleség minden k . záron pontosan egyet fordít. Miután mind a 100 feleség végigment, a nyitott ajtajú cellákban lévő rabok kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések? Minden osztó egy fordítást jelent, tehát azon számokat keressük, amelyeknek páratlan sok osztója van, ezt pedig pontosan a négyzetszámok tudják, hiszen minden osztónak van egy „osztó párja”, amivel szorozva megkapjuk a számot. Viszont négyzetszámok esetén egy számnak önmaga a párja, viszont belőle valójában nincs 2.
- b) A sah következő születésnapján a feleségek rosszkednek, és így most a k . feleség minden k . záron pontosan k -t fordít. Ebben az évben mely cellában lakó rabok szabadulnak ki?
- Az a) feladat érvelése annyival módosul, hogy a páros számok nem módosítanak (páros sok fordítás nem változtat az állapoton). Vagyis, az olyan cellák fognak páratlan sokszor átfordulni, amik egy $\langle \text{páratlan négyzetszám} \rangle \cdot \langle \text{szorozva} \rangle \cdot \langle 2 \rangle$ alakúak.

6. Melyek azok a p prímszámok, melyekre

a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím?

$p = 3$ kielégíti a feltételeket. Egy tetszőleges (másik) prím 3-mal osztva vagy 1-et, vagy 2-t ad maradékkal. 1 maradék esetén $p + 14$ hárommal osztható lesz, 2 maradék esetén pedig $p + 10$ lesz 3-mal osztható. Tehát nincs több ilyen p a 3-mon túl.

b) $p^2 + 2$ is prím?

$p = 3$ megint jó, és teljesen hasonlóan nézzük p -t a 3-mal vett osztási maradéka alapján. Annak négyzete 3-mal osztva viszont mindkét esetben 1-et maradékkal. Ahhoz 2-t adva pedig 3-mal osztható számot kapunk. Tehát megint csak nincs több ilyen p prím.

c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?

Az előző megoldásmenet annyiban módosul, hogy az 5-tel vett osztási maradékot nézzük. $p = 5$ kivételével (ami jó megoldás) az összes többi esetben vagy $p^2 + 4$, vagy $p^2 + 6$ lesz 5-tel osztható.

7. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?

Ha ugyanaz a maradék, akkor a két szám különbségét osztja az adott háromjegyű szám, vagyis osztja 1024-et. Emiatt az csak a 128, a 256, vagy az 512 lehet. Mindhárom esetben a maradék 87.

8. Hány olyan háromjegyű szám van, mely osztóinak száma osztható 11-gyel?

A prímtényezős felbontásból kiindulva ez azt jelentené, hogy az egyik prím kitevője legalább 10 (10, vagy 21, vagy 32, stb.). Ez viszont már önmagában legalább 1024, ami 4-jegyű, tehát nincs ilyen háromjegyű szám.

9. Egy n pozitív egész számról tudjuk, hogy osztóinak száma p , ahol p prímszám. Állapítsuk meg, hogy az ezen p darab osztóból alkotható összes számpár közül hány lesz relatív prím.

Megint a prímtényezős felbontásból kiindulva, azt kapjuk, hogy annak elekje egy adott prím, prím-mínusz-egyediken. Ezen osztói a (hatvány alap) prím megfelelő hatványai, amelyek csak akkor relatív prímelek egymáshoz, ha az egyikük az 1 (prím a nulaldikon). Ilyen párból pedig van (hatvány kitevő) prím-mínusz-kettő.

10. Legyenek n és k pozitív egészek, melyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n+1)! + k$ számoknak?

A legnagyobb közös osztó osztja $n! + k$ -t, így $(n+1)(n! + k)$ -t, azaz $(n+1)! + (n+1)k$ -t is. Továbbá kivonva ebből $(n+1)! + k$ -t kapjuk, hogy osztja nk -t is. nk viszont osztja $n!$ -t, így $n!$ -t és $(n! + k)$ -ből kivonva k -t is osztja. Viszont k osztja mindkét összeget, tehát k az lko.

11. Bizonyítsd be, hogyha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

Indirekten tegyük fel, hogy $n = a \cdot b$, ahol a és b 1-től különböző pozitív egész. Ekkor: $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1) \cdot (2^{a(b-1)} + \dots + 2^a + 1)$, ami két egytől különböző tényező, tehát $2^n - 1$ sem prím.

12. Mely természetes számoknak van olyan többszöröse, melynek tízes számrendszerbeli alakja csak a 0 és 1 számjegyeket tartalmazza?

Az összesnek. 0-ra az állítás nyilván igaz. Vegyünk egy tetszőleges pozitív természetes számot. Veszem sorrendben az 1, 11, 111... számokat, és nézem az adott számmal vett osztási maradékot ezen számoknak. Mivel végtelen sok számnak nézem az osztási maradékát, ami véges sok érték lehet, így lesz kettő szám a csupa 1-esek közül, aminek megegyezik az adott számmal vett osztási maradéka. Ezt a két számot kivonva egymásból 11...100...0 alakú számot kapok, amit osztani fog az adott szám.

• Házi feladat

1. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{45n+12}{18n+5}$ tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető.
2. Van olyan p prímszám, amire $p^4 + 4$ is prím?