

9. gyakorlat

- (Múlt gyakorlatról.) Legyenek n és k pozitív egészek, melyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számoknak?
- Legyen $k > 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ az $a_1, a_2, \dots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ pedig a legkisebb közös többszörösét. Bizonyítsuk be, hogy $(a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \dots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$ egyenlőség pontosan akkor áll fent minden pozitív egészekből álló szám k -asra, ha $k = 2$.
- Legyen n olyan páratlan egész szám, amelyik egyetlen prím négyzetével sem osztható. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész.
- Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra igazak a következők:
 - $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel.
 - $n^7 - n$ osztható 42-vel.
 - ha n nem osztható 17-tel, akkor $n^8 + 1$ vagy $n^8 - 1$ osztható 17-tel.
- Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat:
 - $202x \equiv 157 \pmod{203}$
 - $9x \equiv 24 \pmod{96}$
 - $8x \equiv 3 \pmod{21}$
 - $23x \equiv 11 \pmod{5}$
 - $104x \equiv 74 \pmod{60}$
 - $555x \equiv 5555 \pmod{55555}$
 - $1996^{659} \equiv x \pmod{99}$
 - $5^{2002} \equiv x \pmod{17}$
 - $99! \equiv x \pmod{101}$
 - $65^{63^{61}} \equiv x \pmod{66}$
- Mi az utolsó két számjegye (tízes számrendszerben) az alábbi számoknak?
 - $1997^{2001^{2005}}$
 - $99! + 1$
 - $51^{49^{48}}$
 - $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$
- Lássuk be, hogy tetszőleges p prímre és a, b egészekre $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$
- (ZH, 2002) Bizonyítsd be: $17 \mid 2002^{2002} + 1$.
- Keressük meg az alábbi egyenletek megoldásait az egész számok körében!
 - $71x - 41y = 1$
 - $13x + 58y = 41$
- Oldjuk meg a következő kongruenciarendszert: $2x \equiv 5 \pmod{7}$ és $3x \equiv 4 \pmod{8}$!
- Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Tudja, hogy legfeljebb 250 lába van. Ha 11-esével számolja őket, akkor 5 marad ki, ha 15-ösével, akkor 3. Hánylábú a százlábú?
 - Egy másik százlábú is megirigyelte a módszert. Neki 12-esével számolva 4 marad, 15-ösével pedig 8. Bizonyítsuk be, hogy elszámolta magát!
 - A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?
- LVIII. Leó igencsak elbizakodott uralkodó volt: csak 5 és 8 talléros érméket veretett. Ha valaki történetesen 7 tallért akart fizetni, az kénytelen volt például úgy intézni, hogy 3-szor 5 tallért fizetett, majd 8 tallért visszakapott.
 - Milyen módokon lehetett 99 tallért kifizetni ebben a birodalomban?
 - Milyen összegeket lehetett kifizetni ebben a birodalomban?
 - Milyen összegeket lehet kifizetni egy hasonlóan egoista kései utód, LXIX. Leó uralkodása alatt?
- (ZH, 2001) Bizonyítsd be: ha $p > 5$ prím, akkor az 1, 11, 111, ... számok között végtelen sok többszöröse van!

• Házi feladat

- Mi az utolsó három számjegye a $999^{777^{888}}$ számnak?
- Milyen maradékot ad 59^{99} 101-gyel oszva?