

10. gyakorlat

1. Tegyük fel, hogy p prím, n pedig egy természetes szám, melyre $p \mid 10n - 1$. Bizonyítsd be, hogy $10^{p-2} \equiv n \pmod{p}$.
2. Mi az utolsó két számjegye (tízest számrendszerben) az alábbi számoknak?
 a) $1997^{2001^{2005}}$ c) $51^{49^{48}}$
 b) $99! + 1$ d) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$
3. (ZH, 2002) Bizonyítsd be: $17 \mid 2002^{2002} + 1$.

Emlékeztető: minden algebrai struktúra alapvető tulajdonsága a zártság – félcsoport: asszociatív csoport: asszociatív+invertálható – Abel-csoport: asszociatív+invertálható+kommutatív

4. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot, illetve Abel-csoportot alkotnak-e:
 a) páros számok halmaza az összeadás művelettel
 b) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet az unió
 c) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet a szimmetrikus differencia (jele: Δ , $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$)
 d) az egész számok halmaza, a művelet az $a * b := a + b + 1$ képlettel adott $*$ művelet.
 e) a -1 -től különböző valós számok halmazán, az $a * b := ab + a + b$ képlettel adott $*$ művelet.
5. Adjuk meg az alábbi csoportok Cayley-tábláját: a) modulo 3 maradékosztályok a modulo 3 összeadásra nézve
 b) modulo 8 redukált maradékosztályok a modulo 8 szorzásra nézve
6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G csoport tetszőleges a és b elemeire $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ teljesül.
7. Egy G csoportban minden elem négyzete az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy G Abel-csoport.
8. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkotnak-e:
 a) az összes komplex n -edik egységgyök, a művelet a szorzás
 b) a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ számok, a művelet a modulo n összeadás
 c) a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ számok, a művelet a modulo n szorzás
 d) az $\{1, 2, \dots, n-1\}$ számok, a művelet a modulo n szorzás
 e) a $\{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz, a $*$ művelet pedig a következő: $x * y = \text{tik}$, ha $x = y$, illetve $x * y = \text{tak}$, ha $x \neq y$
9. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsuk, hogy eredményül G egy olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga.
10. Az alábbi következtetések közül melyek teljesülnek minden csoportban?
 a) $ax = ay \Rightarrow x = y$ b) $xa = ya \Rightarrow x = y$ c) $xa = ay \Rightarrow x = y$
 d) $abx = aby \Rightarrow x = y$ e) $axb = ayb \Rightarrow x = y$ f) $bxa = ayb \Rightarrow x = y$
 g) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$ h) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$ i) $abx = 1 \Rightarrow x = b^{-1}a^{-1}$

• Házi feladat

1. Igazold, hogy $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ minden p prím esetén Abel-csoport.
2. Milyen algebrai struktúrát ad az $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ számhalmazon a szorzás művelet?