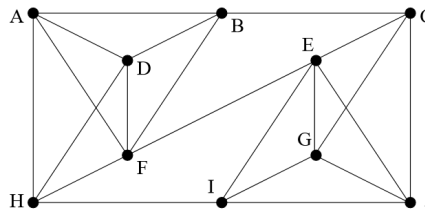


11. gyakorlat

- Adjuk meg az alábbi csoportok Cayley-tábláját:
 - modulo 3 maradékosztályok a modulo 3 összeadásra nézve
 - modulo 8 redukált maradékosztályok a modulo 8 szorzásra nézve
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G csoport tetszőleges a és b elemeire $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ teljesül.
- Döntsd el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkotnak-e:
 - az összes komplex n -edik egységgyök, a művelet a szorzás
 - a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ számok, a művelet a modulo n összeadás
 - a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ számok, a művelet a modulo n szorzás
 - az $\{1, 2, \dots, n-1\}$ számok, a művelet a modulo n szorzás
 - a $\{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz, a $*$ művelet pedig a következő: $x * y = \text{tik}$, ha $x = y$, illetve $x * y = \text{tak}$, ha $x \neq y$
- A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsuk, hogy eredményül G egy olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga.
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges csoportban, az $ax = b$ egyenletnek tetszőleges a, b elemekhez létezik x megoldása.
- Legyen $n \geq 4$, H az n hosszú 0-1 sorozatok halmaza, H_2 a páros sok 1-et tartalmazó, H_3 a hárommal osztható számú egyest tartalmazó H -beli elemek halmaza. Legyen H -n a művelet az elemenkénti mod 2 összeadás (kizáró vagy). Csoport-e H_2 , illetve H_3 erre a műveletre?
- Az alábbi következtetések közül melyek teljesülnek minden csoportban?

a) $ax = ay \Rightarrow x = y$	b) $xa = ya \Rightarrow x = y$	c) $xa = ay \Rightarrow x = y$
d) $abx = aby \Rightarrow x = y$	e) $axb = ayb \Rightarrow x = y$	f) $bx a = ay b \Rightarrow x = y$
g) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$	h) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$	i) $abx = 1 \Rightarrow x = b^{-1}a^{-1}$

- Igaz-e, hogy az alábbi gráf
 - 4-szeresen élösszefüggő;
 - 4-szeresen pontösszefüggő?



- Egy G irányítatlan gráf esetén jelölje $3G$ azt a gráfot, amelyet G -ből kapunk úgy, hogy mindegyik élt helyettesítjük három párhuzamos éllal. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!
 - Ha G összefüggő, akkor $3G$ 3-szorosan élösszefüggő gráf.
 - Ha G összefüggő, legalább 4 csúcsú gráf, akkor $3G$ 3-szorosan pontösszefüggő gráf.
- Milyen maradékot adhat egy egész szám 142-vel osztva, ha a 83-szorosa 1 maradékot ad 142-vel osztva?
- Mennyi maradékot ad 3^{2011} -nel osztva $100^{3^{2011}}$?
- Értelmezzük a térvektorok $\mathbb{R}^3$ halmazán a $*$ művelet a következőképpen:

$$(a, b, c) * (d, e, f) = (a + d, b + e, ae + c + f)$$

Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^3$ csoportot alkot-e $*$ -ra nézve!