

12. gyakorlat

1. Legyen egy csoport elemei a, b és c elemei az e egységelemtől különbözőek, továbbá $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Lássuk be, hogy G -nek legalább 100 eleme van.
2. Tartalmaz-e az S_5 szimmetrikus csoport a 7 elemű ciklikus csoporttal izomorf részcsoportot?
3. Legyenek H és K egy G csoport olyan részcsoportjai, hogy $(|H|, |K|) = 1$ (vagyis a H és K részcsoport rendjének legangyobb közös osztója 1). Mutassuk meg, hogy ekkor $H \cap K = \{e\}$, ahol e a G csoport egységeleme.
4. Legyen $G = \{1, 5, 7, 11\}$, a művelet pedig a mod 12 szorzás. Csoport-e G ? Ciklikus-e G ?
5. Legyen G egy 2001 rendű csoport és g egy 23-adrendű eleme. Határozzuk meg g^2 rendjét!
6. Igazoljuk, hogyha G 100-adrendű csoport és $g^{20} \neq e \neq g^{50}$ valamely $g \in G$ -re, akkor G Abel-csoport.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje 55, akkor minden g elemére teljesül, hogy a g és a g^8 elemek rendje azonos.
8. Írjuk fel C_{10} (10 rendű ciklikus csoport) C_2 szerinti mellékosztályait!
9. Írjuk fel a D_n , diédecsoport szorzási szabályát!
10. Tegyük fel, hogy egy G csoportnak H egy részcsoportja, A pedig egy részhalmaza. Döntsük el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy biztosan igaz, biztosan hamis, vagy lehet igaz és hamis is!
(1) $|gA| = |A|$, (2) $hH = H$, (3) $ghH = gH$, (4) $hgH = gH$
11. Igazoljuk, hogy egy csoport két tetszőleges részcsoportjának a metszete is részcsoport.
12. Igazoljuk, hogy egy csoport nem állhat elő mint két valódi részcsoportjának uniója!
13. Mik a részcsoportjai az n rendű ciklikus csoportnak? Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus!

• Házi feladat

1. Hány részcsoportja van a 15 rendű ciklikus csoportnak?
2. Van-e olyan 20-elemű csoport, melynek (a) van 5-örendű eleme, de nincs 20-adrendű eleme, ill. (b) van 20-adrendű eleme, de nincs 5-örendű eleme?