

14. gyakorlat

- Gyűrűt, testet vagy ferdetestet alkotnak-e az alábbi halmazok? Ha más nincs feltüntetve, akkor a két művelet a szokásos összeadás és szorzás.
 - $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, ab = 0\}$
 - $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ páros}\}$
 - $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \text{ páros}\}$
 - a pozitív valós számok halmaza, a két művelet $a \oplus b = a \cdot b$ és $a \odot b = a^{\lg b}$
 - a 4×4 -es mátrixok
 - a 4×4 -es mátrixok, melyek determinánsa nem nulla, valamint a 4×4 -es nulla mátrix
 - az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $a, b \in \mathbb{R}$
 - egy X halmaz összes részhalmazának halmaza, a két művelet $\oplus = \bigcup$ és $\odot = \bigcap$
 - egy X halmaz összes részhalmazának halmaza, a két művelet $\oplus = \Delta$ (szimm. differencia) és $\odot = \bigcap$
- Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges a, b elemekre
 - $0 \cdot a = 0$,
 - $(-a)b = -(ab)$
- Tegyük fel, hogy R gyűrű, és $\langle R, \cdot \rangle$ csoport. Bizonyítsuk be, hogy R egyelemű.
- Mik $\mathbb{Z}_m$ nullosztói?
- Tetszőleges testben vezessük be az $\frac{a}{b}$ jelölést az $a \cdot b^{-1}$ szorzat helyett. Bizonyítsuk az alábbi állításokat:
 - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
 - $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- Bizonyítsuk be, hogy egy testben minden elemnek legfeljebb 2 négyzetgyöke lehet, azaz $x^2 = a$ egyenletnek legfeljebb két megoldása lehet, tetszőleges a testelemre.
- Bizonyítsuk be, hogy $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ test, és egyúttal 2-dimenziós vektortér a $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ test felett.
- Egy lakattal zárható ládában szeretnénk titkos üzenetet küldeni ismerősünknek. Nem bízunk azonban meg a postásban, hogy nem nyitja ki a ládát. Mindkettőnknek van lakatunk, megfelelő kulcsokkal, azonban semmikünk sem rendelkezik a másik lakatjának kulcsával. Hogyan oldható meg a biztonságos üzenetküldés?
- Egy 6 fős kalózbanda zsákmányolt 100 aranyat, és szeretnék elosztani egymás közt. A szabályok a következők: mindig a legmagasabb rangú kalóz tesz egy ajánlatot, melyet szavazásra bocsát. Ha az ajánlatot a kalázok legalább fele megszavazza, akkor elfogadják azt, különben megölik az ajánlattevőt, és a rangban következő tesz javaslatot. Az ajánlattevő is szavaz. A szavazáskor a kalózoknak három szempontjuk van, melyek prioritási sorrendben a következők: szeretnének életben maradni; szeretnének minél több aranyra szert tenni; vérszomjasak, azaz ha az első két szempont alapján mindegy, hogy hogyan szavaznak, akkor leszavazzák a javaslatot. Mi fog történni?
Mi történik általában, n kalóz esetén (100 arany mellett)?