

BME Matek Gólyaverseny 2015.
Második feladatsor

Leadás: 2015. október 5. 12:15-ig
Részletek: math.bme.hu/~jozsama
Kérdések: solteszd@math.bme.hu

1. Mekkora maradékot ad n -nel osztva $1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k$, ha $k > 0$ páratlan?
2. Legyen A azon valós számok halmaza amelyek előállnak egész együtthatós polinomok gyökeként. Bizonyítsuk be, hogy $|A| = |\mathbb{N}|$!
3. Adott a síkban n páronként nem-párhuzamos egyenes úgy, hogy bármely metszésponton legalább három egyenes is átmegy. Bizonyítsuk be, hogy az összes egyenes egyetlen ponton megy keresztül!
4. Egy körvonalon elhelyezünk n pontot, és mindegyiket mindegyikkel egy szakasz által összekötjük. Legalább és legfeljebb hány részre osztják ezek a szakaszok a körlapot?
5. Bizonyítsuk be, hogy (a szokásos topológiában) $\mathbb{R}$ valódi (nem $\mathbb{R}$ és nem üres) részhalmaza nem lehet egyszerre nyílt és zárt!
6. Adott egy gráf aminek csúcsain valós súlyok vannak (minden csúcsra egy valós szám van írva). Egy lépésben két éllel összekötött csúcspár súlyait kicserélhetjük a két súly átlagára. Azt szeretnénk elérni, hogy minden csúcsnak ugyanakkora legyen a súlya.
 - Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf minden súlyozására minden $0 < \varepsilon$ esetén véges sok lépéssel elérhető, hogy bármely két csúcsra írt szám különbsége legfeljebb ε legyen!

Egy gráfot akkor nevezünk jónak, hogy ha véges sok lépéssel elérhető az is, hogy minden csúcsnak ugyanakkora legyen a súlya.

- Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú út nem jó! (n pont van sorban és mindegyik csak az előtte és az utána következővel van összekötve)
- Bizonyítsuk be, hogy az n ágú csillag nem jó! ($n+1$ pont van, és mindegyik csak az elsővel van összekötve)
- Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan gráf aminél a csúcsok száma nem kettő hatvány, nem jó!
- Mutassunk végtelen sok jó gráfot!