

BME Matek Gólyaverseny 2015.
Harmadik feladatsor

Leadás: 2015. október 19. 12:15-ig
Részletek: math.bme.hu/~jozsama
Kérdések: solteszd@math.bme.hu

1. Bizonyítsuk be, hogy egy egész együtthatós polinomnak nem lehet egész gyöke, hogy ha $p(1)$ is és $p(0)$ is páros!
2. Keeessük meg az összes olyan valós együtthatós polinomot amire

$$p(x)p(2x^2 - 1) = p(x^2)p(2x - 1)$$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha n} (\sqrt{n^{2\alpha} + 1} - n^\alpha)^n = 0$$

4. Legyen f egy a síkon értelmezett valós szám értékű függvény amire tudjuk, hogy minden téglalap csúcsaira $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$, következik-e ebből, hogy $f(x)$ minden x -re nulla? Következik-e akkor is hogy ha csak minden négyzet csúcsaira tudjuk ezt?
5. Egy $n \times n$ -es sakktábla négy sarkát eltávolítottuk. Milyen n esetén fedhető le a maradék, L alakú dominókkal? (4 mezőt foglal el egy ilyen dominó és a dominókat lehet forgatni és tükrözni is)
6. Vannak tojásaink, amik olyanok, hogy van egy kritikus magasság, ha annál magasabbról dobom le eltörnek, de ha alacsonyabbról, akkor egyáltalán nem sérül. Adott egy végtelen magas épület, van t tojásunk és d dobási lehetőségünk de nem tudjuk, hogy pontosan milyen magasról törnek a tojások. Jelölje $f(t, d)$ azt a magasságot, amire igaz az, hogy ha valaki elárulja, hogy a tojások $f(t, d)$ magasságban már biztosan eltörnek, akkor van is olyan stratégiánk t tojással és d dobással, hogy biztosan meg tudjuk határozni, hogy pontosan melyik két emelet között kezdenek el eltörni a tojások. Bizonyítsuk be, hogy ha $t \leq d$ akkor

$$f(t, d) = 2 \sum_{k=0}^{t-1} \binom{d-1}{k} + \binom{d-1}{t} - 1$$

és adjuk is meg a stratégiát amivel a tojásokat érdemes dobálni!