

```
ClearAll["Global`*"]
```

# Hálózatanalízis

## frekvenciatartományban

### *Bevezetés*

A dolgozatban elsősorban folytonos idejű hálózatok frekvenciatartománybeli analízisével foglalkozik, az átviteli függvények lehetséges ábrázolásaival, valamint folytonos idejű hálózatok diszkrét idejű szimulálásával.

### *Függvények ismertetése*

#### *Külső csomagok*

Most egy *Mathematica*-hoz telepíthető külső csomag `TechPackages`AnalogCircuits`` segítségével ábrázolunk hálózatokat. A programcsomagban az egyes komponensek rajza a *Mathematica* beépített grafikai primitívjeivel van elkészítve, és ezek egy mátrixba vannak foglalva.

```
<< TechPackages`AnalogCircuits`
```

Az elemek nevének a beviteléhez palettát nyit. Fő utasítása **MakeDiagram**. A hálózati elemeket a kívánt elhelyezkedésnek megfelelően kell egy mátrixba bevinni. majd a **MakeDiagram** utasítással kirajzoltathatók.

```
<< TechPackages`DiscreteCircuits`
```

Ez előző mintájára készült saját csomag. Diszkrét idejű hálózatok komponenseinek primitívjét tartalmazza, így lehetővé teszi diszkrét idejű hálózat ábrázolását *Mathematica*-ban. Kirajzó utasítása **MakeDiscreteDiagramm**.

## Saját függvények

A függvények a Bode- illetve Nyquist-diagrammok, valamint a Pólus-zérus elrendezés ábrázolásához készültek. Most csak a paraméterezésüket mutatjuk be röviden, jelentésük tárgyalására később térünk rá.

Az első két függvény sajátossága, hogy a többi függvény használja őket.

A függvények működéséhez a LogLinearPlot utasítás miatt szükség van az alább *Mathematica* csomagra.

```
<< Graphics`Graphics`
```

### Poles

```
Poles[W_, s_] :=  
  Last /@ Flatten[NSolve[Denominator[W // Together] == 0, s]];
```

Ez a függvény a bemeneten kapott átviteli függvény, vagy karakterisztika nevezőiknek zérushelyeit tartalmazó listával tér vissza. Numerikus értéket ad vissza, ezért numerikusan kifejezett W függvényt vár első argumentumként. A második argumentum a változó. Ez többnyire  $s$ ,  $z$ ,  $j\omega$ .

### Zeros

```
Zeros[W_, s_] :=  
  Last /@ Flatten[NSolve[Numerator[W // Together] == 0, s]];
```

Mint az előző, de ez a számláló zérushelyeit keresi meg.

### BodePlot

```
FreqPlotRange[f_, x_] :=  
  Module[{rangelist = Map[Abs[#] &, Select[Chop /@  
    Flatten[{Poles[f, x], Zeros[f, x]}], Re[#] != 0 || Im[#] != 0 &]]},  
  If[rangelist == {}, {2  $\pi$ -2, 2  $\pi$  10}, {2  $\pi$ -2 Floor[Min[rangelist]],  
    2  $\pi$  * Ceiling[Max[rangelist]]}]
```

```

BodePlot[W_, s_, range_Rule, type_Symbol, opts___?OptionQ] :=
Block[{ $\omega$ , dom, k = (#1 &), v = (20 Log[10, #1] &), p = (10 Log[10, #1] &),
  scalestyle = {Dashing[ {.005, .0075} ], GrayLevel[.5]},
  globalopts = {DisplayFunction → Identity, GridLines →
    {{Automatic, scalestyle}, {Automatic, scalestyle}}}},
If[(FreqRange /. {range}) == Automatic,
  Print[FreqPlotRange[W, s]];
  dom = Insert[FreqPlotRange[W, s],  $\omega$ , 1],
  dom = Insert[FreqRange /. {range},  $\omega$ , 1]];
ampplot = LogLinearPlot[Evaluate[type[Abs[W /. s →  $i\omega$ ]]],
  dom, Evaluate[FilterOptions[Plot, globalopts]],
  Evaluate[FilterOptions[Plot, opts]],
  AxesLabel → {" $\omega$ ", If[type == k, "PU", "dB"]}],
phaseplot = LogLinearPlot[Evaluate[180 Arg[W /. s →  $i\omega$ ] /  $\pi$ ], dom,
  Evaluate[FilterOptions[Plot, globalopts]], PlotRange → All,
  Evaluate[FilterOptions[Plot, opts]], AxesLabel → {" $\omega$ ", " $\phi$ "},
Show[GraphicsArray[{{ampplot}, {phaseplot}},
  DisplayFunction → $DisplayFunction], Frame → True,
  PlotLabel → "Bode - diagramm\nAmplitúdó & Fázis"];]

```

Bode diagrammot rajzol. Bemenő paraméteri az átviteli függvény, a függvényben szereplő frekvencia változó. Ezután az ábrázolni kívánt frekvencia intervallumot kell megadni. Lehetséges opció a `Freqrange → Automaticis`, ilyenkor a pólus és zérushelyek figyelembevétel, automatikusan határozza meg az ábrázolás szempontjából kedvező intervallumot. A következő paraméter az amplitúdó diagrammra vonatkozik. Meghatározható vele, hogy arányt szeretnénk ábrázolni - ezt a  $k$ -val tehetjük - illetve dB-t. Ez utóbbi további két lehetőséget rejt:  $v$  a jó paraméter, ha feszültséget ábrázolunk,  $p$  pedig, ha teljesítményt. A következő paraméter(ek) a megjelenítésre vonatkozó utasítások lehetnek, megegyeznek a `Plot` parancs lehetőségével.

## NyquistPlot

```

NyquistPlot[W_, s_, type_Symbol, opts___?OptionQ] :=
Module[{nyp,  $\omega$ , freqrange},
  freqrange = 1000  $\pi$ ;
  nyp = ParametricPlot[{Re[W /. s →  $i\omega$ ], Im[W /. s →  $i\omega$ ]},
    { $\omega$ , If[TrueQ[type == p], 0, -freqrange], freqrange}, Evaluate[
    FilterOptions[ParametricPlot, opts]], AxesLabel → {"Re", "Im"},
    DisplayFunction → Identity, PlotDivision → 50 freqrange];
  Show[GraphicsArray[{nyp}, DisplayFunction → $DisplayFunction],
    Frame → True, PlotLabel → "Nyquist - diagramm"];]

```

Nyquist diagrammot rajzol. Első két bemenő paramétere megegyezik a `BodePlot` parancsával. A harmadik paraméter az ábrázolás negatív frekvenciákra való kiterjesztését tiltja, vagy engedélyezi. Ezt követően további megjelenítésre vonatkozó utasítások adhatók meg. Lásd `Plot` utasítás. Fontos,

hogy a második paraméter a frekvencia szerinti változó legyen, annak ellenére, hogy a Nyquist-diagramm másra is használható. Lásd később a Nyquist-diagramm bemutatásánál.

## PoleZeroPlot

```
Options[PoleZeroPlot] = TextStyle →
  {FontFamily → "Helvetica", FontWeight → "Bold", FontSize → 12};

PoleZeroPlot[W_, s_, opts___?OptionQ] :=
  Show[Graphics[pzplace[{Re[#], Im[#]} & /@ Poles[W, s],
    {Re[#], Im[#]} & /@ Zeros[W, s]]], opts, Axes → True,
  AxesLabel → {"Re", "Im"}, AspectRatio → Automatic];
pzplace[poles_, zeros_] :=
  Append[#, First[Options[PoleZeroPlot]]] & /@ Flatten[
    {Text["o", #, {0, 0}] & /@ zeros, Text["x", #, {0, 0}] & /@ poles}];
```

Pólus-zérus elrendezés ábrázolására szolgáló parancs. Első két bemenő paramétere megegyezik a **BodePlot** parancsével. A harmadik paraméterek a megjelenítésre vonatkozó opciók lehetnek.

## Frekvenciafüggés bemutatása

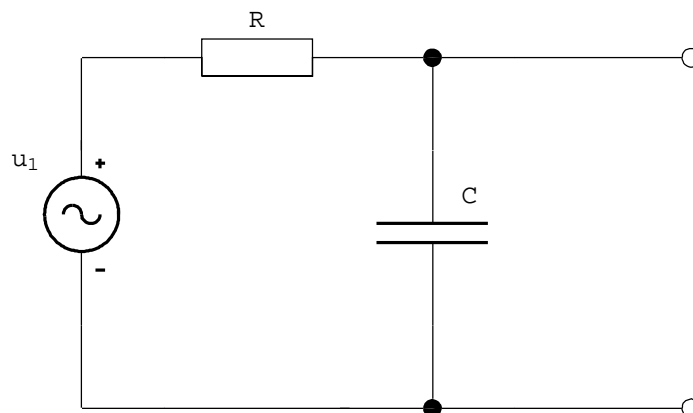
Tekintsük a következő egyszerű hálózatot, az integráló tagot.

```
ClearAll[layout1];
```

```
layout1 =
```

CornerUpperLeft	ResistorHorizontal[R]	NodeTDown	OutputHoriz
ACSourceVertical[u <sub>1</sub> ]	EmptyField	CapacitorVertical[C]	
CornerLowerLeft	WireHorizontal	NodeTUp	OutputHoriz

```
MakeDiagram[layout1]
```



- GraphicsArray -

A hálózatban két diszkrét komponens van, egy ellenállás és egy kondenzátor. A kondenzátor frekvenciafüggő alkotóelem, mert reaktanciája függ a frekvenciától.  $X_c = \frac{1}{j\omega C}$ . A két kapocs közötti feszültség meghatározás a cél.

```
ClearAll[adatok];
```

```
adatok = {CC -> 4.7, R -> 39};
```

Az adatok valós alkatrészek adatai, a koherens egységrendszer  $\mu\text{F}$  és  $\Omega$ . A hálózat egy aluláteresztő karakterisztikájú szűrő. Méretezése folytán a határfrekvencia  $\approx 880$  Hz, vagyis 1 oktávval magasabb a normál zenei A hangtól.

### ■ Hálózati egyenletek

A hálózati egyenleteket frekvenciatartományba írjuk fel feszültségosztás módszerével.  $u_2$  a kimeneten megjelenő feszültséget jelenti.

```
ClearAll[u1, u2];
u2 = Solve[(u2 - u1) / R + u2 / (1 / jω CC) == 0, u2][[1, 1, 2]]
```

$$\frac{CC \ u1}{CC + j\omega R}$$

Az átviteli karakterisztika a kimenet és bemenet hányadosa adja meg. Az adatokat behelyettesítve megkapjuk a hálózat átviteli karakterisztikáját.

```
ClearAll[W];
W = u2 / u1 /. adatok
```

$$\frac{4.7}{4.7 + 39 j\omega}$$

Az átviteli karakterisztika egy függvény, aminek  $j\omega$  a változója, ahol  $j$  a komplex egység ( $i$ ),  $\omega$  a hálózatra kapcsolt jel körfrekvenciája.

$$H(j\omega) = K \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\text{Arg}H(j\omega)}$$

A képletben  $K$  a frekvenciától független rész.

### Az átviteli karakterisztika ábrázolása

Ábrázolására két főbb eljárás terjedt el. Mindkettőt a Bell Laboratories-nál tevékenykedő tudósok dolgozták ki.

### ■ Bode - diagram

Az átviteli karakterisztika Bode-diagramja valójában két diagramm. Az egyik a decibelben kifejezett logaritmikus *amplitúdó karakterisztika*, másik a fokban kifejezett *fázis karakterisztika*. A diagramm  $x$  – tengelyének a beosztása logaritmikus léptéket követ. Az  $y$  – tengelyre fejezhető ki arányt (átviteli tényező), de átírható decibelre is  $\text{dB} = 20 \text{Log}_{10} |W(j\omega)|$ .

$$|H|_{\text{dB}} = H_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

A logaritmikus lépték előnye, hogy sokkal nagyobb függő és független változó tartomány lefedése lehetséges, ugyanakkora relatív hibával.

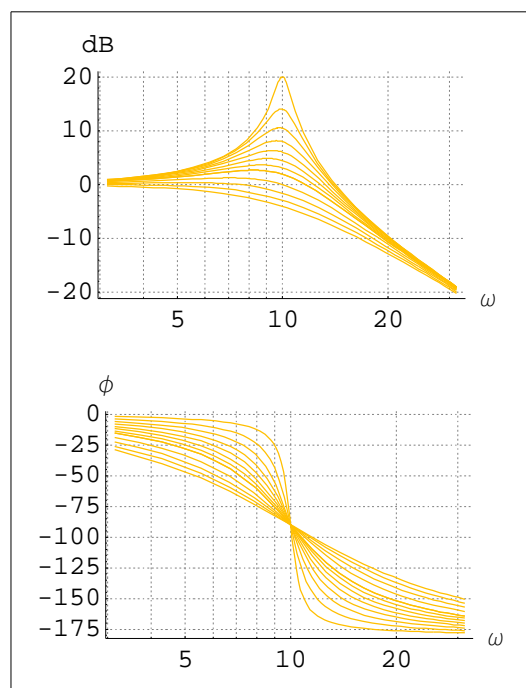
```
ClearAll[bodeexample];
bodeexample = 1 / ((s / ω)2 + 2 (ξ / ω) s + 1) /. ω → 10
```

$$\frac{1}{1 + \frac{s^2}{100} + \frac{s \xi}{5}}$$

A példában  $\xi$  különböző értékeire mutatjuk be a Bode-diagramot.  $\xi \in \{0.05, 0.8\}$

```
BodePlot[Join[Table[bodeexample, {ξ, .05, .4, 0.05}],
  Table[bodeexample, {ξ, .4, .8, 0.1}]], s,
  FreqRange → {π, 10 π}, v, PlotStyle → {Hue[.125]}]
```

Bode - diagramm  
Amplitúdó & Fázis

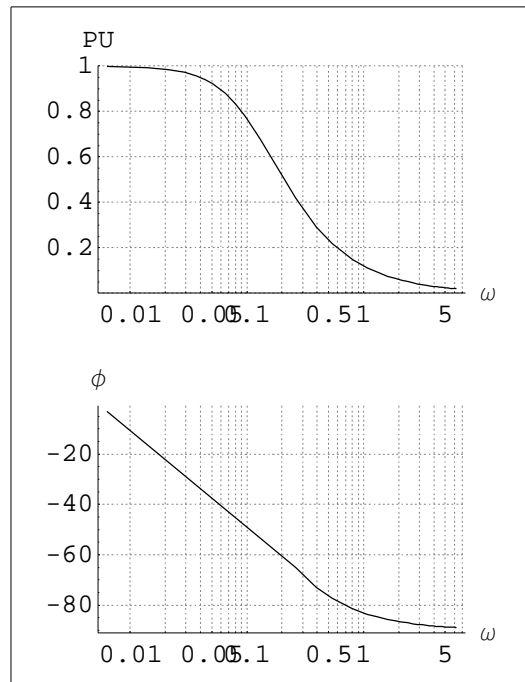


A példában szereplő hálózat átviteli karakterisztikáját ábrázolja.

A hálózat elsőrendű, frekvencia és fázismenete egyenessel közelíthető.

```
BodePlot[W /. adatok, j $\omega$ , FreqRange  $\rightarrow$  {0.002  $\pi$ , 2  $\pi$ },
k, PlotRange  $\rightarrow$  {Automatic, {0, 1}}]
```

Bode - diagramm  
Amplitúdó & Fázis



### ■ Nyquist - diagramm

A komplex síkon szemlélteti a  $W(j\omega)$  függvényt, a  $H(j\omega)$  végpontja által befutott utat szemlélteti a komplex számsíkon, miközben  $\omega$  változik 0 vagy  $-\infty$  és  $\infty$  között. Elsősorban stabilitási kritériumok vizsgálatára használják, kvalitatív tájékozódásra alkalmas. Értelmezett negatív frekvenciára is. A negatív frekvenciákra felvett érték a pozitív komplex konjugáltja, azaz nem jelent többlet információt.

Előnye a Bode-diagramhoz képest, hogy nem korlátozott az ábrázolható frekvenciatartomány, ráadásul az amplitúdó és a fázis közös ábrán szerepelhet.

Nyquist - diagram akkor is használatos, ha az átviteli együttható értékét nem a körfrekvencia, hanem valamely más valós paraméter (pl. R rezisztancia) függvénye.

A példában egy konstans/harmadfokú alakú átviteli karakterisztikára, pozitív  $\omega$  körfrekvenciákon mutatjuk be a Nyquist-diagramot. A diagramon jelöljük a pontok sűrűsödését a frekvencia növekedésével, valamint néhány pontnál a konkrét frekvenciaértéket is.

Látható, hogy a  $\omega_1 = -100, \omega_2 = -200, \omega_3 = -300$  pólusok feletti frekvencián a pontok nagyon sűrűn helyezkednek.

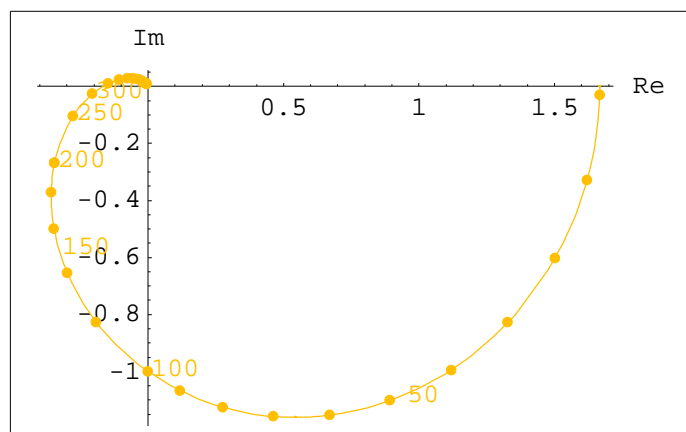


```

ClearAll[nyquistexample];
nyquistexample = 
$$\frac{10^7}{(s + 100)(s + 200)(s + 300)}$$
;
NyquistPlot[nyquistexample, s, p, PlotStyle -> {Hue[.125]},
  Epilog -> {PointSize[0.018], Hue[.125], (Point[{Re[#], Im[#]}] &) /@
    Join[Table[nyquistexample /. s -> k i, {k, 1, 100, 10}],
      Table[nyquistexample /. s -> k i, {k, 100, 200, 20}],
      Table[nyquistexample /. s -> k i, {k, 200, 1000, 50}]]],
  , (Text[#, {Re[nyquistexample /. s -> i #] + .1,
    Im[nyquistexample /. s -> i #] + .01}] &) /@
  Table[ $\omega$ , { $\omega$ , 0, 300, 50}]]]

```

Nyquist - diagramm

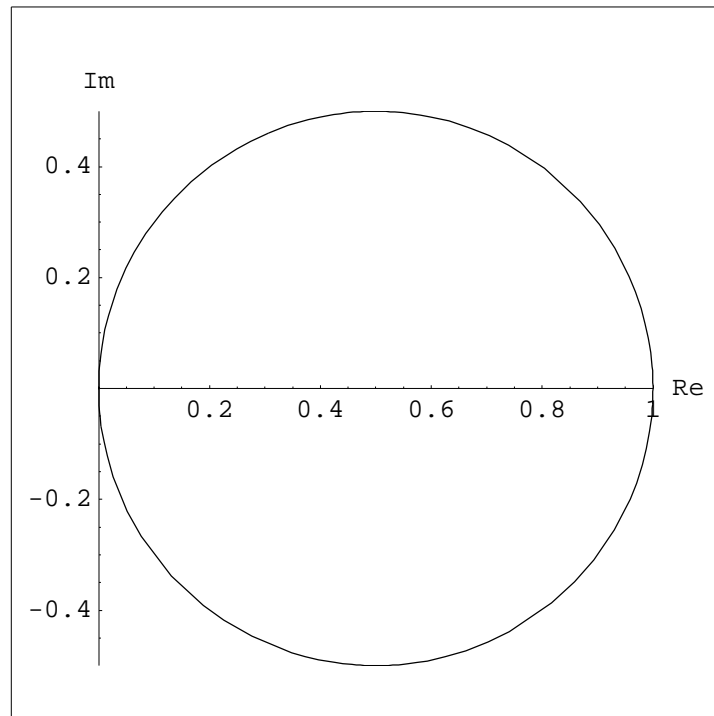


A példában szereplő hálózat átviteli karakterisztikáját Nyquist -diagrammon ábrázolva.

A hálózat elsőrendű. Ilyen hálózatok Nyquist -diagramja általában kör.

```
NyquistPlot[W /. adatok, j\omega, n,
  PlotRange -> {{0, 1}, {-0.5, 0.5}}, AspectRatio -> 1]
```

Nyquist - diagramm



## Hálózatszámítás Mathematica-val

### Időtartomány

A frekvenciatartományban végzett számítások elvégzése előtt időtartományban oldunk meg *dinamikus elemeket* tartalmazó hálózatra felírt egyenletet.

#### ■ Dinamikus elemek

A kondenzátor és tekercs tartozik ide, ezeket a továbbiakban lineáris és invariáns elemeknek tekintjük. A dinamikus elemeket állapotváltozóval jellemezzük. Állapotváltozó a tekercs árama, és a kondenzátor feszültsége.

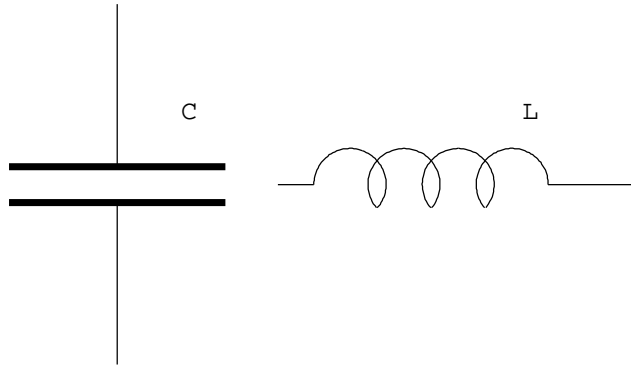
A kondenzátor olyan kétpólus, amelynek  $u_c$  feszültsége arányos a felvitt töltéssel, amely a  $i_c$  áram integrálja.

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$$

A tekercs olyan kétpólus, amelynek  $i_L$  árama arányosa tekercs  $\Phi$  mágneses fluxusával, amely a tekercs  $u_L$  feszültségének az integrálja.

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

```
MakeDiagram[{CapacitorVertical[C], InductorHorizontal[L]}]
```



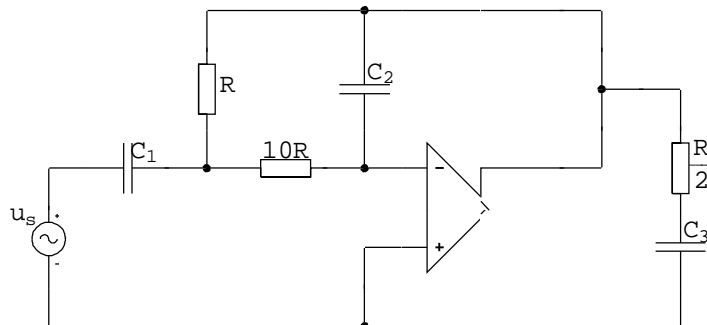
- GraphicsArray -

## ■ Hálózat

```

ClearAll[layout2];
layout2 = {(*Első sor*){EmptyField,
  EmptyField, CornerUpperLeft, WireHorizontal, NodeTDown,
  WireHorizontal, WireHorizontal, CornerUpperRight},
(*Második sor*){EmptyField, EmptyField, ResistorVertical[R],
  EmptyField, CapacitorVertical[DisplayForm[SubscriptBox[C, 2]]],
  EmptyField, EmptyField, NodeTRight, CornerUpperRight},
(*Harmadik sor*){CornerUpperLeft,
  CapacitorHorizontal[DisplayForm[SubscriptBox[C, 1]]],
  NodeTUp, ResistorHorizontal["10R"], NodeTUp, OPamp1, OPamp2,
  CornerLowerRight, ResistorVertical[DisplayForm[R / 2]]},
(*Negyedik sor*){ACSourceVertical[
  DisplayForm[SubscriptBox[u, s]]], EmptyField, EmptyField,
  EmptyField, CornerUpperLeft, OPamp3, OPamp4, EmptyField,
  CapacitorVertical[DisplayForm[SubscriptBox[C, 3]]]},
(*Ötödik sor*){CornerLowerLeft, WireHorizontal,
  WireHorizontal, WireHorizontal, NodeTUp, WireHorizontal,
  WireHorizontal, WireHorizontal, CornerLowerRight}};
MakeDiagram[layout2];

```



## ■ Szeretnénk kifejezni a hálózat impulzusválaszát. A válaszjel $C_2$ kondenzátor feszültsége.

A válasz kifejezéséhez állapotegyenleteket kell felírni. Az állapotegyenlet az állapotváltozókra felírt differenciálegyenlet. Az állapotváltozók jelen esetben a kondenzátor feszültségek. Az egyenletek felírásához a csomópotenciálok módszerét alkalmazzuk, elsősorban a műveleti erősítő miatt.

Az adatok:  $R = 75 \Omega$ ,  $C = 160 \text{ nF}$

*Koherens egységrendszer*

A numerikus számítások megkönnyítése érdekében koherens mértékegységrendszerre térünk át.

$$[R] = \text{k}\Omega, [C] = \mu\text{F}$$

A  $\tau$  időállandó mértékegysége:  $[R] \times [C] = [\text{ms}]$

$$R = 0.75 \text{ k}\Omega, C = 0.016 \mu\text{F}$$

■ **Az egyenletekből a következő felírás adódik**

$$\text{Mátrixos alakban: } \begin{pmatrix} u_{c1}' \\ u_{c2}' \\ u_{c3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{10 RC} & \frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{-1}{10 RC} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{RC} & \frac{-2}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-11}{10 RC} \\ \frac{-1}{10 RC} \\ 0 \end{pmatrix} u_s$$

A keresett mennyiség:  $u_{c2}$

Erre külön egyenlet írható fel, ami mátrixos leírás második sorával egyezik meg.

$$u_{c2} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \end{pmatrix} + 0 u_s$$

```
ClearAll[adatok];
adatok = {R -> .75, CC -> .016};
```

*A rendszermátrix*

```
ClearAll[A];
A = {{-11 / (10 R CC), 1 / (R CC), 0},
      {-1 / (10 R CC), 0, 0},
      {0, 2 / (R CC), -2 / (R CC)}} /. adatok;
```

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -91.6667 & 83.3333 & 0 \\ -8.33333 & 0 & 0 \\ 0 & 166.667 & -166.667 \end{pmatrix}$$

*Stabilitási kritérium*

A hálózat aszimptotikusan stabil, ha az  $A$  rendszermátrix minden sajátértékének a valós része negatív.

```
ClearAll[lambda];
lambda = Eigenvalues[A]

{-166.667, -83.3333, -8.33333}
```

```
If[And @@ Outer[#1 < 0 &, Re[λ]],
  CellPrint[Cell["Aszimptotikusan stabil.", "Text"]],
  CellPrint[Cell["Nem stabil!!!", "Text"],
    CellFrame → True, Background → RGBColor[1, 0, 0]]]
```

Aszimptotikusan stabil.

```
ClearAll[B];
B = {{-11 / (10 R CC), -1 / (10 R CC), 0}} /. adatok;

B // MatrixForm

( -91.6667  -8.33333  0 )
```

### ■ Differenciálegyenlet megoldása

A differenciálegyenlet megoldása, úgy történik, hogy először a szabad összetevőt határozzuk meg. Ez matematikailag a homogén differenciálegyenlet megoldásának felel meg.

```
ClearAll[u1, u2, u3];
homogen = {uc1'[t] == -11 / (10 R CC) uc1[t] + 1 / (R CC) uc2[t],
  uc2'[t] == -1 / (10 R CC) uc1[t],
  uc3'[t] == 2 / (R CC) uc2[t] - 2 / (R CC) uc3[t]} /. adatok;

DSolve[homogen, {uc1[t], uc2[t], uc3[t]}, t]

{{uc1[t] → e-258.333 t (1.11111 e175. t - 0.111111 e250. t) C[1] +
  e-258.333 t (-1.11111 e175. t + 1.11111 e250. t) C[2] +
  0. e-258.333 t (e91.6667 t + e175. t + e250. t) C[3],
  uc2[t] → e-258.333 t (0.111111 e175. t - 0.111111 e250. t) C[1] +
  e-258.333 t (-0.111111 e175. t + 1.11111 e250. t) C[2] +
  0. e-258.333 t (e91.6667 t + e175. t + e250. t) C[3], uc3[t] →
  e-258.333 t (-0.105263 e91.6667 t + 0.222222 e175. t - 0.116959 e250. t) C[1] +
  e-258.333 t (-0.947368 e91.6667 t - 0.222222 e175. t + 1.16959 e250. t) C[2] +
  1. e-166.667 t C[3]}}
```

Implulusválasz meghatározásánál, nincs gerjesztett összetevő, csak szabad, mert a Dirac-impulzus csak a  $t > 0$  időtartományban gerjeszti a rendszert. Így a homogén egyenletből, és a kezdeti feltételekből megkapjuk a megoldást. Matematikailag az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása 0.

A kezdeti értékek, vagyis az állapotváltozók értéke a  $t = +0$  időpillanatban,  $b$  állapotváltozós egyenletben szereplő vektor lesz. Ekkor az állapotváltókban lehet ugrás, mivel a gerjesztés Dirac-impulzust tartalmaz.

```

homogenstate = {uc1'[t] == -11 / (10 R CC) uc1[t] + 1 / (R CC) uc2[t] ,
  uc2'[t] == -1 / (10 R CC) uc1[t] ,
  uc3'[t] == 2 / (R CC) uc2[t] - 2 / (R CC) uc3[t] , uc1[0] ==
  -11 / (10 R CC) , uc2[0] == -1 / (10 R CC) , uc3[0] == 0} /. adatok;

```

```

homogenstate

```

```

{uc1'[t] == -91.6667 uc1[t] + 83.3333 uc2[t] ,
  uc2'[t] == -8.33333 uc1[t] , uc3'[t] == 166.667 uc2[t] - 166.667 uc3[t] ,
  uc1[0] == -91.6667 , uc2[0] == -8.33333 , uc3[0] == 0}

```

```

DSolve[homogenstate, {uc1[t], uc2[t], uc3[t]}, t]

```

```

{{uc1[t] -> e^{-258.333 t} (0. e^{91.6667 t} - 92.5926 e^{175. t} + 0.925926 e^{250. t}) ,
  uc2[t] -> e^{-258.333 t} (0. e^{91.6667 t} - 9.25926 e^{175. t} + 0.925926 e^{250. t}) ,
  uc3[t] -> e^{-425. t} (17.5439 e^{258.333 t} - 18.5185 e^{341.667 t} + 0.974659 e^{416.667 t}) }}

```

```

imp = %[[1, 2, 2]] // Simplify

```

```

0. e^{-166.667 t} - 9.25926 e^{-83.3333 t} + 0.925926 e^{-8.33333 t}

```

```

Options[impvalasz] =

```

```

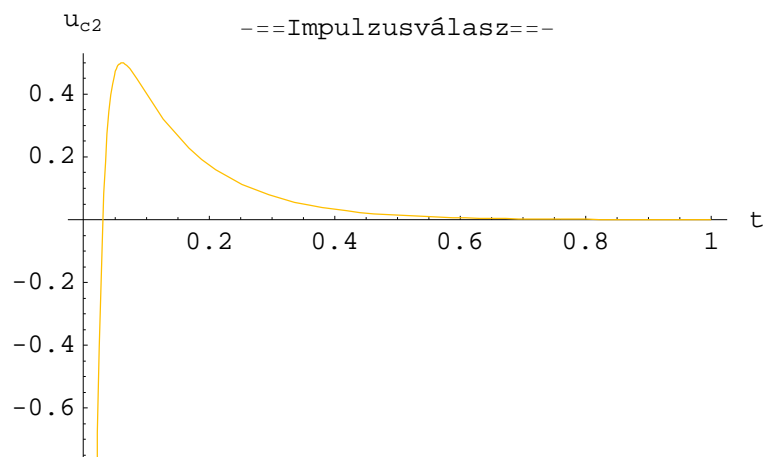
{PlotStyle -> {Hue[.125]}, PlotLabel -> "===Impulzusválasz===",
  AxesLabel -> {"t", DisplayForm[SubscriptBox[u, c2] ]}};

```

```

Plot[imp, {t, 0, 1}, Evaluate[Options[impvalasz]]]

```



```

- Graphics -

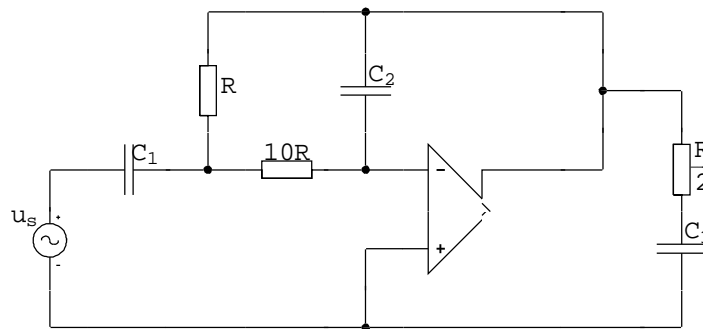
```

## Frekvenciatartomány

- Most ugyanerre a hálózatra írunk fel frekvenciatartománybeli egyenleteket.

Az egyenletek felírásához a csomóponti potenciálok módszerét alkalmazzuk.

`MakeDiagram [layout2]`



- GraphicsArray -

*A műveleti erősítő invertáló bemenetére felírt egyenlet*

$$\frac{-u_2}{\frac{1}{sC_2}} - \frac{\phi}{10R} = 0$$

*A  $\phi$  potenciálú csomópontokra felírt egyenlet*

$$\frac{\phi - u_2}{\frac{1}{sC_1}} + \frac{\phi - u_2}{R} + \frac{\phi}{10R} = 0$$

`ClearAll[u1, u2,  $\phi$ ];`

`trans = {-u2 s CC -  $\phi$  / (10 R) == 0, s CC ( $\phi$  - u1) + ( $\phi$  - u2) / R +  $\phi$  / (10 R) == 0};`

`Solve[trans, u2,  $\phi$ ]`

$$\left\{ \left\{ u_2 \rightarrow -\frac{CC R s u_1}{1 + 11 CC R s + 10 CC^2 R^2 s^2} \right\} \right\}$$

`w = %[[1, 1, 2]] / u1`

$$-\frac{CC R s}{1 + 11 CC R s + 10 CC^2 R^2 s^2}$$



■ Az átviteli karakterisztika

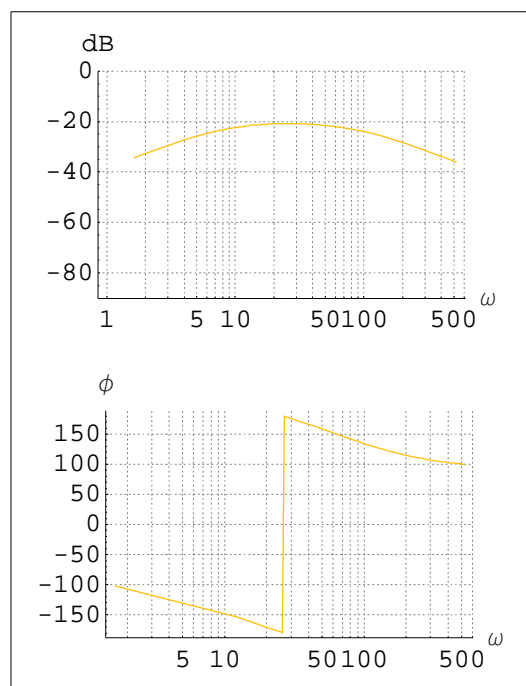
W /. adatok

$$\frac{0.012 s}{1 + 0.132 s + 0.00144 s^2}$$

`BodePlot[W /. adatok, s, FreqRange -> Automatic,  
v, PlotStyle -> {Hue[.125]}, PlotRange -> {0, -90}]`

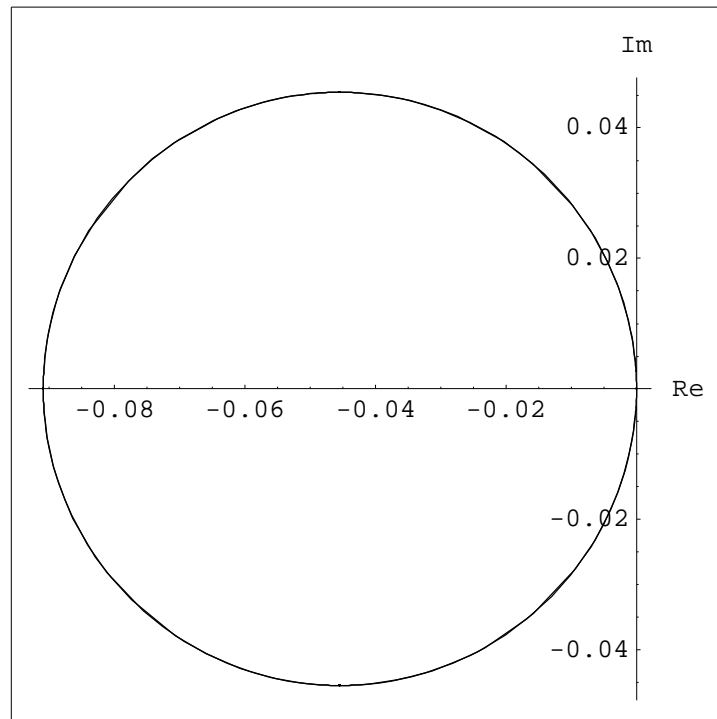
$$\left\{ \frac{16}{\pi^2}, 168 \pi \right\}$$

Bode - diagramm  
Amplitúdó & Fázis

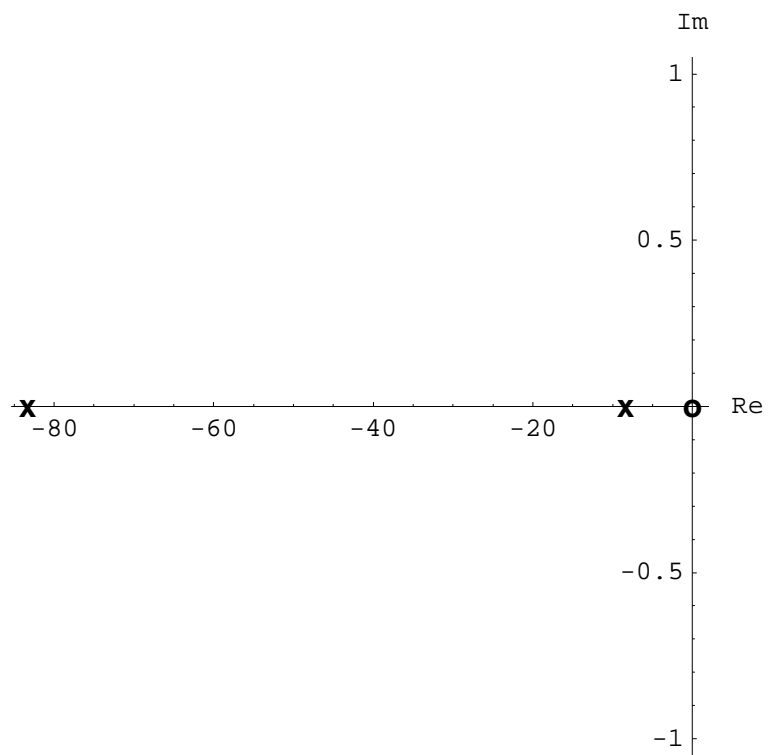


```
NyquistPlot[W /. adatok, s, C, AspectRatio -> 1]
```

Nyquist - diagramm



```
PoleZeroPlot[W /. adatok, s, AspectRatio -> 1]
```



- Graphics -

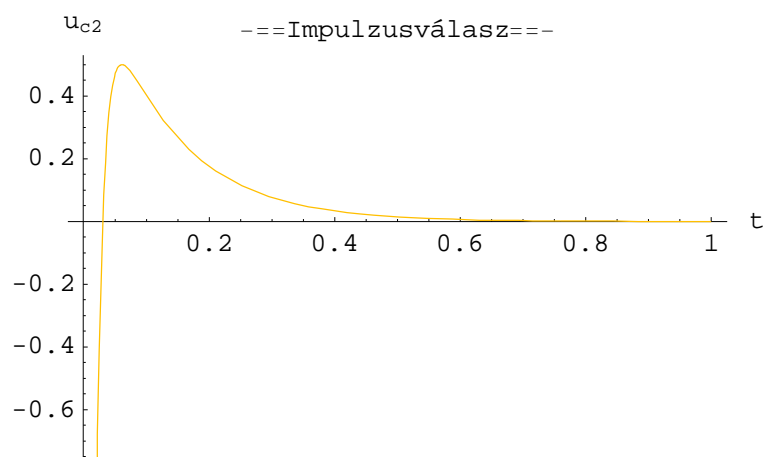
### ■ A hálózat impulzusválaszának meghatározása

Az impulzusválasz időfüggvénye az átviteli karakterisztika inverz Laplace-transzformálásával kapható meg.

```
wf[t_] = InverseLaplaceTransform[W, s, t] /. adatok // Simplify
```

$$e^{-83.3333 t} (-9.25926 + 0.925926 e^{75 \cdot t})$$

```
Plot[wf[t], {t, 0, 1}, Evaluate[Options[impvalasz]]]
```



- Graphics -

## Diszkrét szimuláció

### Diszkrét idejű hálózatok

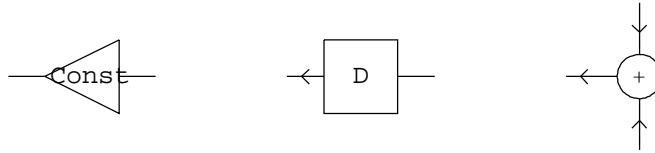
A diszkrét idő a  $t_k = kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  időpillanatokot jelenti. Diszkrét idejű jelek esetén ezekhez az időpillanatokhoz rendelünk valós értékeket.

A diszkrét idejű hálózat változói diszkrét idejűek.

#### Diszkrét idejű hálózatok komponensei

A hálózat kevés elemmel leírható. Be- és kimeneten kívül összegző csomópont, késleltető és szorzó fordul elő.

```
MakeDiscreteDiagram[{MultiplierLeft["Const"],
Graphics[{}], DelayLeft, Graphics[{}], Adder2WayLeft}]
```



- GraphicsArray -

### Karakterisztikák

Szorzó  $v[k] = c u[k]$

Késleltető  $v[k] = u[k - 1]$

Összegző  $v[k] = \sum_{i=1}^n u_i[k]$

A *szimuláció*-t a következő értelemben használjuk: Adott egy folytonos idejű rendszer, feladat egy olyan diszkrét idejű rendszer meghatározása, amelynek viselkedése "hasznló" a folytonos idejű megfelelőjéhez. A szimuláció tekinthető egy numerikus közelítésnek is. A szimuláló diszkrét idejű hálózat számítástechnikailag előnyösebb.

A diszkrét szimulációhoz nem csak a hálózat szimulálását jelenti, hanem a jelek diszkrét idejűvé alakítását is. A diszkrét jelhez mintavételezésre van szükség. Válasszunk  $T$  mintavételezési időt.

A szimuláció ideális esetben azt eredményezi, hogy a szimuláló rendszer válasza megegyezik a folytonos idejű rendszer válaszával, vagyis

$$u_d[k] = u_c(kT) \rightarrow y_d[k] = y_c(kT)$$

teljesül bármilyen  $u_c(t)$  gerjesztés esetén.

A szimulátor megalkotásakor a cél az optimalizálás, azaz minél egyszerűbb rendszerrel érjünk el minél nagyobb pontosságot. A szimuláció pontossága azonos feltételek mellett akkor pontosabb, ha a  $T$  mintavételi idő minél kisebb.

### Átviteli karakterisztika szimulálása

Tekintsük adottnak a folytonos idejű rendszer  $H_c(s)$  átviteli függvényét. A cél, hogy a szimuláló rendszer gerjesztett válasza megegyezzen a folytonos idejű rendszer gerjesztett válaszával mintáival.

$$u_c(t) = e^{i\omega t}, u_d[k] = e^{i\omega k T} \rightarrow u_d[k] = e^{i\omega k T} |_{\theta=\omega T}$$

A válasz gerjesztett összetevőinek komplex alakja

$$y_c(t) = H_c(j\omega) e^{i\omega t}, y_d[k] = H_d(e^{i\omega T}) e^{i\omega kT}$$

A szimuláció ideális, ha  $y_d[k] = y_c(kT)$  feltétel teljesül. Ennek feltétele

$$H_d(e^{i\theta}) = H_c(j\omega) |_{\omega=\theta/T} \rightarrow H_d(z) = H_c(s) |_{s=T^{-1} \ln z}$$

Ez azonban nem teljesíti azt a feltételt, hogy az átviteli függvény racionális legyen. Ez pedig nem realizálható az ismertetett elemekkel.

Ezzel a tulajdonsággal a bilineáris transzformáció rendelkezik. A képletben szereplő  $p$  paraméter szokásos választása  $p = 2$ . A transzformáció megtartja továbbá az átviteli függvény pólusainak és zérusainak kapcsolatát.

$$H_d(z) = H_c(s) |_{s=f(z)}, f(z) = \frac{p}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad 0 < p \leq 2$$

Most egy 22050 Hz mintavételezési mintával szeretnénk dolgozni, de mivel a koherens egységrendszerben ms -ban számoltunk  $T$  helyére 22.05-öt írunk. Mivel ismerjük a folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikáját a bilineáris transzformációval meghatározható a diszkrét hálózaté.

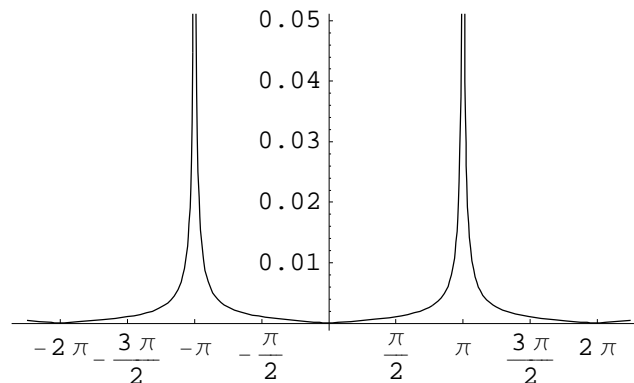
**ClearAll [Wd] ;**

**Wd = (W /. s -> 2 / 22.05 (z - 1) / (z + 1) // Together) /. adatok**

$$\frac{0.00108844 (-1. + z) (1. + z)}{0.988039 + 1.99998 z + 1.01198 z^2}$$

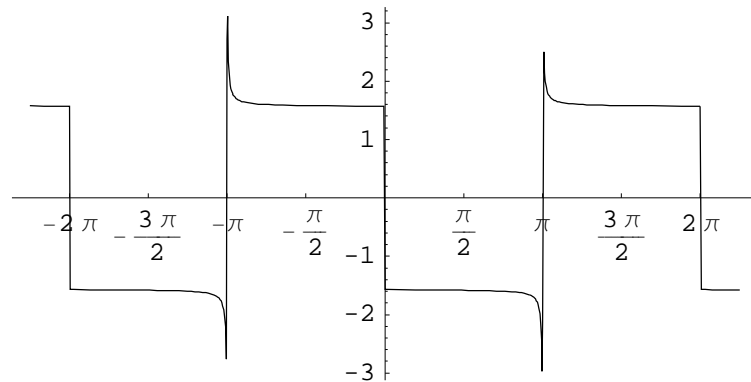
A diszkrét hálózat esetén a hálózatra értelmezhet amplitúdó- és fáziskarakterisztika. Az amplitúdó-karakterisztika  $e^{i\theta}$  miatt páros függvény, míg a fázis-karakterisztika páratlan. Mindkettő  $2\pi$  szerint periodikus.

**Plot [Abs [ExpToTrig [Wd /. z -> e<sup>iθ</sup>]], {θ, -2π - π/4, 2π + π/4},  
Ticks -> {Range [-2π, 2π, π/2], Automatic}, AspectRatio -> 1/2]**



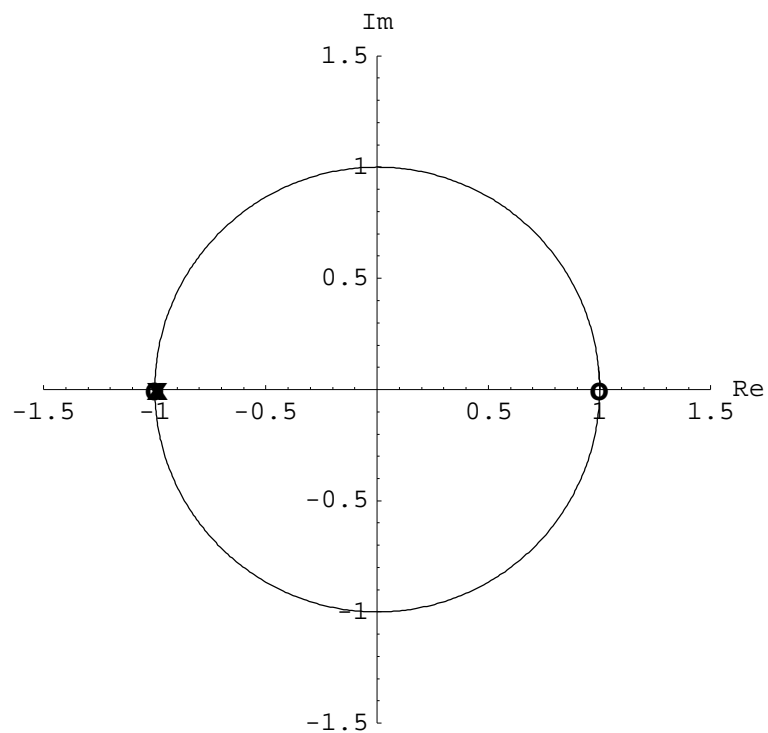
- Graphics -

```
Plot[Arg[ExpToTrig[Wd /. z -> eiθ]], {θ, -2π - π/4, 2π + π/4},
  Ticks -> {Range[-2π, 2π, π/2], Automatic}, AspectRatio -> 1/2]
```



- Graphics -

```
Show[PoleZeroPlot[Wd, z, DisplayFunction -> Identity],
  Graphics[Circle[{0, 0}, 1], DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}}]
```



- Graphics -

### Impulzusválasz szimulálása

Tekintsük most adottnak a folytonos idejű rendszer impulzusválaszának időfüggvényét az alábbi alakban

$$h_c(t) = D\delta(t) + \epsilon(t) f(t)$$

Ekkor a hálózat válasza tetszőleges  $u_c(t)$  belépő gerjesztésre konvolúcióval határozható meg

$$y_c(t) = \int_{-0}^t h_c(\tau) u_c(t - \tau) d\tau$$

Az integrál közelítése diszkrét időben

$$y_d[k] = \sum_{i=0}^k h_d[i] u_d[k - i], k \in \mathbb{N} \text{ vagy másképp}$$

$$y_d[k] = \sum_{i=0}^k h_d[k - i] u_d[i]$$

Ez alapján a következő szimulációs szabályt kapjuk

$$h_c(t) = D\delta(t) + \epsilon(t) f(t) \rightarrow h_d[k] = D\delta[k] + T\epsilon[k - 1] f(k T)$$

```
mintavetel = {D -> B[[1, 2]], T -> 1 / 22.05};
```

```
ClearAll[wd];
```

```
wd[k_] :=
```

```
  wd[k] = D DiscreteDelta[k] + T UnitStep[k - 1] wf[k T] /. mintavetel
```

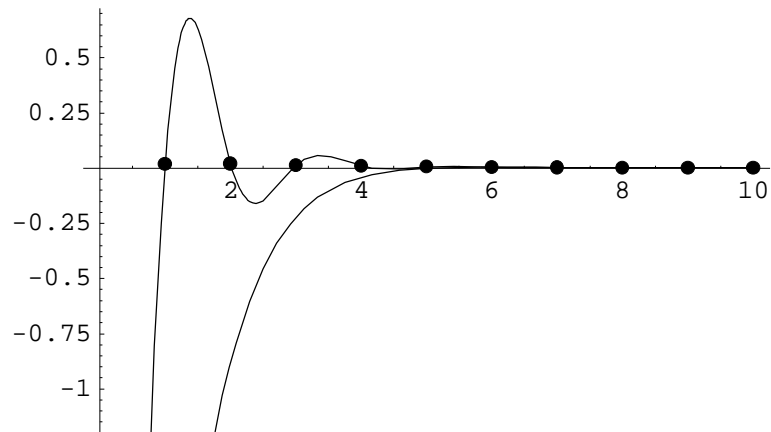
Most a mintavételezett impulzusválaszt szeretnénk szemléltetni, vizsgálva, hogy valóban megegyezik-e a mintavételezett jellel. A *Mathematica* Spline függvényével görbét illeszthetünk a diszkrét értékekre.

```
<< Graphics`Spline`
```

```
ClearAll[ertekek];
```

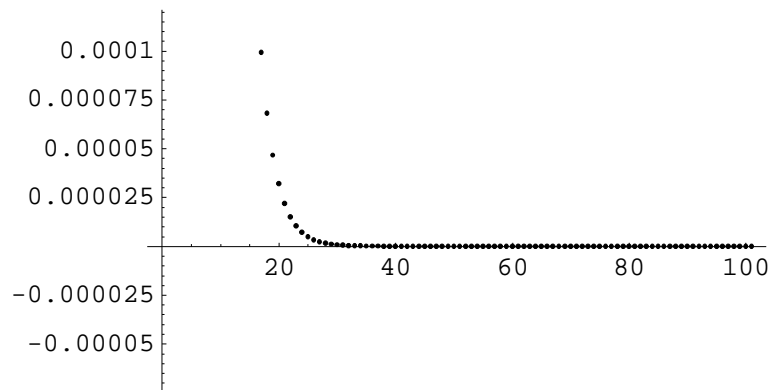
```
ertekek = Table[{k, wd[k]}, {k, 0, 10}];
```

```
Show[{ListPlot[ertekek, PlotStyle -> {Hue[1]},
  DisplayFunction -> Identity], Graphics[Spline[ertekek,
  Cubic, SplineDots -> {RGBColor[0, 0, 0], PointSize[.02]}]],
  Graphics[Spline[ertekek, Bezier]]},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



- Graphics -

```
ListPlot[Table[wd[k], {k, 0, 100}]]
```



- Graphics -

### *Szimulált válasz*

Most következünk a szimuláció. A hálózatra hangfrekvenciás mintavételezett jelet kapcsolunk. A jel adatai az alábbi táblázatból olvashatók ki.

```
<< Miscellaneous`Audio`
```



```
snd = ReadSoundFile["C:\startm.wav", PrintHeader -> True];
```

```
Format: Microsoft PCM WAVE RIFF
```

```
Duration: 0.0458957 seconds
```

```
Channels: 1
```

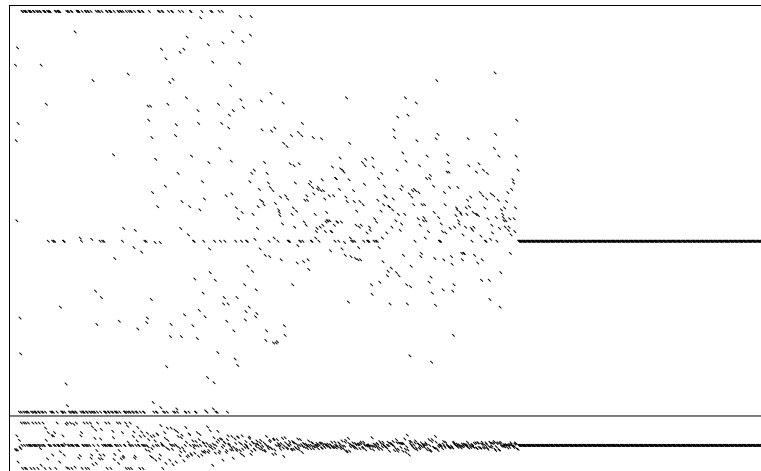
```
Sampling rate: 22050
```

```
Bits per sample: 16
```

```
Data size: 2024 bytes
```

```
Number of samples: 1012
```

```
ListPlay[snd, SampleRate -> 22050]
```



- Sound -

Írjuk fel a kétféle diszkrét konvolúció képletet. Majd vizsgáljuk meg melyik az előnyösebb a feladat szempontjából.

```
ClearAll[y1];
```

$$y1[k_] := \sum_{n=0}^k \text{snd}[[k - n + 1]] * \text{wd}[n]$$

```
ClearAll[y2];
```

$$y2[k_] := \sum_{n=0}^k \text{snd}[[n + 1]] * \text{wd}[k - n]$$

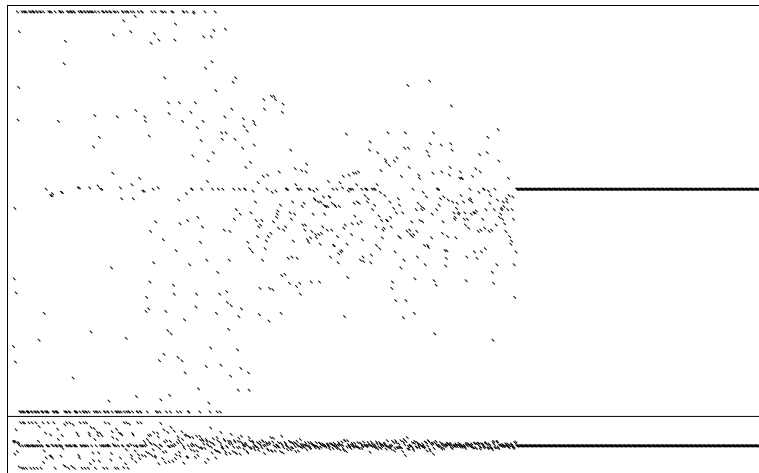
```
Timing[Table[y1[k], {k, 0, 400}];] (*1.59 s*)
```

```
{1.81 Second, Null}
```

```
Timing[Table[y2[k], {k, 0, 400}];] (*1.38 s*)
```

```
{1.48 Second, Null}
```

```
ListPlay[Table[y2[k], {k, 0, Length[snd] - 1}], SampleRate -> 22050]
```



- Sound -

Látható hogy, az időtartományban végzett szimuláció idő- és számításigényessége.

A megoldás a frekvenciatartományra való áttérés. Fourier transzformáció, Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT), gyors Fourier transzformáció (FFT), diszkrét koszinusz transzformáció, stb. alkalmazása.

## Felhasznált irodalom

*Fodor György: Hálózatok és rendszerek analízise*

*Fodor György: Jelek, rendszerek, hálózatok*

*Gyimes László: Digitális jelfeldolgozás*

*The Electrical Engineering Handbook*

*Mathematica Information Center*