Diplomamunka

A fuzzy logika alkalmazási lehetőségei a biztosítási matematikában

Írta: Gopcsa Gergely

Sztochasztika Tanszék
Belső konzulens: Dr. Barabás Béla
Külső konzulens: Dr. József Sándor

Budapest, 2005. május

Diplomamunka feladat

Gopcsa Gergely

matematikus hallgató részére

A diplomamunka témája:

A fuzzy logika alkalmazási lehetőségei a biztosítási matematikában

Kidolgozandó feladat részletezése:

A fuzzy logika bemutatása, különös tekintettel a biztosítási matematikában való felhasználás lehetőségére. A fuzzy logika alapvető tételeinek, definícióinak összefoglalása, fuzzy klaszterező algoritmusok, fuzzy számok, szabályozási modellek és „Early Warning rendszerek" ismertetése.

A diplomamunkát meghírdető tanszék neve:

Sztochasztika

A diplomamunkáért felelős vezető oktató neve:

Dr. Barabás Béla

A diplomamunkáért felelős vezető oktató beosztása:

Docens

Konzulens neve:

Dr. József Sándor

Konzulens munkahelye és beosztása:

OTP-GARANCIA Biztosító Rt., vezető matematikus

A diplomamunka kiírását jóváhagyom:

1. Bevezetés

Diplomamunkámban a fuzzy logika alkalmazási lehetőségeit mutatom be a biztosítási matematika területén. A fuzzy logika a bizonytalanság modellezésével foglalkozik. A véletlen jelenségek fontos alkotórészei a bizonytalanságnak, mégis sok alkalmazásban nem elegendőek a hagyományos valószínűségszámításban alkalmazott módszerek, hiszen a bizonytalanságnak több forrása is lehet. A fuzzy logika a bizonytalanságnak azzal a fajtájával foglalkozik, amelynek a forrása az, hogy a vizsgált objektumok között nehéz éles megkülönböztetést tenni. Ilyen jelenségekkel a világban mindenhol találkozhatunk, hiszen az olyan fogalmak, mint például a „szép", „magas" meglehetősen homályosan írják le egy ember megjelenését, mégis ilyen fogalmakat alkalmazunk mindennapi kommunikációink során, és senki sem gondolhatja, hogy ezeknek a fogalmaknak nincsen információtartalma.

A valószínűségszámítás az események bekövetkezésének bizonytalanságát írja le, a fuzzy logika ezzel szemben nem azt vizsgálja, hogy egy esemény bekövetkezik-e, hanem azt hogy az esemény milyen szinten következik be. Természetesen sok hasonlóság van a valószínűségszámítás és a fuzzy logika között. Mindkettő a bizonytalanságot modellezi számok segítségével, mindkettő megközelítésben az alapvető fogalmakat asszociatív, kommutatív és disztributív módon kombináljuk. Természetesen vannak különbségek is. Kosko [11] megközelítése szerint egy jelenség akkor és csak akkor homályos (~fuzzy), amikor az ellentmondás-mentesség ($A \cap \overline{A} = 0$) szabálya megsérül. „A klasszikus logika feltételezi, hogy az ellentmondás-mentesség szabálya soha nem sérül meg. Ez teszi a klasszikus elméleteket fekete-fehérré. A homályosság ott kezdődik ahol a nyugati logika véget ér."

A dolgozatom 2. fejezetében röviden bemutatom a fuzzy logika legelemibb tételeit, definícióit, a következő fejezetekben pedig sokkal gyakorlatiasabb példákat és megoldásokat mutatok, amelyek a fuzzy logika segítségével oldják meg a felvetett problémákat.

Véleményem szerint az elméleten kívül a megvalósítás is fontos szerepet játszik egy-egy feladat megértésében, ezért dolgozatomban bemutatom azokat a programokat, amelyekkel a konkrét példákat megoldottam. Ezek megértése feltételez némi jártasságot a programozás terén, mindazonáltal nem okozhat különösen nagy problémát a matematikában jártas olvasóknak. A programok a *Mathematica* nevű matematikai modellező rendszerben íródtak, amelyről egy kisebb függeléket is írtam azok számára, akiknek mégis nehézséget okoz a programok olvasása.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek Dr. Barabás Bélának, amiért megismertette és megszerettette velem a biztosítási matematikát, konzulensemnek, Dr. József Sándornak, aki ötleteivel és tapasztalatával rengeteget segített a dolgozat elkészítésében, és Dr. Tóth Jánosnak a *Mathematica* program kezelésében nyújtott segítségéért.

Ezen kívül köszönöm a családom, barátaim és évfolyamtársaim türelmét, megértését és támogatását.

Tartalomjegyzék

2. A fuzzy halmazokra vonatkozó alapvető definíciók, tételek

2.1. Definíciók

2.1.1 A fuzzy halmazokat tagsági függvényeikkel adhatjuk meg. Legyen X tetszőleges halmaz. Ekkor az $A = \{\{x, U_A(x)\}; x \in X\}$ halmazt nevezzük *fuzzy halmaznak*. U_A a tagsági függvény, amely az X halmaznak egy leképezése a [0, 1] intervallumra: $U_A : X \to [0, 1]$. Szemléletesen a tagsági függvény azt mutatja meg, hogy adott $x \in X$ esetén az elem „mennyire, milyen fokon” tag a halmazban.

Ez a definíció a hagyományos halmazok karakterisztikus függvényeinek általánosítása, ahol az A halmaz χ karakterisztikus függvénye:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \overline{A} \\ 1, & \text{ha } x \in A \end{cases}$$

2.1.2 Az A fuzzy halmaz α-vágatának az A_α crisp (hagyományos) halmazt nevezzük, ahol $A_\alpha = \{x \in U : U_A \geq \alpha\}$. Szemléletesen úgy gondolhatunk erre, mint hibaintervallumra, amelynek az igazságértéke α. Tahát például egy 0.8-vágat azokat az elemeket tartalmazza, amelyek legalább 80%-os tagjai az A halmaznak. Általában a döntéshozó folyamatokban, a döntést, amelyet fuzzy halmaz reprezentál egy megfelelő α-vágattal helyettesítjük és az így definiált halmaz tartalmazza az optimális döntéseket.

2.1.3 Az A fuzzy halmaz α-szintjének az $\Lambda_\alpha = \{x \in U : U_A = \alpha\}$ halmazt nevezzük, és $A_\alpha = \bigcup_{k \geq \alpha} \Lambda_k$.

2.1.4 $A \subset R$ konvex, ha $c \in [0, 1]$ esetén $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$párra: $U_A(c \cdot x + (1 - c)\, y) \geq \min[U_A(x),\ U_A(y)]$

2.1.5 Az A és B fuzzy halmazok unióját az $U_{A \cup B}(x) = \max[U_A(x),\ U_B(x)]$ tagsági függvénnyel definálhatjuk.

2.1.6 Az A és B fuzzy halmazok metszetét az $U_{A \cap B}(x) = \min[U_A(x),\ U_B(x)]$ tagsági függvénnyel definálhatjuk.

2.1.7 Az A halmaz $\overline{A}$ komplementerének tagsági függvénye: $U_{\overline{A}}(x) = 1 - U_A(x)$

Ezek a halmazműveletek szoros kapcsolatban vannak a logikai „és”, „vagy”, „nem” operátorokkal, és a hagyományos halmazelméleti definíciók természetes kiterjesztései. Ezen műveletek axiomatikus leírását Kóczy T. László és Tikk Domonkos Fuzzy rendszerek című könyvében [1] találhatjuk meg. Az általuk használt axiómák biztosítják, hogy a fenti műveletek valóban a hagyományos műveletek kiterjesztései legyenek.

2.1.8 Sok alkalmazásban a fenti metszet definíció helyett néha más definíciókat érdemes alkalmaznunk. Általában a metszet definícióktól az alábbi három tulajdonságot várhatjuk el:

(i) $U_{A \cap B}(x) \leq \min[U_A(x),\ U_B(x)]$, ha $0 < U_A(x),\ U_B(x) < 1$. Azaz két faktor együttes hatása rosszabb, mint külön-külön.

(ii) Az A és B hatásai $A \cap B$-re nem függetlenek, azaz az $U_A(x)$ megváltozásának hatása $U_{A \cap B}(x)$-re függhet U_B-től is.

(iii) Az $U_A(x)$ megnövekedésének hatása a metszetre kiegyenlíthető $U_B(x)$ csökkenésével.

Látható, hogy a fenti metszet definíció nem teljesíti mindhárom tulajdonságot.

A következzen néhány gyakran használt metszet definíció:

(i) Algebrai szorzat: $U_{A \cap B}(x) = U_A(x)\, U_B(x)$, amely mindhárom tulajdonságot kielégíti.

(ii) Hamacher operátor: $U_{A \cap B}(x) = \frac{U_A(x)\, U_B(x)}{p+(1-p)\,(U_A(x) + U_B(x) - U_A(x)\, U_B(x))}$, amely szintén kielégíti a fenti tulajdonságokat. Ebben a definícióban a p paraméter a (ii)-tulajdonság teljesülését szabályozza, azaz az egymásra hatás mértéke p csökkenésével arányosan csökken.

(iii) Schweitzer és Sklar: $\{\max(0,\ U_A(x)^p + U_B(x)^p - 1)\}^{1/p}$, $p \neq 0$ (ha p→0, akkor algebrai szorzat), amely a második tulajdonságnak nem tesz eleget.

2.2. Fuzzy számok

2.2.1. Az A fuzzy szám a valós számok olyan fuzzy részhalmaza, amelynek U_A tagsági függvényére

(i) $U_A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ folytonos leképezés,

(ii) a $(-\infty, a_1]$ intervallumon nulla,

(iii) szigorúan növekvő az $[a_1,\ a_2]$ intervallumon,

(iv) 1 az $[a_2,\ a_3]$ intervallumon,

(v) szigorúan csökkenő az $[a_3,\ a_4]$ intervallumon,

(vi) nulla az $[a_4,\ \infty)$ intervallumon, ahol $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$;

2.2.2. A pozitív, ha a_1>0, negatív, ha a_4<0.

2.2.3. Legyenek A és B fuzzy számok, amelyek tagsági függvényei U_A, U_B. Összegük tagsági függvényét definiáljuk a következőképpen: legyen $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$

$$U_C(z) = U_{A+B}(z) = \max_{x+y=z} (\min(U_A(x),\ U_B(y)))$$

Erre a műveletre belátható (lsd.. Dubois és Prade, 1980), hogy:

(i) asszociatív, kommutatív
(ii) $U_C(z) = 0$, ha $z \in (-\infty, a_1 + b_1] \bigcup [a_4 + b_4, \infty]$,
(iii) $U_C(z)$ szigorúan növekedő, ha $z \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$, szigorúan csökkenő ha $z \in [a_3 + b_3, a_4 + b_4]$,
(iv) $U_C(z) = 1$, ha $z \in (a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$,
(ii)-(iv) ekvivalens a $c_i = a_i + b_i$ összefüggéssel

2.2.4. A és B szorzata legyen D, amire:

$$U_D(z) = \max_{xy=z} \min(U_A(x),\ U_B(y)),$$ ahol A, B pozitívak (fuzzy értelemben) .

Belátható, hogy D fuzzy szám, amire

(i) $d_i = a_i\, b_i$,

(ii) asszociatív, kommutatív, és disztributív a szorzás művelete,

(iii) a hatványozást rekurzívan definiálhatjuk.

2.3. További fuzzy műveletek

2.3.1. Az A koncentrálása Con(A, a) az a fuzzy halmaz, amelynek tagsági függvénye:

$$U_{\mathrm{Con}(A,\,a)}(x) = \{U_A(x)\}^a,\ \ \alpha > 1$$

2.3.2. A dilatációja Dil(A, a) a fenti művelet ellentettje:

$$U_{\mathrm{Dil}(A,\,a)}(x) = \{U_A(x)\}^a,\ \ 0 < a < 1$$

2.3.3. A intenzifikálása, Int(A):

$$U_{\mathrm{Int}(A)}(x) = \begin{cases} 2\,U_A{}^2(x), & 0 \le U_A(x) < 0.5 \\ 1 - 2\,(1 - U_A(x))^2, & 0.5 \le U_A(x) < 1 \end{cases}$$

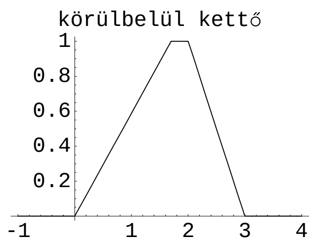
2.4. Példák

Kezdjük néhány tipikus tagsági függvény konstrukciójával: modellezzük a "körülbelül kettő" fogalmat! Az első trapéz alakú tagsági függvény négy paramétere a töréspontokat (azaz az $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ négyest) jelzi.

```
ClearAll[TagságiFüggvény];
TagságiFüggvény[a_, b_, c_, d_, x_] := Which[x ≤ a, 0, a < x ≤ b,
  x / (b - a) - a / (b - a), b < x ≤ c, 1, c < x ≤ d, -x / (d - c) + d / (d - c), x > d, 0]
```

A Plot függvény segítségével ábrázolhatjuk grafikusan a függvényeket. Ennek első argumentuma az ábrázolandó függvény, második argumentuma pedig az értékkészlet.

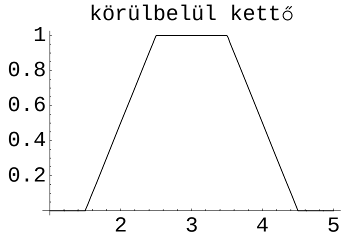
```
Plot[TagságiFüggvény[0, 1.7, 2, 3, x],
 {x, -1, 4}, PlotLabel → "körülbelül kettő"]
```



A szimmetrikus trapéz definiálásához elegendő három paraméter:

```
TagságiFüggvény[a_, b_, r_, x_] :=
 Which[r - a < x <= r + a, 1, r - 1 / b - a < x <= r - a, b ((x + a) - r) + 1,
  r + a < x ≤ r + 1 / b + a, b (r - (x - a)) + 1, x < r - 1 / b - a , 0, x > r + 1 / b + a , 0]
```

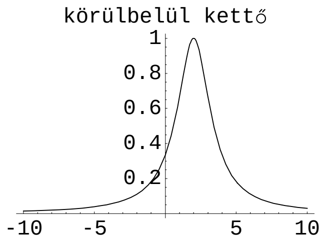
```
Plot[TagságiFüggvény[0.5, 1, 3, x], {x, 1, 5}, PlotLabel → "körülbelül kettő"]
```



A következő tagsági függvény típus minden valós számhoz nemnulla tagsági értéket rendel:

```
TagságiFüggvény[a_, r_, x_] := 1 / (1 + a (x - r) ^2)
```

```
Plot[TagságiFüggvény[0.5, 2, x], {x, -10, 10}, PlotLabel → "körülbelül kettő"]
```



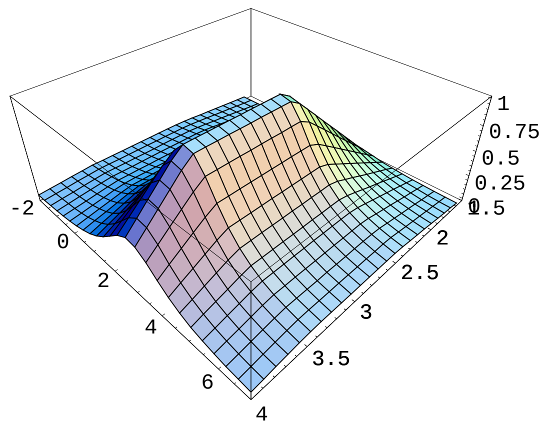
A következőkben tekintsük a halmazműveleteket! Először definiáljuk a kb2, kb3 fuzzy halmazokat, amelyek a körülbelül kettő és a körülbelül három fogalmakat reprezentálják. A példa kedvéért most különböző alakú tagsági függvénnyel adjuk meg őket, az elsőt szimmetrikus trapézzal, a másikat a haranggörbe alakúval:

```
kb2[x_] := TagságiFüggvény[0.5, 1., 3., x]
kb3[y_] := TagságiFüggvény[0.5, 3., y]
```

Következzen tehát néhány példa a halmazok metszetére. Az algebrai szorzat:

```
Szorzat[a_, b_] := a b
```

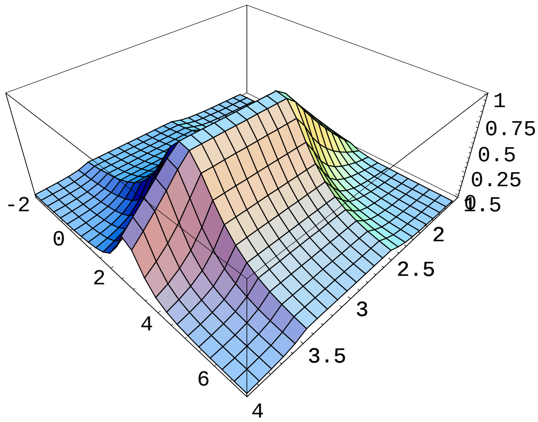
```
Plot3D[Szorzat[kb2[x], kb3[y]], {x, 1.5, 4}, {y, -2, 7}, ViewPoint → {1, 1, 1}]
```



A Hamacher operátorral ugyanezt kiszámítva már lényegesen eltérő képet kapunk. Természetesen minél nagyobb a Hamacher operátor paramétere annál lényegesebb lesz ez az eltérés.

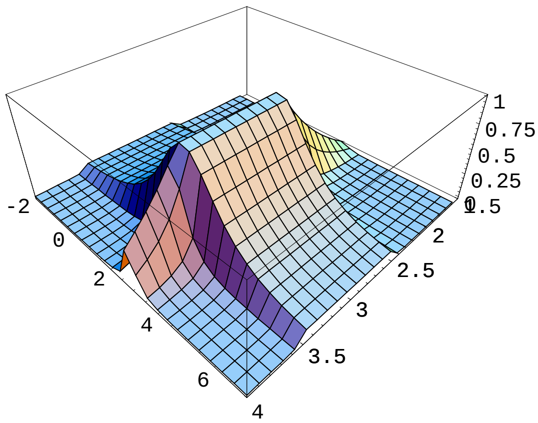
```
Hamacher[p_, a_, b_] := Szorzat[a, b] / (p + (1 - p) (a + b - Szorzat[a, b]))
```

```
Plot3D[Hamacher[10, kb2[x], kb3[y]],
 {x, 1.5, 4}, {y, -2, 7}, ViewPoint → {1, 1, 1}]
```



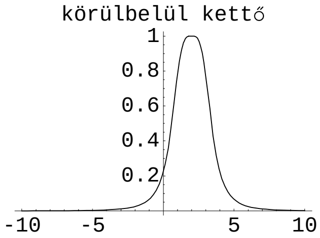
Most 100-ra állítjuk a *p* paraméter értékét:

```
Plot3D[Hamacher[100, kb2[x], kb3[y]],
 {x, 1.5, 4}, {y, -2, 7}, ViewPoint → {1, 1, 1}]
```



Végezetül pedig tekintsük a „körülbelül kettő” fogalmat modellező (szimmetrikus trapéz tagsági függvénnyel rendelkező) fuzzy halmaz intenzifikálását!

```
Plot[If[TagságiFüggvény[0.5, 2, x] < 0.5,
  2 (TagságiFüggvény[0.5, 2, x])^2, 1 - 2 (1 - TagságiFüggvény[0.5, 2, x])^2],
 {x, -10, 10}, PlotLabel → "körülbelül kettő"]
```



3. Fuzzy clusteranalízis

3.1. Bevezetés

A kockázatok díjazása során a gyakorlatban a következő problémába ütközünk: egyrészt az ekvivalencia-elv (másnéven a fair díjazás elve: várható szolgáltatás = várható díjbevétel) alapján az a várakozásunk, hogy minden szerződésre a beszedett díjak hosszú távon fedezik a kifizetéseket, másrészről, a biztosítás alapgondolata az, hogy a kockázatokat egy portfolióba gyűjtjük, amelyen belül a kockázatok egyenrangúak abban az értelemben, hogy mindre az egész portfolió átlagszükséglete alapján kalkuláljuk a díjakat. Ez a két elv tökéletes egyensúlyban van, ha a portfolió ideálisan homogén kockázatokból áll. A probléma a gyakorlatban az, hogy nincs két egyforma kockázat. Különböző kockázati kategóriák vannak, és még a kategóriákon belül is külön csoportokat kell a homogenitás megközelítéséhez bevezetni Például a gépjárművekre vonatkozó biztosítások kategóriájában külön csoport a sportautók csoportja. Az ilyen homogén csoportok létrehozásánál rengeteg módszerrel lehet próbálkozni, példaképpen tekintsük a következő definíciót:

Sportjárműnek minősül minden olyan jármű, amelyre a következő összefüggés igaz:

$$\frac{W}{P}\sqrt[3]{S}\sqrt[4]{\mathrm{cc}} < 17,$$

ahol W a jármű súlya (kg), P a motor ereje (lóerő), S az ülések száma, cc pedig a motor térfogata (liter).

A következő fejezetben egy olyan algoritmust mutatok be, amely a csoportok kialakításában nyújthat segítséget. Szemléletesen ez egy olyan módszer lesz, amely, ha ismeri több autótípusra a (W, P, S, cc) értékeket, akkor a típusokat képes lesz besorolni sportautó - nem sportautó csoportokba a fenti egyenlőtlenséghez hasonló összefüggések felhasználása nélkül.

3.2. Fuzzy clusterezés

A célunk tehát az, hogy az X adathalmazt ($X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^p$), c homogén részhalmazra bontsuk úgy, hogy az egy részhalmazban található objektumok a lehető legjobban hasonlítsanak egymásra, a különböző részhalmazokban található elemek pedig a lehető legnagyobb mértékben különbözzenek. Az ilyen részhalmazokat nevezzük clustereknek.

A klasszikus clusterezési algoritmusok olyan clustereket építenek, amelynél minden objektum pontosan egy clusterbe tartozik. Gyakran nehéz azonban ilyen felbontást találni, mivel előfordulhat olyan eset, amikor egy elem leginkább „clusterek közöttinek” nevezhető. A probléma fuzzy megoldása abból áll, hogy az elemeknek megengedjük, hogy egyszerre több clusterbe tartozzanak, és a clusterbe tartozás mértékét (tagsági függvény segítségével) adjuk meg lsd. [7].

Legyen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})$, ahol x_{ij} az i-edik objektum j-edik tulajdonsága. A hasonlóság mérése fontos kérdés a cluserezésnél, mi most a távolságot fogjuk használni: $d(x_k, x_l)$, ahol a d egy megfelelően definiált mérték. A clusterezési feladat egyik további fontos paramétere a clusterek száma: c.

Legyenek a clusterek: S_i, $i = 1, \ldots, c$ $(2 \le c \le n)$. Ezekhez definiáljuk az $U = [\mu_{ik}]_{i=1\ldots c}^{k=1\ldots n}$ mátrixot, amelyben $\mu_{ik} = \mu_{S_i}(x_k)$, azaz az U mátrix elemei azt mutatják meg hogy az egyes elemek milyen fokon tagok az egyes clusterekben.

Definíció: Az $U = [\mu_{\mathrm{ik}}]$ az X fuzzy c-partíciója, ha

(i) $\mu_{\mathrm{ik}} \in [0,\ 1],\ \forall\, i, \forall\, k$

(ii) $\sum_{i=1}^{c} \mu_{\mathrm{ik}} = 1,\ \forall\, k$

(iii) $0 < \sum_{k=1}^{n} \mu_{\mathrm{ik}} < n,\ \forall\, i$

A clusterek helyzetét a centrummal adjuk meg, amit a cluster elemeinek a d mérték szerinti „súlypontjaként" képzelhetünk el, jelölésben: $v_i = (v_{\mathrm{i1}},\ ...,\ v_{\mathrm{ip}})$.

A centrum segítségével megadhatunk egy célfüggvényt, amely lokális maximumát fogjuk a clusterezési feladat optimális megoldásaként elfogadni. Legyen ez a célfüggvény a következő alakú:

$$z_m(U,\ v) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{k=1}^{n} (\mu_{i,k})^m\, \|x_k - v_i\|^2$$

Ebből a definícióból látszik, hogy a fenti követelményeknek eleget tesz, hiszen éppen az elemek egymáshoz való hasonlóságát optimalizálja. A célfüggvényben szereplő m azt szabályozza, hogy a centrumtól távolodva mekkora súlyt kaphatnak az egyes elemek (leggyakrabban: $m = 2$).

3.3. Szükséges feltétel a lokális optimum elérésére

(i) $v_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (\mu_{\mathrm{ik}})^m} \sum_{k=1}^{n} (\mu_{\mathrm{ik}})^m\, x_k$

(ii) $\mu_{\mathrm{ik}} = \dfrac{\left(\frac{1}{\|x_k - v_i\|^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}{\sum_{j=1}^{c} \left(\frac{1}{\|x_k - v_j\|^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}$

3.4. A fuzzy c-közép algoritmus

1. Lépés:

- c és m megválasztása ($2 \le c \le n$, $m > 1$)

- Egy megfelelő normát definiáló G (szimmetrikus, pozitív definit) mátrix megadása (Pl.: egységmátrix, kovariancia-mátrix), amellyel $\|x\|_G = x^T\, G\, x$.

- $U^{(0)}$kezdeti mátrix megadása, valamint az l lépésszámláló 0-ra állítása. (vagy induló középpontok alapján $U^{(0)}$ kiszámítása)

2. Lépés

- $v_i^{(l)}$ meghatározása $U^{(l)}$ alapján.

3. Lépés

- Ha $x_i \neq v_k^{(l)}$ az $U^{(l+1)}$ meghatározása $v_i^{\,l}$ alapján a (ii) egyenlet felhasználásával, egyébként:

$$\mu_{\mathrm{kj}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = i \\ 0, & \text{ha } j \neq i \end{cases}$$

4. Lépés

- $\Delta_i := \|v_i^{(l+1)} - v_i^{l}\|_G$, ha $\Delta_i < \epsilon \ \forall\ i$ – re → STOP, egyébként vissza a második lépésre. Azaz hogyha a centrumok már nem változnak (illetve a változásuk mértéke nem haladja meg a kijelölt ϵ szintet), akkor megállhatunk.

3.5. Credibility elmélet, az egyes csoportok díjainak meghatározása

A credibility elmélet a nem-élet biztosítási matematikában az egyik legrégebbi módszer a kockázatok díjainak meghatározására. Az elmélet lényege az, hogy miután a kockázatokat csoportosítottuk, (a csoportokról pedig feltesszük hogy viszonylag homogén kockázatokból állnak), a biztosító múltbeli adatait használva megbecsüljük a csoportok jövőbeli kárigényeinek várható értékét, és ezek alapján szabjuk ki a megfelelő díjakat. Az elmélet központi kérdése a várható értékek megbecslésének módja, a következőkben ezt mutatom be.

Jelölések:

Az i.-évben, a j.-csoportban: $P_{i,j}$ = a biztosított károk összdíja, $(P_{.,j} = \sum_{i=1}^{n} P_{i,j})$
$Y_{i,j}$ = az összes kárigény $(Y_{.,j} = \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j})$
$X_{i,j}$ = kárhányad, $(X_{i,j} = \frac{Y_{i,j}}{P_{i,j}},\ X_{.,j} = \frac{Y_{.,j}}{P_{.,j}})$

Tegyük fel, hogy minden j-re a j. csoportot a v_j kockázati paraméter karakterizálja:

$$\mathcal{P}[X_{i,j} \le x \mid v_j = v] = F_v[x,\ P_{i,j}],\ \text{amelyre}: \mathcal{E}[X_{i,j} \mid v] = \mu(v),\ \mathcal{D}[X_{i,j} \mid v] = \frac{\sigma^2(v)}{P_{i,j}}$$

A credibility elmélet szerint a v_j-ket független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak tekintjük, amelyek eloszlásfüggvénye: $U(v) = \mathcal{P}[v_j \le v]$. E feltételezések alapján a feladat a következő alakot ölti:

A $P_{i,j}$ és az $X_{i,j}$ ($j = 1,\ ...,\ N$; $i = 1,\ ...,\ n$) ismeretében rögzített k-ra becsüljük meg a kockázatvállalás tiszta (≈ nettó) díját, $\mu(v_k)$-t, mégpedig a fair díjazás elve alapján:

$$\mathcal{E}[X_{i+1,k} \mid v_k] = \mu(v_k)$$

A becslés legyen lineáris, torzítatlan és legkisebb négyzetes, azaz:

- $\hat{\mu}_k = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_{i,j}$ (α függ a k-tól is de ezt most k rögzítettsége miatt elhagyhatjuk)
- $\mathcal{E}[\hat{\mu}_k] = \mathcal{E}[\mu(v_k)] = m$
- $\mathcal{E}\left[(\hat{\mu}_k - \mu(v_k))^2\right] \to \min$

A feladat megoldása (bizonyítás nélkül):

$$\hat{\mu}_k = \gamma_k X_{.,k} + (1 - \gamma_k) \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j}{\gamma} X_{.,j}$$

ahol $\gamma_i = \frac{w P_{.,j}}{v + w P_{.,j}}$, $\gamma = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j$, w = az $X_{.,j}$ szórása, és $v = X_{i,j}$ szórása (időben).

A gyakorlatban w és v nem ismertek, viszont becsülhetőek a következő két statisztika segítségével:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n-1} \sum_{i} \frac{P_{i,j}}{P_{.,.}} (X_{i,j} - X_{.,j})^2$$

$$W = \frac{1}{n N - 1} \sum_{i,j} \frac{P_{i,j}}{P_{.,.}} (X_{i,j} - X_{.,.})^2$$

Ezekkel $\hat{v} = P_{\cdot,\cdot} V$ és $\hat{w} = \frac{1}{\pi}(W - V)$ torzítatlan becslések v-re és w-re, ahol

$$\pi = \frac{1}{n N - 1} \sum_{i,j} \frac{P_{i,j}}{P_{\cdot,\cdot}} \left(1 - \frac{P_{\cdot,j}}{P_{\cdot,\cdot}}\right)$$

3.6. Feladatmegoldás

Ebben a fejezetben a c-közép algoritmus segítségével oldunk meg egy első ránézésre talán mondvacsináltnak tűnő feladatot. A biztosítási matematikában gyakran találkozhatunk kockázati szorzókkal, amelyek segítségével az olyan kockázatok díjait változtatjuk meg (növeljük), amelyekről valamilyen oknál fogva azt gondoljuk, hogy a csopo-rtátlagnál nagyobb kockázatot jelentenek, mégsincs értelme külön csoportot létrehozni a számukra. Gondolhatunk például a balesetbiztosításra, ahol valószínűleg különböző kockázatot jelent egy irodai alkalmazott és egy építőmunkás. Ebben a feladatban azt tesszük fel, hogy a sportautók, amelyeket az autók csoportjába soroltunk, nagyobb kockázatot jelentenek mint az átlagos családi autók. (Érdekességképpen megjegyzem, hogy egyes biztosítók még az autók színét is figyelembe veszik veszélyesség szempontjából: a szürke autók kevésbé észrevehetőek, a piros autók vezetői általában agresszívebben vezetnek, stb.)

Miért nem hozunk létre külön csoportot a sportautóknak? Ahhoz, hogy kölön csoportot hozhassunk létre sok tapasztalattal, és megfelelő statisztikákkal kell rendelkeznünk, ámde a sportautók aránya a többi autóhoz képest meglehetősen kicsi.

Hogyan határozzák meg a kockázati szorzókat? Olyan esetekben, ahol megfelelő mennyiségű adattal rendelkeznek a biztosítók ott a múltbeli tapasztalatok alapján jó becsléseket tudnak adni, de a ritka esetekben csak „szakértői becslésekkel” határozzák meg ezeket.

A feladatban néhány autótípust sorolunk (gyári adataik alapján) két csoportba, és a csoportokra bontás végeredményeit használjuk majd a kockázati szorzók meghatározásához. Az 1. táblázat tartalmazza kiindulási adatokat, a táblázat utolsó két oszlopa pedig a kezdeti feltevéseinket (az algoritmusban szereplő $U^{(0)}$-at). Sajnos nem sikerült az autók súlyadatait is tartalmazó táblázatokat találnom (emiatt kissé torzulnak az eredmények), így a fenti klasszikus definíciót nem alkalmazhattam a kezdeti feltevések megadásakor, pedig érdekes lett volna látni, hogy mennyire kerül közel a két módszer végeredménye.

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
```

Először az algoritmushoz szükséges adatokat mátrixba rendezzük. A kényelmes áttekinthetőség kedvéért az adatmátrixot, és az eredményeket egy táblázatba gyűjtve mutatom be. Az 1. táblázat első oszlopa tartalmazza a vizsgált autótípusokat, a következő három oszlop a tényleges adatmátrix, amelyre mostantól X mátrixként hivatkozok, az ötödik és a hatodik oszlop pedig a kiindulási $U^{(0)}$ mátrix.

A következő függvénnyel definiálhatjuk a centrumot. Az i az i-edik cluster centrumára, n az U sorainak számára utal, m pedig az algoritmusban szereplő kitevőt jelenti.

```
Centrum[U_, X_, i_, n_, m_] :=
 N[(1/(Sum[(U[[k]][[i]])^m, {k, 1, n}])) Sum[((U[[k]][[i]])^m) X[[k]], {k, 1, n}]]
```

```
Centrum[U, X, 1, Length[U], 2]
```

```
{2.78571, 2419.43, 236.286}
```

A most definiálandó Uj függvény az algoritmus egy lépését hajtja végre. (Kényelmesebb volt a függvényen belül rögzíteni az X, G, n, m értékeket, mivel a későbbi „FixedPoint” függvény éppen az algoritmus 4. lépését hajtja végre, és ez a függvény csak egyváltozós függvényekre alkalmazható). Első megközelítésben a normát megfelelően definiáló mátrixnak az egységmátrixot választjuk. Megjegyzem, hogy az algoritmus leírásában szereplő „Ha” utasítást nem írtam meg (valószínűtlennek tűnt, hogy valamelyik típus éppen a cluster centruma legyen).

```
Új[U_] := N[With[{X = X, G = IdentityMatrix[3], n = Length[X], m = 2}, Transpose[
    Table[(((X[[k]] - Centrum[U, X, i, n, m]).G.(X[[k]] - Centrum[U, X, i, n, m]))^
       (-1/(m - 1))) / Sum[(((X[[k]] - Centrum[U, X, j, n, m]).G.(X[[k]] -
            Centrum[U, X, j, n, m]))^(-1/(m - 1))), {j, 1, Length[U[[1]]]}], {i, 1, 2}, {k, 1, n}]]]]
```

Az itt szereplő „FixedPoint” függvény addig alkalmazza a fent definiált „Uj” függvényt, azaz addig hajtja végre az algoritmus 2. és 3. lépéseit, amíg a táblázat változatlan nem marad (de legfeljebb 100 lépést tesz).

```
FixedPoint[Új, U, 100]
```

Az 1. táblázat 7. és 8. oszlopa tartalmazza az algoritmus által szolgáltatott eredményeket. Figyeljük meg, hogy az eredmények jelentősen elérnek néhány helyen a kezdeti feltételezésektől (például a Mini Cooper esetében, amelyet kezdeti feltételezésként sportautónak jelöltünk meg, mégis az algoritmus ≈96%-os tagsággal a nem sportautó kategóriába sorolta).

A súlyadatok fontosságáról annyit érdemes megjegyezni, hogy amíg a most már nem szereplő Ferrari, és Porsche típusok a táblázatban voltak, addig semmilyen más típus nem került az ő clusztérükbe (még a Lotus modellek is csak 10% alatti tagok voltak!)

A következőkben az előbbi feladat megoldását ismételjük meg abban az esetben amikor a normát az X adatmátrix kovarianciamátrixának segítségével definiáljuk.

```
N[CovarianceMatrix[X]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0.497175 & -264.277 & -45.8814 \\ -264.277 & 447450. & 43361.8 \\ -45.8814 & 43361.8 & 6049.12 \end{pmatrix}$$

Az Ujabb függvény ugyanaz, mint a fenti, a névütközés elkerülése miatt van csak átnevezve. Látható, hogy a G mátrix új értéket kapott.

```
Újabb[U_] := With[{X = X, G = CovarianceMatrix[X], n = Length[X], m = 2}, Transpose[
   Table[(((X[[k]] - Centrum[U, X, i, n, m]).G.(X[[k]] - Centrum[U, X, i, n, m]))^
      (-1/(m - 1))) / Sum[(((X[[k]] - Centrum[U, X, j, n, m]).
           G.(X[[k]] - Centrum[U, X, j, n, m]))^(-1/(m - 1))), {j, 1, Length[U[[1]]]}],
    {i, 1, Length[U[[1]]]}, {k, 1, n}]]]
```

Ismét lefuttatjuk az algoritmust:

```
FixedPoint[Újabb, U, 100]
```

Az algoritmus által szolgáltatott eredményeket az 1. táblázat 9. és 10. oszlopában találhatjuk. A következőkben egy olyan trükköt mutatok be, amellyel az eredményeket átláthatóbbá tehetjük. Az α-vágás definícióját felidézve most a 1. táblázat 9. és 10. oszlopainak 0.1-nél kisebb elemeit szűrjük ki (azaz egy 0.1-vágást alkalmazunk).

A következő függvény válogatja ki a 0.1-nél kisebb elemeket. Megfigyelhető, hogy a hagyományos értelemben ez nem nevezhető α-vágásnak, hiszen a függvény 0-vá teszi a kicsi elemeket, a párjukat pedig 1-re növeli. (Pontosabban: egy α-vágást alkalmazunk, majd az eredményt ismét partícióvá tesszük.) Természetesen egy konkrét biztosító esetében az α értékének megválasztása biztosítástechnikai feladat.

```
g[i_] := Which[BB[[i]][[1]] < BB[[i]][[2]] ∧ BB[[i]][[1]] < 0.1,
  {0, 1}, BB[[i]][[2]] < BB[[i]][[1]] ∧ BB[[i]][[2]] < 0.1,
  {1, 0}, Min[BB[[i]]] > 0.1, {BB[[i]][[1]], BB[[i]][[2]]}]
```

Az eredmény az 1. táblázat utolsó két oszlopában található.

Ezek után rátérhetünk a kockázati szorzók meghatározására. A biztosítótársaságok az egyes állományokra a korábbi tapasztalatok alapján ismerik az állományok pótdíjszükségleteit, azaz egy olyan összeget, amelyet a díjkalkulációba nem építettek be, viszont pótdíjkét ki kell osztaniuk. Ez természetesen komoly biztosítástechnikai feladat, és a részletes megoldását itt nem célunk bemutatni, mindazonáltal a feladat egy egyszerűsített formáját egy egyszerű ötlettel könnyen megoldhatjuk a fenti eredmények alapján: tegyük fel, hogy a biztosító 40%-os nettódíj növekedést tart reálisnak egy sportautó esetén. Ezt a fent kiszámolt tagsági szintekkel korrigálhatjuk, azaz pl.: az Aston Martin V12 Vanquish 0.574931 szinten tag a sportautók csoportjában, így az ő kockázati szorzója legyen:

$$1 + (0.574931 \cdot 0.40) = 1.229972$$

3.7. További megjegyzések

A fuzzy logikát többféleképpen is használhatjuk csoportok kialakítására, a 4.4. szakaszban látjuk majd, hogy fuzzy halmazok metszeteivel is sikeresen lehet csoportokat létrehozni, továbbá lsd.:[4].

Korábban említettem, hogy súlyadatok hiányában a Ferrari modelleket ki kellett zárnom a vizsgálatból, érdekesség képpen közlöm az adataikat:

Ferrari Testarossa	2	4942	380
Ferrari Testarossa	2	4942	390
Porsche 911 Carrera	2	3387	300
Porsche 911 Carrera4	2	3596	320
Porsche 911 Carrera	2	3596	320
Porsche 911 Carrera4	2	3596	325
Porsche 911 GT	2	3600	360

Az 1. táblázat jelmagyarázata: (ajtók~ajtók száma, cc~hengerűrtartalom, LE~lóerő, Sport-NSport~$U^{(0)}$ mátrix elemei, C alg. S - C alg. NS~az algoritmus eredményei egységmátrix esetén, G n. S - G n. NS~a G által definiált normával képzett eredmények, α-vág S~az α-vágás utáni eredmények.)

1. Táblázat

Autó típusa	ajtók	cc	LE	Sport	NSport	C alg. S	C alg. NS	G n. S	G n. NS	α-vág S	α-vág NS
Aston martin V12 Vanquish	2	5935	460	1	0	0.5750	0.4249	0.5749	0.4251	0.5749	0.4251
Citroen Saxo1 XSX	4	1124	54	0	1	0.1308	0.8692	0.1308	0.8692	0.1308	0.8692
Citroen D Saxo1	4	1527	57	0	1	0.0035	0.9965	0.0002	0.9998	0.0000	1.0000
Citroen Saxo1 XSX	4	1124	60	0	1	0.1306	0.8693	0.1306	0.8694	0.1306	0.8694
Citroen Saxo1 SX	4	1361	75	0	1	0.0389	0.9611	0.0386	0.9614	0.0000	1.0000
Citroen Saxo1 VTLVTR	4	1587	88	0	1	0.0157	0.9843	0.0160	0.9840	0.0000	1.0000
Citroen Saxo1 VTS	4	1587	118	0	1	0.0180	0.9820	0.0176	0.9824	0.0000	1.0000
Focus1 Ford V,	4	1388	75	0	1	0.0290	0.9710	0.0287	0.9713	0.0000	1.0000
Focus1 Ford Turbo	4	1753	90	0	1	0.2671	0.7329	0.2721	0.7279	0.2721	0.7279
Duratec Focus1 Ford i V	4	1597	98	0	1	0.0213	0.9787	0.0221	0.9779	0.0000	1.0000
Focus1 Ford V	4	1596	100	0	1	0.0208	0.9792	0.0217	0.9783	0.0000	1.0000
Focus2 Ford i LXSE,	4	1988	111	0	1	0.8973	0.1027	0.9084	0.0916	1.0000	0.0000
Focus1 Ford V	4	1796	115	0	1	0.3985	0.6015	0.4052	0.5948	0.4052	0.5948
Focus1 Ford TDCi	4	1753	115	0	1	0.2735	0.7265	0.2787	0.7213	0.2787	0.7213
Focus2 Ford V	4	1988	130	0	1	0.9050	0.0950	0.9111	0.0889	1.0000	0.0000
Focus2 Ford i V ZTS	4	1988	131	0	1	0.9053	0.0947	0.9113	0.0887	1.0000	0.0000
Espirit2 Lotus Turbo	2	2174	218	1	0	0.9921	0.0079	0.9953	0.0047	1.0000	0.0000
Espirit2 i Lotus Turbo	2	2174	231	1	0	0.9892	0.0108	0.9950	0.0050	1.0000	0.0000
Espirit2 GT3 i Lotus Turbo V	2	1973	243	1	0	0.8810	0.1190	0.9052	0.0948	1.0000	0.0000
Espirit2 i Lotus S4 SE Turbo V	2	2174	268	1	0	0.9776	0.0224	0.9943	0.0057	1.0000	0.0000
Espirit i Lotus TurboS4s V	2	2174	288	1	0	0.9695	0.0305	0.9939	0.0061	1.0000	0.0000
Espirit i Lotus Sport Turbo V	2	2174	304	1	0	0.9622	0.0378	0.9935	0.0065	1.0000	0.0000
16. Espirit3 i Lotus Turbo VV8	2	3506	354	1	0	0.6778	0.3222	0.6773	0.3227	0.6773	0.3227
Cooper Mini S1	3	1598	163	1	0	0.0384	0.9616	0.0269	0.9731	0.0000	1.0000
Cooper1 Mini	3	1598	115	0	1	0.0236	0.9764	0.0238	0.9762	0.0000	1.0000
Astra2 Opel TDi	3	1995	101	0	1	0.9023	0.0977	0.9169	0.0831	1.0000	0.0000
Astra i Opel	4	1796	110	0	1	0.3966	0.6034	0.4037	0.5963	0.4037	0.5963
Astra i Opel	4	1998	111	0	1	0.9112	0.0888	0.9223	0.0777	1.0000	0.0000
Astra1 ECOTEC i Opel V	4	1796	122	0	1	0.4011	0.5989	0.4073	0.5927	0.4073	0.5927
Astra i Opel V	4	1998	128	0	1	0.9180	0.0820	0.9245	0.0755	1.0000	0.0000
Astra i Opel Sport V	3	1998	136	0	1	0.9206	0.0794	0.9255	0.0745	1.0000	0.0000
Astra ECOTEC i Opel V	4	2198	147	1	0	0.9901	0.0099	0.9916	0.0084	1.0000	0.0000
Astra i Opel Turbo V	4	1998	200	1	0	0.9257	0.0743	0.9332	0.0668	1.0000	0.0000
Astra G1 Opel V	4	1199	65	0	1	0.1030	0.8970	0.1028	0.8972	0.1028	0.8972
Astra G1 Opel TD	4	1700	68	0	1	0.1454	0.8546	0.1443	0.8557	0.1443	0.8557
Astra G1 Opel	4	1598	75	0	1	0.0225	0.9775	0.0214	0.9786	0.0000	1.0000
Astra DTI Eco4 G1 Opel V	4	1686	75	0	1	0.1202	0.8798	0.1201	0.8799	0.1201	0.8799
Astra DI G Opel	4	1995	82	0	1	0.8914	0.1086	0.9144	0.0856	1.0000	0.0000
Astra G1 i Opel	4	1598	85	0	1	0.0218	0.9782	0.0220	0.9780	0.0000	1.0000
Astra G1 Opel V	4	1389	90	0	1	0.0283	0.9717	0.0278	0.9722	0.0000	1.0000
Astra DTI G2 Opel V	4	1995	100	0	1	0.9018	0.0982	0.9168	0.0832	1.0000	0.0000
Astra G1 Opel V	4	1598	101	0	1	0.0221	0.9779	0.0229	0.9771	0.0000	1.0000
Astra G1 Opel V	4	1796	116	0	1	0.3988	0.6012	0.4055	0.5945	0.4055	0.5945
Astra G1 i Opel V	4	1796	125	0	1	0.4023	0.5977	0.4083	0.5917	0.4083	0.5917
Astra G Opel V	4	1998	136	0	1	0.9206	0.0794	0.9255	0.0745	1.0000	0.0000
Astra G i Opel V	4	2198	147	1	0	0.9901	0.0099	0.9916	0.0084	1.0000	0.0000
Astra G2 OPC Opel V	4	1998	160	1	0	0.9258	0.0742	0.9285	0.0715	1.0000	0.0000
Toyota V Yaris1	4	998	68	0	1	0.1716	0.8284	0.1712	0.8288	0.1712	0.8288
DI Toyota Yaris1	4	1364	75	0	1	0.0378	0.9622	0.0375	0.9625	0.0000	1.0000
Toyota V Yaris	4	1299	86	0	1	0.0631	0.9369	0.0626	0.9374	0.0000	1.0000
8. i Toyota V Yaris1	4	1497	106	0	1	0.0014	0.9986	0.0007	0.9993	0.0000	1.0000
2.0 i Polo1 Wolksvagen	4	1198	54	0	1	0.1038	0.8962	0.1036	0.8964	0.1036	0.8964
2.4 i Polo1 V Wolksvagen	4	1198	64	0	1	0.1034	0.8966	0.1032	0.8968	0.1032	0.8968
Polo1 SDI Wolksvagen	4	1896	64	0	1	0.6768	0.3232	0.7000	0.3000	0.7000	0.3000
Polo1 V Wolksvagen	4	1390	75	0	1	0.0283	0.9717	0.0280	0.9720	0.0000	1.0000
Polo1 TDI Wolksvagen	4	1422	75	0	1	0.0177	0.9823	0.0173	0.9827	0.0000	1.0000
FSI Polo1 Wolksvagen	4	1390	86	0	1	0.0280	0.9720	0.0276	0.9724	0.0000	1.0000
Polo1 V Wolksvagen	4	1390	100	0	1	0.0281	0.9719	0.0271	0.9729	0.0000	1.0000
0.9 Polo1 TDI Wolksvagen	4	1896	101	0	1	0.6977	0.3023	0.7101	0.2899	0.7101	0.2899
GTI Polo1 V Wolksvagen	4	1598	125	1	0	0.0255	0.9745	0.0244	0.9756	0.0000	1.0000

4. Kockázati biztosítás - másképpen

4.1. Kockázati biztosítás

Ebben a fejezetben a fuzzy számok alkalmazási lehetőségeit mutatom meg az életbiztosítási matematikában. Először egy kockázati biztosítás díját számoljuk ki abban az esetben amikor a halálozási adatok nem egyszerű (crisp), hanem fuzzy számok.

Kockázati biztosításnak az olyan biztosítási szerződéseket nevezzük, amelyeket a szerződők azért kötnek, hogy a haláluk után az örököseik (vagy a biztosítási szerződés kedvezményezettjei) a biztosítótól egy, a szerződésben előre megállapított pénzösszeget (biztosítási összeget, jele: S) kapjanak. Ennek a szerződésnek a díja a biztosítási díj. A biztosítási matematikából származó eredmények bemutatásával kezdem.

Tegyük fel, hogy egy x éves egyén még ξ évig fog élni. Ekkor ξ nemnegatív valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy az egyén a t időpont előtt hal meg:

$$ {}_tq_x = P(\xi < t). $$

A halálozási valószínűségre vonatkozó adatokat a biztosítók nagyméretű (általában 100000 egyénből álló) statisztikák alapján határozzák meg. A hagyományos eljárás szerint egy rögzített elemszámú mintának az életútját követik végig, minden évben megnézve, hogy az adott évben mennyien élnek még. Nem kell hosszasan taglalni, hogy ezzel a módszerrel milyen hibát követhetünk el, hiszen köztudott, hogy az átlagéletkor folyamatosan növekszik, a gyerekhalandóság csökken, stb. Ez indokolhatja, hogy a halálozási statisztikák alapján kapott értéket fuzzy számként fogjuk fel.

Most a kockázati biztosítással fogunk foglalkozni, ugyanis ebben az esetben, ha a biztosító az átlagosnál jobb egészségi állapotú ügyfelekkel köt szerződést (akiknél magasabb a várható életkor), akkor biztosítástechnikai haszon várható. (A későbbiekben látni fogjuk, hogy az egészségi állapottól is függő biztosítási díjak is jól modellezhetőek.) Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy most egyszeri díjas biztosítással foglalkozunk.

Mivel most nem célom egy teljes díjkalkulációt bemutatni, ezért csak a halálozási függvény értékeiből indulok ki (ezen formulák átnevezéséből keletkeznek az un. kommutációs függvények, amelyekkel táblázatos formában, egyszerűbben lehet a számításokat elvégezni.). Ezek alapján, ha az 1 Ft biztosítási összegű biztosítás nettó díját A_x-el jelöljük:

$$ 1.\ A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{j=o}^{\infty} d_{x+j}\, v^{j+1}; $$
$$ 2.\ A_{x:n} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=o}^{n-1} d_{x+j}\, v^{j+1}. $$

Itt l_x a halálozási függvényt jelöli, amelynek jelentése az, hogy egy 100000 emberből álló megfigyelt csoportból az x-edik évben még hányan vannak életben. (Itt természetesen a megfigyelés kezdetét vesszük 0. évnek.) v a diszkonttényező, és $d_{x+j} = l_{x+j} - l_{x+j-1}$.

Az első esetben a szerződés a biztosított haláláig érvényes, a második eset fejezi ki az időszakos biztosítás esetét, azaz amikor a biztosított a szerződést n évre köti (tehát az n. év után a biztosítót semmilyen kötelezettség nem terheli).

Ezek után egy 1988-ból származó halálozási táblázat adatai alapján (a teljes táblázat bemutatásától most tekintsünk el) kiszámítjuk a 45 éves férfi 10 évre szóló 1 Ft értékű kockázati biztosításának egyszeri díját, ha a kamat 4%.

Az adatok:

```
lx := {89801, 89043, 88220, 87331,
  86372, 85342, 84237, 83058, 81805, 80477, 79069}
```

A fenti képlet szerinti biztosítási díj meghatározása:

$$\frac{1}{\texttt{lx[[1]]}}\sum_{j=0}^{9}(\texttt{lx[[1+j]]}-\texttt{lx[[1+j+1]]})\left(\frac{1}{1+0.04}\right)^{j+1}$$

```
0.0948257
```

Ezek szerint, ha a szerződő 1 Ft-ot akar az örököseinek juttattni halála esetén, akkor 0.0948257 Ft egyszeri díjat kell fizetnie. Természetesen a biztosítási díj egyenesen arányos a biztosítási összeggel, azaz, ha a biztosítási összeg S, akkor $0.0948257 \cdot S$ lesz a biztosítás díja.

4.2. Fuzzy modell

Most azt vizsgáljuk meg, hogy miképpen változik a biztosítási díj abban az esetben, ha a halálozási adatok fuzzy számok [4]. Itt fontos megkötés, hogy a halálozási táblában egymást követő értékek monoton csökkenő sorozatot alkotnak, hiszen ezek a megfigyelt 100000 fős alaphalmaz abban az évben még élő tagjainak a számai.

```
k[x_] := {x - 150, x - 100, x + 200, x + 400}
```

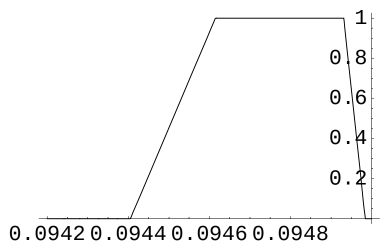
```
lx2 := Map[k, lx]
```

$$\texttt{l := Reverse}\left[\frac{1}{\texttt{lx2[[1]]}}\sum_{j=0}^{9}(\texttt{lx2[[1+j]]}-\texttt{lx2[[1+j+1]]})\left(\frac{1}{1+0.04}\right)^{j+1}\right]$$

```
l
```

```
{0.0944052, 0.094615, 0.0949314, 0.0949843}
```

```
Plot[TagságiFüggvény[l[[1]], l[[2]], l[[3]] , l[[4]] , x], {x, 0.0942, 0.0950}]
```



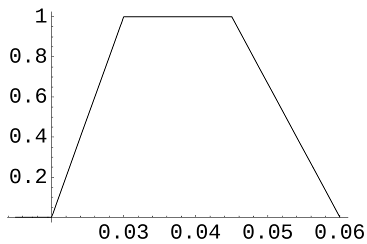
Itt jön jól, hogy a tagsági függvényt lehet nem szimmetrikusnak is venni, ugyanis a fent említett érvelés miatt érdemesnek látszik a fuzzy számot úgy átalakítani, hogy az átlagéletkor növekedését, az évközi (havi) díjfizetés esetén *ismeretlen évközi halálozási adatokat* becsüljük és más egyéb várakozásokat figyelembe vegyük.

4.3. Fuzzy diszkonttényezők

A biztosítók díjkalkulációjában fontos szerepet játszik a technikai kamat. Ezt a biztosítási szerződésekben egy rögzített számként adják meg (lásd a fenti példában: 4%), ám a belső a díjkalkulációk esetén érdemesnek tűnik a technikai kamatot fuzzy számként értelmezni. Ilyen belső díjkalkulációk a különböző cash flow számítások, az embedded value számítások, illetve a termékek profitabilitását meghatározó számítások. [2]. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk tehát, hogy mi történik, ha a technikai kamatot is fuzzy számnak tekintjük.

Tegyük fel tehát, hogy a kamatláb fuzzy szám, amely fuzzy szám a „körülbelül 0.04%" fogalomnak felel meg. Tagsági függvénye legyen:

```
Plot[TagságiFüggvény[0.020, 0.030, 0.045, 0.06, x], {x, 0.015, 0.06}]
```



Ezek alapján ha az $\frac{1}{1+0.04}$ számot akarjuk modellezni:

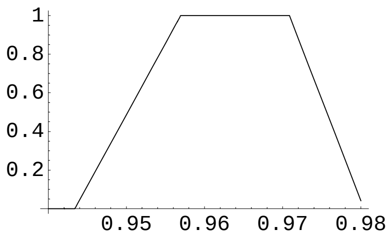
```
f[x_] := 1 / (1 + x)
```

```
k1 := Map[f, { 0.020, 0.030, 0.045, 0.06}]; k1
```

```
{0.980392, 0.970874, 0.956938, 0.943396}
```

```
kamat := TagságiFüggvény[k1[[4]], k1[[3]], k1[[2]] , k1[[1]] , x]
```

```
Plot[kamat, {x, 0.94, 0.98}]
```



Most a fent szereplő nem-fuzzy számítások fuzzy megfelelői következnek. A Hatvány nevű függvény a listák elemeinek hatványozására alkalmas:

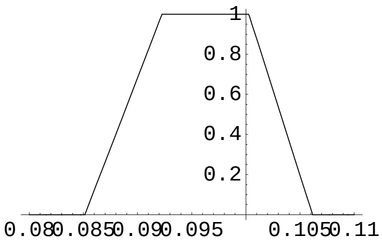
```
Hatvány[x_] := x^(j + 1)
```

Az l2 egy olyan listát készít, amely a második fejezetben elmondott fuzzy számokra vonatkozó számítási azonosságok szerint határozza meg a biztosítási díj tagsági függvényének paramétereit:

$$\texttt{l2} := \texttt{Reverse}\left[\frac{1}{\texttt{lx[[1]]}}\sum_{j=0}^{9}(\texttt{lx[[1+j]]} - \texttt{lx[[1+j+1]]})\ \texttt{Map[Hatvány, k1]}\right]$$

Az eredmény grafikusan:

```
Plot[TagságiFüggvény[l2[[1]], l2[[2]], l2[[3]] , l2[[4]] , x], {x, 0.08, 0.11}]
```



A konkrét paraméterek:

```
l2
```

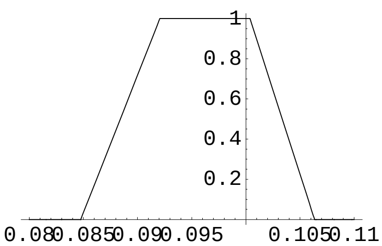
{0.0851301, 0.0922594, 0.100271, 0.106169}

Most azt vizsgáljuk meg, hogy miképpen változnak a kapott értékek abban az esetben, ha nemcsak a kamatláb, de a halálozási adatok is fuzzy számok.

$$\texttt{b} := \texttt{Reverse}\left[\frac{1}{\texttt{lx2[[1]]}}\sum_{j=0}^{9}(\texttt{lx2[[1+j]]} - \texttt{lx2[[1+j+1]]})\ \texttt{Map[Hatvány, k1]}\right];\ \texttt{b}$$

{0.0847526, 0.0920543, 0.100383, 0.106346}

```
Plot[TagságiFüggvény[b[[1]], b[[2]], b[[3]] , b[[4]] , x], {x, 0.08, 0.11}]
```



Az eredmények hasonlóak a fentiekhez,de azt is láthatjuk,hogy minél több fuzzy szám van a modellben,annál erősebben érződik az eredmény fuzzy jellege.

4.4. Biztosítottak csoportosítása egészségi állapot alapján

Eljutottunk addig, hogy a biztosítás díját fuzzy számként előállítottuk, de felmerül a kérdés, hogy a kapott fuzzy számból hogyan kaphatjuk meg a tényleges biztosítási díjat. Általánosságban, amikor egy fuzzy irányítási rendszer visszatérési értéke fuzzy szám ún. defuzzyfikációs módszerekkel készítik el szükséges crisp (nem - fuzzy) értékeket. A legismertebb módszerek a súlypont, a geometriai középpont, a maximumok közepe, és a középső maximum módszer. Egy másik módszert fogok bemutatni, amely a biztosítási üzletág sajátosságaiból adódik.

A biztosítási szakmában bevett szokás az ügyfelek egészségi állapotának függvényében árkedvezményt adni az átlagosnál jobb egészségi állapotú ügyfeleknek lsd.: [4]. Az egészségi állapot mérésére legtöbbször a koleszterinszintet, a nyugalmi vérnyomást, a nikotinfogyasztást használják, de előfordul, hogy a családi kórtörténeteket, illetve a rendszeres testmozgást is figyelembe veszik. Ezekkel az adatokkal azonban a hagyományos logika merevsége miatt nehézkesen lehet csak csoportokba sorolni az ügyfeleket. Az első problémája, hogy ha a szabály az, hogy 180-nál nagyobb koleszterinszinttel senki sem kerülhet a kedvezményezett egyének csoportjába, akkor egy olyan egyén, akinek 181-es a koleszterinszintje nem kerülhet bele a csoportba még akkor sem, ha minden más adata maximálisan kielégítő. A másik probléma, hogy minél több egészségi adatot vizsgálunk annál erősebben érződik az előbbi hatás.

Most egy olyan szabályozás következik, amely az előbbi problémákat jobban kezeli: Tegyük fel, hogy három orvosi adatot figyelünk meg:

1. koleszterinszint (mg/dl)
2. vérnyomás (Hgmm)
3. tényleges testsúy/optimális testsúly (%)

Ebben a modellben fuzzy halmazokat alkalmazunk, azaz egy halmazba tartozás logikai értéke nem csak 0, vagy 1 lehet, hanem egy fuzzy tagsági függvény segítségével a lehetséges értékeket a [0, 1] intervallumra képezzük le.

Tegyük fel, hogy a Magyar lakosság átlagos adatai a következőek:

Koleszterinszint: 210mg/dl;
Vérnyomás: 138Hgmm;
Testsúlyhányados: 115%.

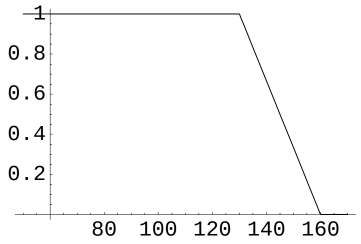
Ezek alapján alakítsuk úgy a modellünket, hogy az átlagos adatok $\approx$0.8 tagsági szinten helyezkedjenek el (ugyanis úgy akarjuk beállítani a modellt, hogy a 3 adat alapján a készítendő metszethalmazban az átlagos egyén 0.5 tagsági értéket kapjon):
Legyenek a különböző adatokhoz rendelt tagsági függvények a következők:

```
Koleszterin[x_] := TagságiFüggvény[0, 1, 200, 240, x]
```

```
Plot[Koleszterin[x], {x, 100, 260}]
```

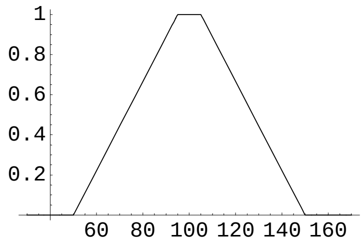
```
Vérnyomás[x_] := TagságiFüggvény[0, 1, 130, 160, x]
```

```
Plot[Vérnyomás[x], {x, 50, 170}]
```



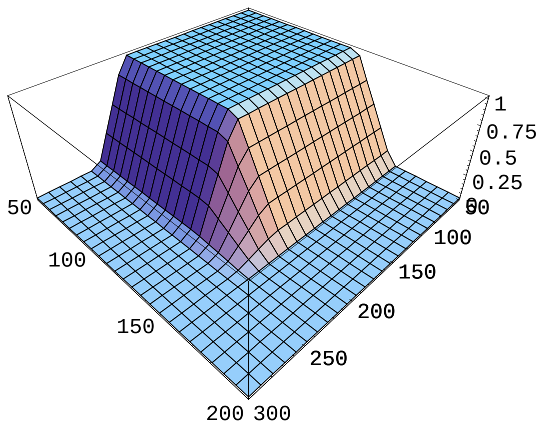

```
Testsúly[x_] := TagságiFüggvény[50, 95, 105, 150, x ]
```

```
Plot[Testsúly[x], {x, 30, 170}]
```



Ha csoportokat szeretnénk létrehozni, akkor el kell készítnünk a fenti fuzzy halmazok metszeteit. A fent leírtak szerint elégséges a metszethalmaz tagsági függvényét megadni, mivel ez meghatározza a fuzzy metszethalmazt. A második fejezetben leírtak szerint először az algebrai szorzat definíciójával számolunk:

```
Plot3D[Szorzat[Koleszterin[x], Vérnyomás[y]],
 {x, 50, 300}, {y, 50, 200}, ViewPoint → {1, 1, 1}]
```



A Metszet1 függvény a fenti három halmaz metszetének tagsági függvény értékeit adja meg.

```
Metszet1[x_, y_, z_] :=
 Szorzat[Szorzat[Koleszterin[x], Vérnyomás[y]], Testsúly[z]]
```

Az átlagos szerződőre:

```
N[Metszet1[210, 138, 115]]
```

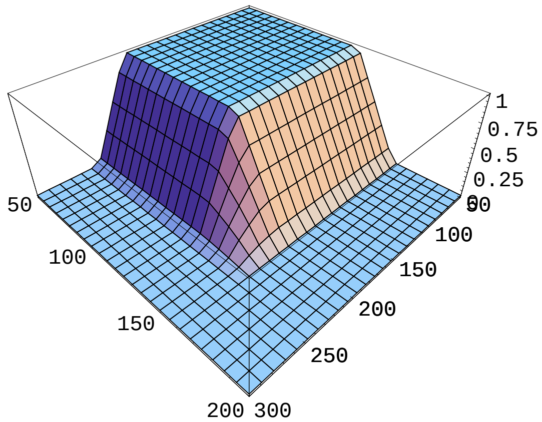
```
0.427778
```



```
0.427778
```


Most számoljuk ki ugyanezt a Hamacher operátorral:

```
Plot3D[Hamacher[0.5, Koleszterin[x], Vérnyomás[y]],
 {x, 50, 300}, {y, 50, 200}, ViewPoint → {1, 1, 1}]
```



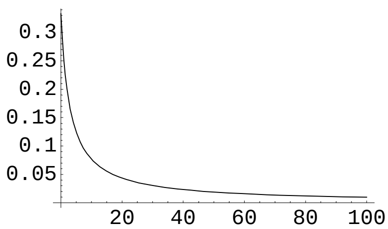

```
Metszet2[p_, x_, y_, z_] :=
 Hamacher[p, Hamacher[p, Koleszterin[x], Vérnyomás[y]], Testsúly[z]]
```

```
N[Metszet2[0.01, 210, 138, 115]]
```

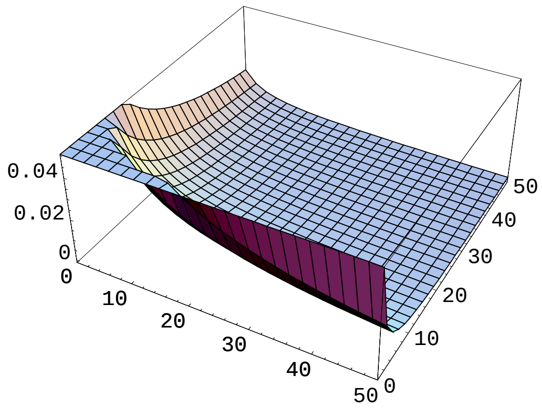
```
0.503552
```

Látható, hogy a fentiektől lényegesen eltérő eredményt kaptunk, amit a p paraméter okoz. A p-től való függést szemlélteti a következő két ábra:

```
Plot[Hamacher[p, Koleszterin[220], Vérnyomás[145 ]], {p, 0, 100}]
```



```
Plot3D[Hamacher[q, Hamacher[p, Koleszterin[210], Vérnyomás[145 ]],
  Testsúly[125]], {p, 0, 50}, {q, 0, 50}]
```



Most érkeztünk el ahhoz a ponthoz, ahol értelmet nyer a tagsági függvény értéke. Az első részben kiszámolt fuzzy biztosítási díj defuzzyfikálására a most kiszámított tagsági értékeket használjuk: úgy adjuk meg a konkrét díjat, hogy az 1 tagsági függvény értékű (vagy tetszőlegesen megadott α-vágatnak megfelelő) díjértékeket súlyozzuk az egészségi állapot alapján kiszámolt értékkel.

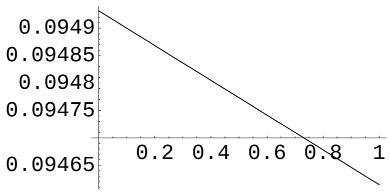
A TénylegesDíj függvény argumentuma tehát a kapott tagsági szint lesz (az egészségi állapotra vonatkozó), az eredmény pedig a konkrét Díj.

```
TénylegesDíj[x_] := (l[[2]] - l[[3]]) x + l[[3]]
```

```
TénylegesDíj[0.5]
```

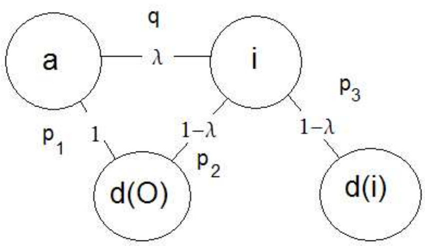
```
0.0947732
```

```
Plot[TénylegesDíj[x], {x, 0, 1}]
```



4.5. Dread Disease, avagy „Rettegett betegségek"

Az eddigi számítások során csak maga a biztosítási összeg volt crisp érték, de most egy speciális biztosítás kapcsán lehetővé válik, hogy ezt is fuzzy számként fogjuk fel. Ez a speciális biztosítás az un. rettegett betegségekre vonatkozik, lényege röviden az, hogy egyes betegségek diagnosztizálása is biztosítási eseménynek számít. Ilyen rettegett betegségekre példa az AIDS, a rák, sőt a by-pass műtét is. Az ilyen szerződést általában életbiztosítással együtt kötik meg, és lehetőség van arra, hogy az S biztosítási összeg λ - szorosát ($0 \leq \lambda \leq 1$) a betegség diagnosztizálásakor fizeti ki a biztosító, fennmaradó $1 - \lambda$- szorosa pedig a biztosítási összeg lesz a későbbiekben. Az ilyen tipusú szerződéseket egy 4 állapotú Markov-láncként lehet értelmezni.



Itt „*a*" a belépés állapotát, „*i*" a betegség, $d(i)$ és $d(O)$ pedig azt jelenti, hogy az elhalálozás a betegség, illetve más ok miatt következett be. A rajzon szereplő λ a fenti leírás szerint a biztosító fizetési kötelezettségeit jelenti 1 egységnyi biztosítási összeg esetére, q, p_i pedig az egyes állapotok átmenetvalószínűségeit. Most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor csak két időszakot nézünk, és egy időszakra egy állapotváltás juthat. Ekkor a lehetséges állapotváltások:

Átmenet	Készpénzérték	Átmenetvalószínűség
$a \to d(o)$	1	p_1
$a \to a \to a$	0	$(1-q-p_1)^2$
$a \to a \to d(o)$	1	$(1-q-p_1)\,p_1$
$a \to a \to i$	λ	$(1-q-p_1)\,q$
$a \to i \to i$	λ	$q\,(1-p_2-p_3)$
$a \to i \to d(o)$	$\lambda+1-\lambda$	$q\,p_2$
$a \to i \to d(i)$	$\lambda+1-\lambda$	$q\,p_3$

Tegyük fel, hogy a biztosított az első időszak elején köti meg a biztosítást, és egyösszegben fizet a szolgáltatásért, és a kamattól is eltekintünk. Ekkor

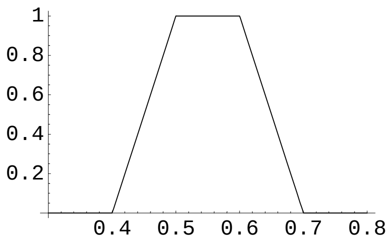
$$\textit{nettó biztosítási díj} \;=\; \textit{a biztosító várható kifizetései}$$

$$\Pi \;=\; p_1 + 0 + (1-q-p_1)\,p_1 + \lambda q\,(1-q-p_1) + \lambda q\,(1-p_2-p_3) + q\,p_2 + q\,p_3$$

Mi történik, ha a λ fuzzy szám, azaz a szerződés megkötésekor csak a körülbelüli értékről állapodnak meg a szerződő felek. Ebben az esetben a biztosított a betegség diagnosztizálása után maga dönthetné el (immár jobban előrelátva az adott betegséggel járó kiadásait), hogy a biztosítási összeg mekkora részét kéri el (itt fontos megjegyezni, hogy részletfizetés esetén nem feltétlenül érdemes az egész összeget elkérni, mivel a biztosítás ilyenkor díjmentessé válik). Természetesen ezzel a fenti várható érték is egy fuzzy számmá válik (lineáris függés!), és nyilvánvaló, hogy ha nem megfelelő defuzzyfikációt alkalmazunk, akkor a biztosító veszteséggel zárhat. Ebben az esetben a „körülbelül λ" fogalmat reprezentáló tagsági függvény alakja, mérete is számít.

Azt kell megérteni, hogy a körülbelüliség egy ilyen kalkulációnál plusz szolgáltatásként jelenik meg, és ezért a biztosítás díja nőni fog. Sokféle politika kialakítható pl.: a úgy defuzzyfikálhatunk, hogy a lehetséges legnagyobb λ értékkel számolunk, vagy amikor a betegség bekövetkezik és a λ értéke konkréttá válik, akkor egy korrekciót végzünk a biztosítási összegen (azaz adott λ-val, és biztosítási díjjal számolva meghatározzuk, hogy mennyi a biztosítási összeg, és ennek megfelelően korrigáljuk azt), vagy a λ legnagyobb értékével számolunk, és a realizációkor az esetleges biztosítástechnikai nyereségből új biztosítást kötünk az ügyfélre. Most azonban a fenti számításokhoz hasonlóan tekintsük mind λ-t, mind az átmenetvalószínűségeket fuzzy számoknak.

```
Plot[TagságiFüggvény[0.4, 0.5, 0.6, 0.7, x], {x, 0.3, 0.8}]
```



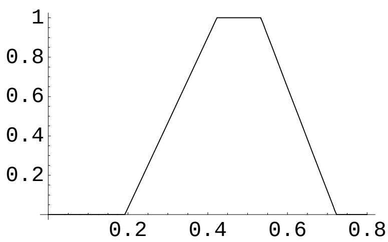
A fent leírt számítási azonosságok miatt most csak a listákkal való műveleteket írom le, abban az esetben, amikor az átmenetvalószínűségek is fuzzy számok:

```
p₁ := {0, 0.09, 0.11, 0.2}
p₂ := {0.4, 0.45, 0.5, 0.55}
p₃ := {0, 0.08, 0.1, 0.19}
q := {0.2, 0.25, 0.3, 0.35}
λ := {0.4, 0.5, 0.6, 0.7}
```

```
l = p₁ + (1 - q - p₁) p₁ + λ q (1 - q - p₁) + λ q (1 - p₂ - p₃) + q p₂ + q p₃
```

```
{0.192, 0.42315, 0.5331, 0.72295}
```

```
BiztosításNettóDíja =
 Plot[TagságiFüggvény[l[[1]], l[[2]], l[[3]], l[[4]], x], {x, 0, 0.8}]
```



5. Fuzzy szabályozási rendszerek a biztosítási matematikában

Ebben a fejezetben a fuzzy logika szabályozáselméleti alkalmazását mutatom be. A fuzzy szabályozási rendszereket sok kritika érte és éri mind a mai napig, de látni fogjuk, hogy a biztosítási matematikában (és általában a pénzügyi matematikában) jól alkalmazható eszköz.
Az eddigi tárgyalásmódtól eltérően most először magával a példával ismerkedünk meg, és majd csak a fejezet végén foglalom össze a elméleti eredményeket.

5.1. Viszontbiztosítás

A most következő példában azt tesszük fel, hogy egy biztosítótársaság viszontbiztosítást köt egy állományára, és ennek paraméterét, a viszontbiztosítási hányadot minden évben újraértékelik és ha szükséges, változtatnak a szerződésen.

Mi is a viszontbiztosítás? A viszontbiztosító a biztosítók (ezentúl „direkt biztosítók”) biztosítója. A viszontbiztosítási szerződések lényege az, hogy a direkt biztosító a saját beszedett díjainak egy részét átengedi a viszontbiztosítónak, amely ennek fejében részt vállal a károk megtérítésében. A viszontbiztosítás, mint üzletág közel egyidős a biztosítással, és mára rengeteg különböző típusú szerződés alakult ki. Ezek közül most az egyik alaptípussal fogunk foglalkozni, a kvóta viszontbiztosítással.

A kvóta viszontbiztosítás lényege az, hogy amilyen arányban részesül a viszontbiztosító a díjakból, olyan arányban vállal részt a kifizetésekből is. Ilyen szerződések köttetnek egész üzletágakra, állományokra, de néha akár egy konkrét biztosítási szerződésre is. Főleg induló biztosítótársaságok kedvelik, mivel ez a szerződés védelmet nyújt arra az esetre, amikor a károk gyakorisága egy állományon belül megnövekszik (amit tehát még nem tudtak belekalkulálni a díjakba), a biztosító szolvenciáját is javítja valamint bátrabbá teszi a direkt biztosítót abban az értelemben, hogy így olyan kockázatokat is elvállalhat, amely viszontbiztosítás nélkül meghaladná a pézügyi kapacitását. A kvóta szerződés hátránya, hogy a biztosító nem válogathat a kockázatok között, ha például egy egész állományra köti meg a szerződést, akkor olyan kockázatokat is viszontbiztosításba kell adnia, amelyeket pénzügyileg elbírna. Most térjünk rá a kvóta szerződések matematikai megfogalmazására!

5.2. A kvóta (arányos) viszontbiztosítás

Tegyük fel, hogy a direkt biztosító éves bevételének q részét megtartja ($0 \le q \le 1$), a fennmaradó $1-q$ részét átadja a viszontbiztosítónak, amely ezért a károk $1-q$ részét fizeti. Először azt vizsgáljuk meg, hogy az ilyen szerződések a várható-érték elvvel összhangban vannak-e.

Jelölje X a kifizetendő kárösszegnek megfelelő valószínűségi változót amelyet biztosítási szemmel nézve a P biztosítási díjával és $F(x)$ eloszlásával jellemezhetünk ($P = \int_0^\infty x\, d\, F(x)$). A direkt biztosító kockázatát a viszontbiztosítási szerződés megkötése után a $P_0 = q \cdot P,\ F_0(x) = \mathcal{P}(q \cdot X \le x)$ pár jellemzi, a viszontbiztosító kockázatát pedig a $P_1 = (1-q)\,P,\ F_1(x) = \mathcal{P}((1-q)\,X \le x)$.
Ezek alapján számoljuk ki a nulla pótdíj melletti viszontbiztosítási díjat!

$$P_1 = \int_0^\infty x\, d\, F_1(x) = \int_0^\infty (1-q)\, x\, d\, F(x) = (1-q) \int_0^\infty x\, d\, F(x) = (1-q)\, P$$

Persze a valóságban a viszontbiztosítók pótdíjat is kérnek, de most ettől eltekinthetünk. A következőkben a q megtatrtási hányad meghatározásával foglalkozunk. Ennek megfelelő meghatározása nagyon fontos, mégis nehéz, hiszen egyfelől a biztosító biztonságát (szolvenciáját) növeli, másfelől viszont a bevételeit csökkenti.

5.3. A feladat megfogalmazása

Tegyük fel, hogy a direkt biztosító egy állományára kvóta viszontbiztosítást kötött, megtartási hányada kezdetben 0.5, amelyet minden év elején változtathat. A változtatás mértékét a biztosító egy szakértője határozza meg előző évi pénzügyi kapacitása, az állományon belüli kárgyakoriság változás, és az átlagkár nagyságának függvényében. Most a szakértő döntését fogjuk modellezni.

A döntést befolyásoló változókat természetesen megfelelően számszerűsíteni kell például a pénzügyi kapacitás mérésére használhatjuk a szavatolótőke és a törvényileg előírt minimális szavatolótőke szükséglet különbségét. Most ezekkel a skálázásokkal nem fogunk foglalkozni, az egyszerűség kedvéért a következőket tesszük fel:

A pézügyi kapacitást a [0, 100] intervallum egy pontja reprezentálja, a kárgyakoriság változását az előző évi kárgyakoriság és az azt megelőző év kárgyakoriságának arányával jellemezzük (ha nincs változás, akkor az értéke 1) és az átlagkár nagyságának változását az előzőhöz hasonlóan arányossággal adjuk meg.

Ezek után fogadjuk el, hogy a szakértő a döntését a következő verbális szabályrendszer alapján hozza meg:

1. Ha a pénzügyi kapacitás kicsi, az átlagkár mértéke nő és a kárgyakoriság nő akkor csökkenti a megtartási hányadot.

2. Ha a pénzügyi kapacitás közepes, az átlagkár mértéke változatlan és a kárgyakoriság is állandó akkor nem változtat.

3. Ha a pénzügyi kapacitás magas, az átlagkár mértéke csökken és a kárgyakoriság csökken akkor növeli a megtartási hányadot.

4. Ha a fenti három eset egyike sem igaz akkor nem változtat

5. A megtartási hányadot legfeljebb 10%-al növeli, a maximális csökkentés mértéke pedig 20%

5.4. Megoldás

A fuzzy szabályozás természetes környezetet biztosít az ilyen verbális szabályok kezelésére. A szabályozás első lépéseként a fenti hipotéziseket fuzzy halmazok metszeteként állítjuk elő. Ezt úgy tesszük meg, hogy az egyes változók állapottereit három részre partícionáljuk (kicsi, közepes, magas), és elkészítjük a különböző fogalmakat reprezentáló fuzzy halmazokat. Külön halmazt készítünk például a „pénzügyi kapacitás kicsi”, „pénzügyi kapacitás közepes”, „pénzügyi kapacitás magas” fogalmaknak.

Most a már ismert TagságiFüggvény nevű függvény segítségével definiáljuk a PénzügyiKapacitás nevű skalár-vektor függvényt, amely egy olyan vektort ad meg, amely három komponense azt mutatja meg, hogy a pézügyi kapacitás konkrét értéke milyen mértékben „kicsi”, ”közepes” és „magas”.

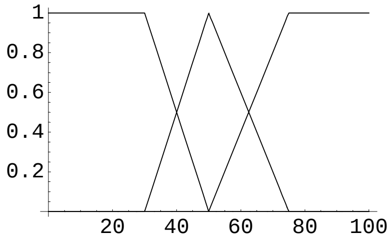
```
PénzügyiKapacitás[x_] := N[{TagságiFüggvény[-1, 0, 30, 50, x],
   TagságiFüggvény[30, 50, 50, 75, x], TagságiFüggvény[50, 75, 100, 101, x]}]
```

```
PénzügyiKapacitás[39]
```

```
{0.55, 0.45, 0.}
```

Látható, hogy a három komponens összege mindig 1, grafikusan:

```
Plot[{TagságiFüggvény[-1, 0, 30, 50, x], TagságiFüggvény[30, 50, 50, 75, x],
  TagságiFüggvény[50, 75, 100, 101, x]}, {x, 0, 100}]
```



Most a fentihez hasonlóan elkészítjük a kárgyakoriság változásának és az átlagkár változásának megfelelő függvényeket.

```
ÁtlagkárVáltozás[x_] := N[{TagságiFüggvény[1, 1.2, 100, 101, x],
   TagságiFüggvény[0.8, 1, 1, 1.2, x], TagságiFüggvény[-1, 0, 0.8, 1, x]}]
KárgyakoriságVáltozás[x_] := N[{TagságiFüggvény[1, 1.5, 100, 101, x],
   TagságiFüggvény[0.5, 1, 1, 1.5, x], TagságiFüggvény[-1, 0, 0.5, 1, x]}]
```

```
ÁtlagkárVáltozás[1.05]
KárgyakoriságVáltozás[1.2]
```

```
{0.25, 0.75, 0.}
```

```
{0.4, 0.6, 0.}
```

A most definiált függvény már a fenti hipotézisek tagsági szintjeit mutatja meg, azaz azt, hogy az egyes szabályok milyen fokon teljesülnek. A függvény három argumentuma a pénzügyi kapacitásnak, az átlagkárváltozásnak és a kárgyakoriságváltozásnak megfelelő konkrét értékek, az eredményként kapott vektor komponensei pedig rendre az 1., 2., 3. szabályok tagsági szintjei. A 4. szabálynak nyilvánvalóan a (0, 0, 0) vektor felel meg (amikor egyik szabály sem teljesül). Fontos megjegyezni, hogy most a halmazok metszeteit a minimum-operátorral adjuk meg.

```
HipotézisekSzintjei[x_, y_, z_] := Table[Min[PénzügyiKapacitás[x][[i]],
   ÁtlagkárVáltozás[y][[i]], KárgyakoriságVáltozás[z][[i]]], {i, 3}]
```

Egy konkrét számhármasra:

```
HipotézisekSzintjei[35, 1.15, 1.2]
```

```
{0.4, 0.25, 0.}
```

Azaz az első szabály (amely szerint a saját megtartást kell csökkenteni) 0.4 szinten teljesül, a második 0.25 szinten, a harmadik pedig 0 szinten.

A fuzzy szabályozási rendszereknél fontos, hogy a céljainknak megfelelő metszet-definíciót használjuk. Az algebrai szorzat operátorral például ugyanerre a számhármasra a következő eredményt kapjuk::

```
HipotézisekSzintjei2[x_, y_, z_] := Table[PénzügyiKapacitás[x][[i]]
   ÁtlagkárVáltozás[y][[i]] KárgyakoriságVáltozás[z][[i]], {i, 3}]
```

```
HipotézisekSzintjei2[35, 1.15, 1.2]
```

```
{0.225, 0.0375, 0.}
```

Látható, hogy jelentős az eltérés, azonban a gyakorlati példákban nem okozhat nehézséget a megfelelő operátor kiválasztása (lsd.: 2.1.8).

A végleges döntést még befolyásolja a megtartási hányadra vonatkozó alsó és felső korlát, azaz legfeljebb 10%-al növelhetjük és 20%-al csökkenthetjük a megtartási hányadot. A maximumot akkor érjük el, ha az első vagy a harmadik hipotézis 1 tagsági szinten teljesül. Az 1 szinten teljesülő hipotéziseknek megfelelő változtatásokat egy vektorba rendezzük:

```
Változtatások := {0.8, 1.0, 1.1}
```

A szabályozás utolsó lépése a végleges döntés megadása. Ebben az egyes hipotézisek tagsági szintjeivel súlyozzuk a változtatásokat. A legutolsó Döntés nevű függvényünk tehát ezt a lépést számítja ki.

```
Döntés[x_, y_, z_] := If[HipotézisekSzintjei[x, y, z] == {0, 0, 0},
  1, (HipotézisekSzintjei[x, y, z].Változtatások) /
   Sum[HipotézisekSzintjei[x, y, z][[i]], {i, 1, 3}]]
```

```
Döntés[35, 1.15, 1.2]
```

```
0.876923
```

Azaz a fenti számhármas esetén a megtartási hányad csökkentését „javasolja a szakértőnk”. Érdekességképpen nézzük meg, hogyan változik a döntés, ha a HipotézisekSzintjei2 függvényt használjuk, azaz amikor az algebrai szorzat definíciójával végezzük a metszetképzést:

```
Döntés2[x_, y_, z_] := If[HipotézisekSzintjei2[x, y, z] == {0, 0, 0},
  1, (HipotézisekSzintjei2[x, y, z].Változtatások) /
   Sum[HipotézisekSzintjei2[x, y, z][[i]], {i, 1, 3}]]
```

```
Döntés2[35, 1.15, 1.2]
```

```
0.828571
```

```
Dönt[x_, y_, z_] := {x, y, Döntés[100 x, 2 y, 2 z]}
```

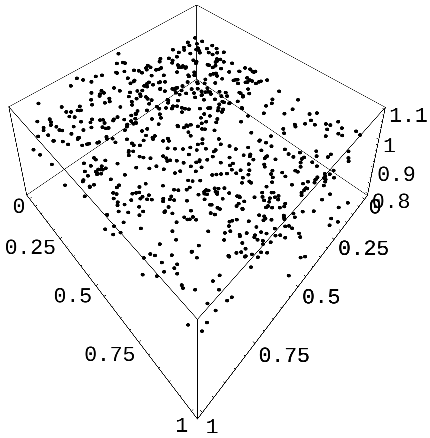
```
Dönt[0.2, 0.45, 0.3]
```

```
{0.2, 0.45, 1}
```

```
pontok := Table[
  Dönt[Random[Real, {0, 1}], Random[Real, {0, 1}], Random[Real, {0, 1}]], {i, 700}]
```

```
<< Graphics`Graphics3D`
```

```
ScatterPlot3D[pontok, AspectRatio → 1.1, ViewPoint → {1, 1, 1}]
```



5.5. Fuzzy szabályozási rendszerek tervezése

A szabályozási rendszerek általános tervezésével kapcsolatban lsd.: [3].

1. A szabályok verbális meghatározása

2. A hipotéziseknek megfelelő fuzzy halmazok előállítása.

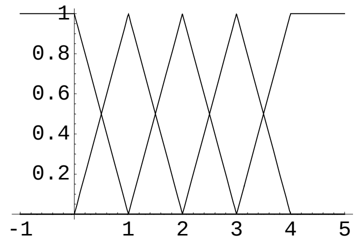
(i) a j-edik bemeneti változóhoz tartozó fuzzy halmazok előállításához partícionáljuk az $X_j = [x_{j,1}\ ,\ x_{j,n(j)}]$ teret $n-1$ diszjunkt intervallumra. ($n(j)$, az X_j téren értelmezett fuzzy halmazok száma). A részintervallumok határolópontjai legyenek: $x_{j,1} \le x_{j,2} \le \ldots \le x_{j,n(j)}$.

(ii) A partícionálás után következhet a tagsági függvények megadása. A fenti *TagságiFüggvény* nevű képlettel a definíciók a következő alakor öltik:

$$A_{j,1} = \text{TagságiFüggvény}[x_{j,1} - 100,\ x_{j,1} - 99,\ x_{j,1},\ x_{j,2},\ x]$$
$$A_{j,k(j)} = \text{TagságiFüggvény}[x_{j,k(j)-1},\ x_{j,k(j)},\ x_{j,k(j)},\ x_{j,k(j+1)},\ x]$$
$$A_{j,n(j)-1} = \text{TagságiFüggvény}[x_{j,n(j)-1},\ x_{j,n(j)},\ x_{j,n(j)} + 99,\ x_{j,n(j+1)} + 100,\ x]$$

Azaz külön definíció kell a két szélső halmaznak, valamint a közbülső halmazoknak.

```
Plot[{TagságiFüggvény[-100, -99, 0, 1, x], TagságiFüggvény[0, 1, 1, 2, x],
  TagságiFüggvény[1, 2, 2, 3, x], TagságiFüggvény[2, 3, 3, 4, x],
  TagságiFüggvény[3, 4, 99, 100, x]}, {x, -1, 5}]
```



(iii) A logikai operátorokkal kombináljuk a kapott halmazokat.

3. Az $\{y_i\}$ kimeneteli értékeket megadjuk. Ezt úgy célszerű megtenni, hogy az y_i értéke legyen az az érték, amit akkor szeretnénk alkalmazni, ha az i-edik hipotézis 1.0 fokon tag.

Általánosságban a fuzzy rendszer n fuzzy szabány együttese:

$$\text{Ha } x\ A_i \text{ tulajdonságú} \rightarrow y := y_i,\ \ i = 1,\ ..,\ n$$

Ezek után ha egy adott $\tilde{x}$ bemenetünk van, kiszámítjuk, hogy az x milyen fokon elégíti ki az A_i hipotézist ($\forall$ i-re), azaz kiszámítjuk $m_{A_i}(\tilde{x})$ értékét. Az $\tilde{y}$ kimeneti értékhez pedig képezzük a következő súlyozott átlagot:

$$\tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\, m_{A_i}(\tilde{x})}{\sum_{i=1}^{n} m_{A_i}(\tilde{x})}$$

5.6. A partíciókról általában

A partícionálásról - fontossága miatt - érdemes még néhány szót ejteni [1]. A fent bemutatott partíció egy meglehetősen speciális partíció, az úgynevezett Ruspini-partíció.

A legtermészetesebb elvárás egy partícióval szemben az, hogy együttesen fedjék le az egész alaphalmazt, azaz ha az X alaphalmazt fedjük le az $\mathcal{A} = \{A_1,\ ...,\ A_n\}$ fuzzy halmazcsalád segítségével, akkor:

$$\forall\, x \in X,\ \exists\, i \in [1, n] : A_i(x) \geq \epsilon$$

ahol $A_i(x)$ az A_i fuzzy halmaz tagsági függvénye. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező partíciókat az X alaphalmaz ϵ-lefedésének nevezzük. (ennek teljesítésével mindössze azt biztosítjuk, hogy ne legyen "vakfolt" a szabályozásban, azaz ne legyen olyan bemeneti érték, amellyel a rendszer nem képes foglalkozni.)

Ha ezen felül még az is teljesül, hogy az A_i halmazok tagsági értékeinek összege minden $x \in X$ elemre vonatkozóan 1, azaz formálisan $\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1,\ \forall\, x \in X$, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád Ruspini-particiót alkot. Ezen feltétel trapéz, vagy háromszög alakú halmazokra könnyen teljesíthető, ha

$$\text{supp}(\text{sup}(A_i(x))) = \inf(\text{core}(A_{i+1}(x))),$$

$$\text{sup}(\text{core}(A_i(x))) = \inf(\text{supp}(A_{i+1}(x))).$$

Azaz ha minden fuzzy halmaz magjának szélsőértékhelyei megegyeznek a megelőző és rákövetkező fuzzy halmazok tartójának maximumával ill. minimumával.

5.7. A szabályozás finombeállítása

Ha rendelkezésünkre állnak a megfelelő adatok, akkor lehetőségünk van az előbb megkonstruált modell finombeállítására. Finombeállításon azt értjük, hogy bizonyos adatok alapján (korábbi periódusok döntései, szakértői vélemények) megváltoztatjuk az $x_{j,j(k)}$ értékeket, valamint az y_i értékeket. Mindezt úgy tesszük, hogy valamilyen értelemben optimális megoldást kapjunk. Most a négyzetes hibákat minimalizáló módszert mutatom be.

Legyenek adottak az $\{(x_l^*,\ y_l^*),\ l = 1,\ \dots L\}$ input és output párok. Ebben az esetben perturbáljuk úgy az $\{x_{j,k(j)}\}$ és $\{y_i\}$ paramétereket, hogy minimális legyen a négyzetes hiba, azaz:

$$\sum_{l=1}^{L} (y_l^* - \tilde{y}(x_l^*))^2 \rightarrow \min,$$

ahol $\tilde{y}(x_l^*)$ a fuzzy logikai modell outputja az x_l^* bemenet esetén.

6. Early warning rendszerek

Ebben a fejezetben a biztosításfelügyelet egy újszerű tevékenységét, a vészelőrejelzést („Early Warning") mutatom be, szintén a fuzzy logika alkalmazása szempontjából. Sajnálatos módon az Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyeletét a törvény korlátozza abban, hogy jelenlegi magyar adatokat, vagy akár statisztikákat szolgáltasson ki, azonban a korábbi (1995-ös) adatok még elérhetőek. Ezzel a legfőbb probléma az, hogy ekkor a piacon résztvevő cégek még „fiatalok" voltak, az ilyen fiatal cégek pedig rendszeresen produkálnak abnormális adatokat.

6.1. Újszerű biztosításfelügyelet

A biztosító intézetekről és a biztosítási tevékenységről szóló 1995. évi XCVI. törvény (Bit.) a biztosításfelügyelet fontos feladatává tette a biztosítók likviditásának ellenőrzését (a jelenleg hatályban lévő 2003. évi LX. törvény szerint: a Felügyelet e törvény előírásainak megfelelően ellenőrzi és értékeli a biztosító pénzügyi helyzetét, minimális szavatoló tőke szükségletét és a biztonsági tőke fedezet előírt mértékeinek meglétét, a biztosító mindenkori fizetőképességét (169. §)). Ennek elsődleges oka az, hogy a Bit. a korábbi tőkeigényhez képest valamelyest csökkentette a biztosító alapításához szükséges tőkét, amelynek következményeképpen a biztosítótársaságok jelentősen „elszaporodtak", és mivel elég kevesebb tőkével rendelkezni, ezért a fizetésképtelenségi kockázatuk is megnőtt. Mindezek mellett a biztosítási tevékenység egyre bonyolultabbá válik, megjelentek az olyan integrált biztosítási formák, mint például a bankbiztosítás (lsd. jelzáloghitelhez kapcsolódó fedezeti életbiztosítások, stb.) és a befektetési hozamok is egyre jelentősebb szerepet kapnak (van például olyan biztosító is, amely biztosítástechnikai veszteségeit befektetési nyereségeivel kompenzálja).

Fontos megjegyezni, hogy Magyarországon ritkák a likviditási problémákkal küszködő biztosítók, mégis egyre nagyobb hangsúlyt kapnak az olyan módszerek, amelyek a likviditási problémák felismerésével foglalkoznak.

6.2. A biztosításfelügyelet eszközei

- A Bit. rendelkezései alapján a felügyelet legalább két évente köteles ún. átfogó ellenőrzést lefolytantni minden biztosítónál, amely során a biztosító teljes működését átvizsgálják, és olyan adatokat is megvizsgálnak meg, amelyek nincsenek a rendszeresen bejelentendő adatok között. Ennek egyik problémája a biztosítók ellenőrzésének sorrendje. Egyes országokban például Szingapúrban a vészelőrejelző rendszereket az ellenőrzések sorrendjének meghatározására használják (azaz az olyan biztosítókat ellenőrzik a leghamarabb, amelyeknél likviditási problémák merülhetnek fel.).

- Pénzügyminiszteri rendelet alapján a biztosítók kötelesek éves és negyedéves belső jelentéseket írni, amelyek a korábbiaknál részletesebb képet adnak a biztosítók tevékenységéről.

- A biztosítók minden év elején kötelesek a felügyeletnek benyújtani a szavatoló tőke szükségletre vonatkozó számításaikat, illetve bemutatni a szavatoló tőke meglétét. Eddig ez a leghatékonyabb ellenőrzési pont a biztosítók likviditásának mérésére, és határozott intézkedésekre is lehetőséget ad (pénzügyi illetve szanálási terv készítésére kényszeríthető a biztosító, ha nem felel meg a szavatoló tőke mértéke). Mindezek ellenére a szavatoló tőke nem elégséges mutató a likviditási problémák mérésére, mivel:
  - „Egydimenziós" mutató, azaz nem ad tényleges képet a biztosítónál lezajló folyamatokról;
  - a törvényben meghatározott számítási módja és paraméteri vitathatóak (a paramétereket egzakt módszerekkel meghatározták ugyan, de ezeket a biztosítók „lealkudták", mivel túl nagy szavatoló tőkével kellett volna rendelkezniük ahhoz, hogy nyereségessé tegyék a magukat);

A legnagyobb problémája azonban az idő. A felügyelet ugyanis a dec. 31.-i állapotokról kapott az év elején jelentést, az elfogadott jelentés beadására viszont csak hónapokkal később került sor. Ekkor ha szavatoló tőke hiány volt a felügyelet pénzügyi terv készítésére kárhoztatta a biztosítót (azaz olyan tervet kellett készítenie, amellyel a pénzügyi helyzetét rendezi például külső tőke bevonásával), amelynek erre hat hónapja volt. Így akár egy év is eltelhet, amely során a kedvezőtlen folyamatok folytatódhattak.

- A biztosítók kötelesek bejelenteni a vállalt nagy kockázataikat, nagy káraikat.
- Számos további előírás vonatkozik a tartalékok megképzésére, a befektetésekre, amelyek betartását könnyen ellenőrizheti a felügyelet.

6.3. Az early warning rendszerek szükségessége

A fentiek alapján nem kell sokáig magyarázni, hogy egy ilyen óriási, és egyre bővülő adatbázis esetén miért is szükséges egy jól működő, automatizált vészelőrejelző rendszert kiépíteni. Nyilvánvaló azonban, hogy az ilyen rendszerek nem tudnak tökéletesen kiszűrni minden lehetséges kockázatot, hiszen például félrevezető adatközlés vagy csalás esetén nem számíthatunk ezekre, viszont a nemzetközi tapasztalatok alapján sokkal inkább a mérhető folyamatok okozzák az inszolvenciát.

6.4. Early Warning rendszerek felépítése

A vészelőrejelző rendszereknek két típusa ismeretes, az egyik ún. komplex mutatókat tartalmaz, a másik, amellyel a továbbiakban foglalkozunk egyszerű mutatókból áll. Az egyszerűség azt jelenti, hogy az éves és negyedéves jelentések adatai alapján általában két-három konkrét értéket felhasználó arányokat képzünk. Ezek az arányok könnyen számíthatóak és külön-külön vizsgálhatóak. Egy tipikus példa az ilyen arányokra az egyszerű kárhányad, amely a nettó díjbevétel és a nettó kárkifizetés aránya. Látható, hogy ilyen arányok segítségével jól nyomon követhető egy biztosító tevékenysége, mégis sok probléma merül fel.

A legnagyobb probléma a mutatók értékelése, ugyanis nehéz meghatározni azokat az értékeket, amelyek meghaladása (illetve el nem érése) „kritikus". Szemléletesen: a „ha az egyszerű kárhányad értéke nagyobb mint x, akkor probléma lehet" jellegű szabályok x paraméterét nem egyszerű meghatározni, továbbá ez a paraméter függ a biztosítási tevékenységtől is, azaz biztosítónként külön-külön kellene ezeket meghatározni (nyilvánvalóan más arányokat produkál egy olyan biztosító, amely balesetbiztosításokat köt, mint egy olyan amely földrengés okozta károkat biztosít). További probléma az, hogy a mutatók közül néhány azt mutatja, hogy nincs probléma a biztosítónál, néhány pedig éppen ennek ellenkezőjét. Ilyen esetekben természetesen az adatokat értékelő szakértők véleménye dönt, de minél több biztosító jelenik meg a piacon, annál nehezebb lesz ez a feladat.

6.5. Early warning mutatók

A következőkben a legfontosabb vészelőrejelző mutatókat mutatom be, mindegyikhez rövid magyarázatot mellékeltem, amelyből látszik a mutatók működése, tévedési lehetősége.

6.5.1. Szolvencia hányados

$$\text{Szolvencia fedezet} = \frac{\text{Részvényesek tőkéje}}{\text{Nettó bevétel}}$$

Ez a hányados megmutatja, hogy az üzleti tevékenységhez szükséges fedezet mennyire erős. A részvényesek tőkéje védi a biztosítót a ritka nagykároktól, továbbá a befektetések értékének csökkenését is ellensúlyozhatja. Ha a mutató alacsony, akkor a biztosító nagyobb kockázatot jelent. Ilyen esetekben a biztosító bevételeinek a stabilitását, a viszontbiztosítás megfelelőségét fontos ellenőrizni.

6.5.2. Underwriting hányados

$$\text{Underwriting hányados} = \frac{\text{Underwriting eredmény}}{\text{Összes bevétel}}$$

A hányados a biztosító profitabilitását méri. A hányados negatív értéke jelenthet aluldíjazást, azaz jelentheti azt, hogy a biztosító a szükségesnél alacsonyabb díjakat kalkulál, illetve jelentheti azt is, hogy a biztosító egy új állomány megszerzéséért (bővítéséért) jelentős árkedvezményt ajánlott.

6.5.3. Egyszerű kárhányad

$$\text{Kárhányad} = \frac{\text{Bekövetkezett károk}}{\text{Összes bevétel}}$$

A biztosító kártapasztalatát mutatja. Ha a hányados magas akkor ez jelentheti azt, hogy a biztosító rossz szerződéseket köt, illetve rossz minőségű kockázatokat fogad el. Jelentheti azonban azt is, hogy valamilyen kivételesen magas kár következett be. Érdemes üzletáganként ellenőrizni az arányt ilyen esetekben.

6.5.4. Combined Ratio

$$\text{Combined Ratio} = \frac{\text{Költségek} + \text{Kárkifizetések}}{\text{Összes bevétel}}$$

Ez a mutató sok hazai és külföldi szakértő szerint az egyik leglényegesebb mutató, a definícióból látható, hogy a költségek és a károk együttes hatását méri a kockázati eredményre. Elfogadhatósági szintje általában a tartalék állománytól és a piacon elérhető kamatoktól függ. Azonban az elfogadhatósági szint manipulálása veszélyes lehet, hiszen ha túl nagy kockázati veszteséget kompenzál a befektetési hozam, akkor a kamatszint csökkenése hirtelen hatna, illetve a folyamatos kockázati veszteség alultartalékoláshoz vezethet.

6.5.5. Szerzési költség hányados

$$\text{Szerzési költségek hányados} = \frac{\text{Szerzési költségek}}{\text{Összes bevétel}}$$

A mutatóból leolvasható, hogy mennyibe kerül a szerződések megszerzése. Utalhat arra, hogy a biztosító nagy árat is képes fizetni a piaci részesedésének növelésére.

6.5.6. Működési költségek

$$\text{Működési költségek hányadosa} = \frac{\text{Igazgatási költségek}}{\text{Összes bevétel}}$$

Az adminisztrációs költségek vizsgálatára használhatjuk, a biztosító működésének hatékonyságát jellemzi.

6.5.7. Befektetési hozam

$$\text{Befektetési hozam hányados} = \frac{\text{Nettó befektetési hozam}}{\text{Átlagos befektetett vagyon}}$$

A befektetési portfólió minőségét mutatja meg.

6.5.8. Likviditás

$$\text{Likviditási hányados} = \frac{\text{Kötelezettségek}}{\text{Likvid eszközök}}$$

Ez egy durva mutatója a szolvenciának, azt mutatja meg, hogy mennyire tudja a biztosító a kötelezettségeit teljesíteni. Magas hányados jelentheti az inszolvenciát, ilyen esetekben a tartalékok ellenőrzése a legfontosabb.

6.5.9. Bevételnövekedés

$$\text{Bevételnövekedés} = \frac{\text{Nettó bevétel}}{\text{Előző évi nettó bevétel}}$$

Nagymértékű változás jelentheti a biztosító működésének instabilitását, de megfelelő mértékű tartalékképzés és szavatoló tőke jelenléte esetén nincs szükség beavatkozásra.

6.5.10. Viszontbiztosítás

$$\text{Megtartási hányad} = \frac{\text{Nettó bevétel}}{\text{Bruttó bevétel}}$$

Ez a hányados szorosan kapcsolódik a szolvencia hányadoshoz. Magas szolvencia hányados és alacsony megtartási hányad jelezheti, hogy a biztosító "ügynökként" viselkedik, pedig pénzügyileg többet is elbírna. Fontos azonban az üzletág sajátosságait is figyelembe venni, hiszen nagy kockázatú üzletágakban általános az alacsony megtartás.

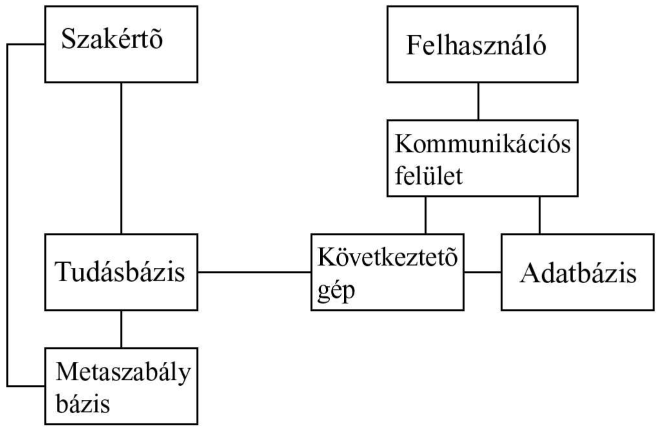
6.5.11. Technikai tartalék

$$\text{Technikai tartalék hányados} = \frac{\text{Tartalékok}}{\text{Nettó bevétel}}$$

A tartalékolás megfelelőségét mutatja meg, amely közvetlenül indikálhat szolvencia problémákat. Alacsony hányados esetén feltétlenül szükséges a szolvencia ellenőrzése.

6.6. A mutatók automatikus értékelése

A mutatók automatikus értékelésére hagyományos értelemben vett irányítási rendszert nehéz lenne illeszteni, hiszen a probléma túlságosan összetett, nemlineáris jellegű. Most egy "szakértő rendszer" kialakítása lesz vizsgálatunk célja [1]. Szakértő rendszereknek az olyan számítástechnikai modelleket nevezzük, amelyek az emberi szakértők következtetési folyamatait utánozzák, valamilyen jól behatárolt szakmai területen. Az ilyen rendszerek megalkotásával az egyes szakterületek szakértőinek tapasztalatát tehetjük elérhetővé az adott tapasztalatokkal nem rendelkezők számára. Egy általános szakértő rendszer vázlata a következő ábrán látható:



A szakértő rendszer két legfontosabb eleme a tudásbázis, és a következtető gép. A tudásbázisban gyűjtjük össze a szakértőnek az adott területen összegyűjtött tudását. A tudásbázis analízisének nevezzük azt a folyamatot, amely során a szakértőnek az irányított rendszerre vonatkozó tudását a modellbe építjük, felhasználjuk. Ezen analízisre több módszer is ismeretes:

- A közvetlen eljárás (amellyel az előző fejezetben már találkozhattunk) során a szakértő verbális, nyelvi formában adja meg a szabályokat, azaz a rendszerről szerzett tudását.

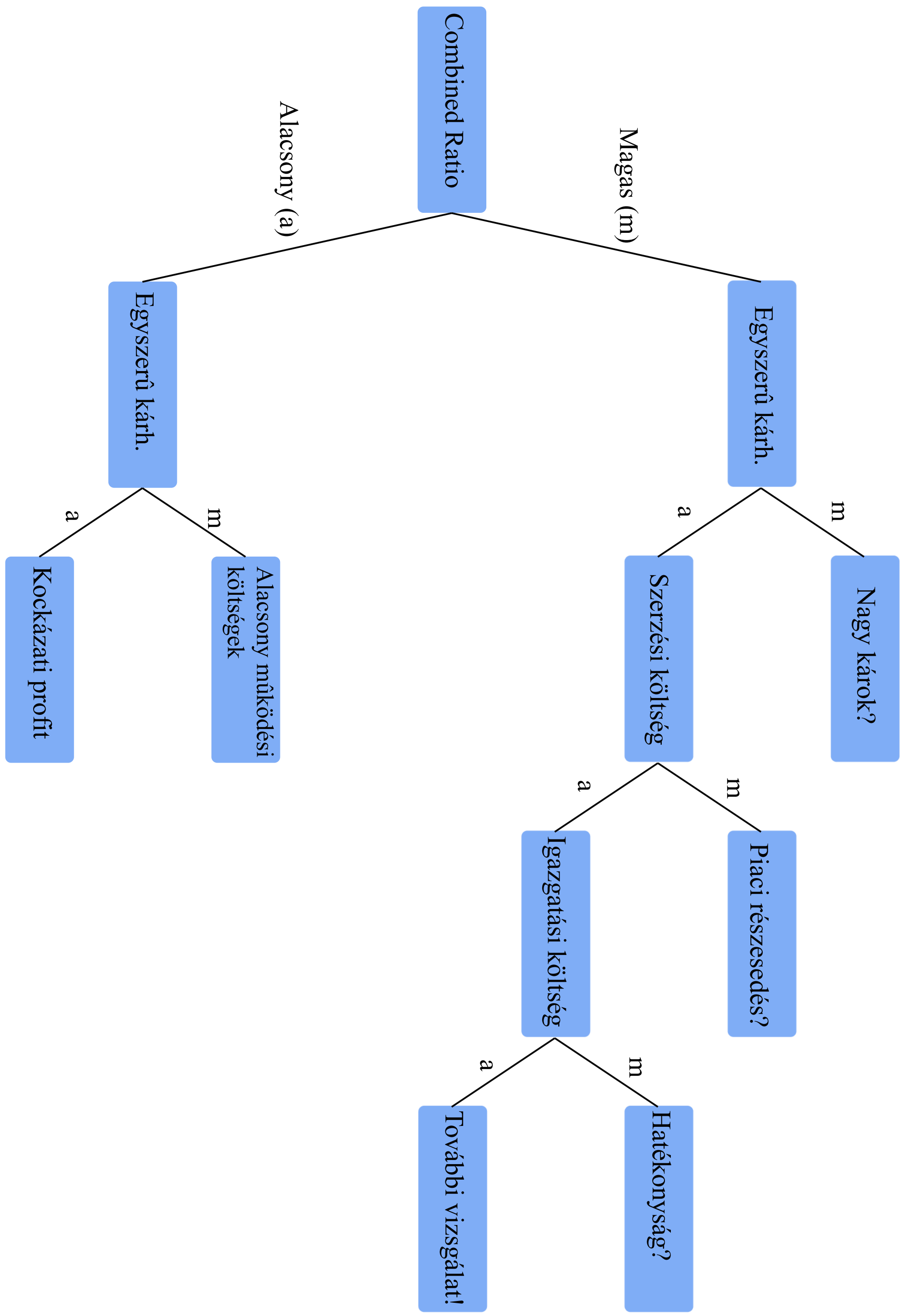
- A közvetett eljárás során a szakértő munkáját figyeljük meg, feljegyezve a rendszerparamétereket, be- és kimeneti értékeket. Ezekből ezután clusterezéssel vagy más módszerekkel nyelvi szabályokat képezünk.

- Az irányítási rendszer maga is alkothat szabályokat, ha rendelkezésére áll egy metaszabálybázis, amellyel az irányítási rendszer képes kiértékelni saját működését.

Ebben a dolgozatban egy olyan módszert fogok használni, amely emlékeztet a döntéshozó fákkal kapcsolatos módszerekre.

A fent bemutatott mutatókról nem nehéz megállapítani, hogy nem egyforma fontosságúak. A combined ratio mutatóval gyakran lehet találkozni a szakirodalomban, egyike a legfontosabb mutatóknak, míg a működési költségek hányados inkább magyarázó jellegű. Ennek megfelelően fogjuk a szabályokat kialakítani, azaz ismét belépve Hipotézisország tágra nyitott kapuján feltesszük, hogy logikus gondolkodású szakértőnk a következő ábrán látható eljárást alkalmazza a Combined Ratio elemzésére:

Ezzel a módszerrel végül is egy döntéshozó fa bejárását végzi. Ezen fa mélységi bejárása alapján fogjuk a modellhez szükséges szabályokat kialakítani.



A Combined Ratio elemzésének vázlata.

6.6.1. Szabályok megfogalmazása

1. HA a „Combined Ratio” magas ÉS az „egyszerű kárhányad” magas AKKOR vizsgálandóak a nagy károk (illetve a kárgyakoriság változása).

2. HA a „Combined Ratio” magas ÉS az „egyszerű kárhányad” alacsony ÉS a „szerzési költségek” magasak AKKOR vizsgálandó, hogy piaci részesedését akarja-e a biztosító növelni.

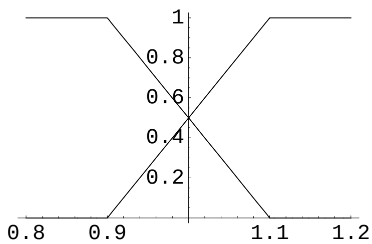
3. HA a „Combined Ratio” magas ÉS az „egyszerű kárhányad” alacsony ÉS a „szerzési költségek” alacsonyak ÉS az „igazgatási költségek” magasak AKKOR kérdéses a biztosító hatékonysága.

4. HA a „Combined Ratio” magas ÉS az „egyszerű kárhányad” alacsony ÉS a „szerzési költségek” alacsonyak ÉS az „igazgatási költségek” alacsonyak AKKOR további vizsgálat szükséges.

5. HA a „Combined Ratio” alacsony ÉS az „egyszerű kárhányad” magas AKKOR alacsonyak a szerzési és igazgatási költségek.

6. HA a „Combined Ratio” alacsony ÉS az „egyszerű kárhányad” alacsony AKKOR kockázati profit keletkezett.

Látható, hogy a fenti szabályok nem használják a normális, közepes fogalmakat, de ez nem fog problémát okozni a későbbiek során. A hányadosok állapottereinek partícionálására ugyanis minden esetben csak két fuzzy halmazt fogunk bevezetni, amelyek az állapotterek Ruspini partíciójai lesznek.



6.6.2. A szabályok megvalósítása

A szabályok megfogalmazását az állapotterek partícionálásával kell kezdenünk. A következő függvények a hányadosoknak megfelelő névvel vannak ellátva, minden bemenet esetén a függvények egy olyan listát készítenek, amelynek első eleme azt fejezi ki, hogy az adott bemenet mennyire „alacsony”, a második eleme pedig értelemszerűen azt mutatja meg, hogy a bemenet milyen szinten nevezhető magasnak.

```
CombinedRatio[x_] := N[
   {TagságiFüggvény[-1, 0, 0.9, 1.1, x], TagságiFüggvény[0.9, 1.1, 10, 100 , x] }];
EgyszerűKárhányad[y_] := N[{TagságiFüggvény[-1, 0, 0.6, 0.8, y],
    TagságiFüggvény[0.6, 0.8, 10, 100 , y]}];
SzerzésiHányados[z_] := N[{TagságiFüggvény[-1, 0, 0.1, 0.25, z],
    TagságiFüggvény[0.1, 0.25, 10, 100 , z]}];
IgazgatásiHányados[w_] := N[{TagságiFüggvény[-1, 0, 0.2, 0.3, w],
    TagságiFüggvény[0.2, 0.3, 10, 100 , w]}];
```

Ezek után következhetnek a szabályok. A metszetek elkészítésére az algebrai szorzat operátort fogjuk használni.

```
Szabály1[x_, y_, z_, w_] := CombinedRatio[x][[2]] EgyszerűKárhányad[y][[2]];
Szabály2[x_, y_, z_, w_] :=
  CombinedRatio[x][[2]] EgyszerűKárhányad[y][[1]] SzerzésiHányados[z][[2]];
Szabály3[x_, y_, z_, w_] := N[CombinedRatio[x][[2]] EgyszerűKárhányad[y][[1]]
    SzerzésiHányados[z][[1]] IgazgatásiHányados[w][[2]]];
Szabály4[x_, y_, z_, w_] := N[CombinedRatio[x][[2]] EgyszerűKárhányad[y][[1]]
    SzerzésiHányados[z][[1]] IgazgatásiHányados[w][[1]]];
Szabály5[x_, y_, z_, w_] := N[CombinedRatio[x][[1]] EgyszerűKárhányad[y][[2]]];
Szabály6[x_, y_, z_, w_] := N[CombinedRatio[x][[1]] EgyszerűKárhányad[y][[1]]];
```

Látható, hogy a Szabály nevű függvények mind a fenti szabályok megfelelői. A következő, Eredmények nevű függvény egy listában rendezi a fenti szabályok eredményeit.

```
Eredmények[x_, y_, z_, w_] :=
 {Szabály1[x, y, z, w], Szabály2[x, y, z, w], Szabály3[x, y, z, w],
  Szabály4[x, y, z, w], Szabály5[x, y, z, w], Szabály6[x, y, z, w]}
```

```
Eredmények[1.05, 0.78, 0.2, 0.21]
```

```
{0.675, 0.05, 0.0025, 0.0225, 0.225, 0.025}
```

$$\sum_{i=1}^{6} \text{Eredmények}[1.05,\ 0.78,\ 0.2,\ 0.21][[i]]$$

```
1.
```

6.6.3. Konkrét adatok elemzése

Ezzel a szükséges előkészületeket megtettük, rátérhetünk a konkrét adatok elemzésére. A felhasznált adatokat a 2. táblázat tartalmazza.

Biztosító Rt.	Díjbevételek	Kárkifiz.	Szerzési k.	Igazgatási k.
ARGOSZ	707356	575187	198612	376072
ATLASZ	1420292	495455	413888	159824
ÁB – AEGON	28435002	17965158	3982983	6356243
COLONIA	5138025	2502510	722852	1093488
GENERALI	6572605	3906648	735730	1573847
HUNGÁRIA	41273829	33201962	3917647	5017226
NATIONALE NEDERLANDEN	12441112	1062719	3042286	2845456
OTP – GARANCIA	5492426	2949370	555474	2363807
PROVIDENCIA	13579195	5065798	3220971	2159139
SIGNAL	864695	43090	432823	510967

2.táblázat (Az adatok 1000Ft-ban értendőek, 1995. évi)

A 3.táblázat tartalmazza a fenti adatok alapján számított hányadosok értékeit. Ezen táblázat számszerű értékeire a számítások során „Adatok” néven fogunk hivatkozni.

Biztosító Rt.	Combined R.	Egyszerű kárh.	Szerzési h.	Igazgatási h.
ARGOSZ	1.6256	0.8132	0.2808	0.5317
ATLASZ	0.7528	0.3488	0.2914	0.1125
ÁB – AEGON	0.9954	0.6318	0.1401	0.2235
COLONIA	0.8406	0.4871	0.1407	0.2128
GENERALI	0.9458	0.5944	0.1119	0.2395
HUNGÁRIA	1.0209	0.8044	0.0949	0.1216
NATIONALE NEDERLANDEN	0.5587	0.0854	0.2445	0.2287
OTP – GARANCIA	1.0685	0.5370	0.1011	0.4304
PROVIDENCIA	0.7693	0.3731	0.2372	0.1590
SIGNAL	1.1413	0.0498	0.5005	0.5909

3. táblázat

A következő utasítás az Eredmények nevű függvényt alkalmazza az adatokra.

```
BiztosítókEredményei :=
 Table[Eredmények[Adatok[[i]][[1]], Adatok[[i]][[2]], Adatok[[i]][[3]],
   Adatok[[i]][[4]]], {i, 1, 10}]; BiztosítókEredményei // MatrixForm
```

Biztosító Rt.	Szabály1	Szabály2	Szabály3	Szabály4	Szabály5	Szabály6
ARGOSZ	1	0	0	0	0	0
ATLASZ Utazási	0	0	0	0	0	1
ÁB – AEGON	0.0758	0.1072	0.0692	0.2248	0.0831	0.4398
COLONIA	0	0	0	0	0	1
GENERALI	0	0.0182	0.0831	0.1276	0	0.7711
HUNGÁRIA	0.6045	0	0	0	0.3955	0
NATIONALE NEDERLANDEN	0	0	0	0	0	1
OTP – GARANCIA	0	0.0064	0.8361	0	0	0.1575
PROVIDENCIA	0	0	0	0	0	1
SIGNAL	0	1	0	0	0	0

4. Táblázat

Az Utasítások nevű függvény kiválogatja a maximális elemeket, és a megfelelő utasításokat rendeli hozzájuk.

```
Utasítások := Table[Which[
   Position[BiztosítókEredményei[[i]], Max[BiztosítókEredményei[[i]]]] == {{1}},
   "Nagy Károk?", Position[BiztosítókEredményei[[i]],
     Max[BiztosítókEredményei[[i]]]] == {{2}}, "Piaci Részesedés Növelése?",
   Position[BiztosítókEredményei[[i]], Max[BiztosítókEredményei[[i]]]] == {{3}},
   "Hatékonyság?", Position[BiztosítókEredményei[[i]],
     Max[BiztosítókEredményei[[i]]]] == {{4}}, "Early Warning",
   Position[BiztosítókEredményei[[i]], Max[BiztosítókEredményei[[i]]]] == {{5}},
   "Alacsony Költségek",
   Position[BiztosítókEredményei[[i]], Max[BiztosítókEredményei[[i]]]] == {{6}},
   "Kockázati Profit"], {i, 1, 10}];
Maximumok := Table[Max[BiztosítókEredményei[[i]]], {i, 1, 10}];
Transpose[AppendColumns[{Maximumok}, {Utasítások}]] //
 MatrixForm
```

1	Nagy károk?
1	Kockázati profit
0.439823	Kockázati profit
1	Kockázati profit
0.77111	Kockázati profit
0.604546	Nagy károk?
1	Kockázati profit
0.836122	Hatékonyság?
1	Kockázati profit
1	Piaci részesedés növelése?

5. Táblázat

A kérdőjeles eredmények azt fejezik ki, hogy a vizsgálatot tovább kell folytatni az adott irányban, azaz, ha eredményképpen a „Nagy Károk?” kifejezés szerepel, akkor vizsgálandó, hogy a biztosítónak voltak-e olyan nagy káreseményei, amelyek miatt az egyszerű kárhányad „magas” eredményt diagnosztizált. Természetesen ez minden mutatóról elmondható, hiszen ha több adat ismeretes, amelyek alapján más mutatókat (befektetési, tartalékolási, stb.) is kiszámolhatunk, akkor a fenti szabálybázist tovább bővítve pontosabb elemzést végezhetünk.

Egy másik továbblépési lehetőség, hogy több hasonló szabálybázist építünk a kulcsfontosságú mutatók kiértékelésére, azaz a példában megvalósított „szakértő” a combined ratio alapos elemzését végzi, és más, a fentihez hasonló elven működő „szakértők” végzik a tartalékolási, befektetési, viszontbiztosítási mutatók elemzését. Ezzel az eljárással nem egy óriási méretű, hanem több kisebb „döntéshozó fa” bejárását végezzük, amelyek egymástól függetlenül hozzák meg döntéseiket a vészjelzés szükségességéről. Ezzel a lehetőséggel foglalkozunk a következő fejezetben.

6.6.4. Több szakértő összehangolása

Ebben a részben tehát feltesszük, hogy a vészelőrejelzés feladatát több, a fenti módon elkészített szakértő végzi, azaz a lényeges mutatók elemzésére olyan mutatókat készítettünk, amelyek a kevésbé fontos, magyarázó jellegű mutatók szolgáltatta eredményeket is figyelembe véve hozzák meg döntéseiket. Továbbá azt is feltesszük, hogy ezek a döntések már nem további utasításokat tartalmaznak, hanem egyértelmű döntést a vészjelzés szükségességéről (mintha a fenti megoldásban például a „Nagy Károk?” helyére „Vészjelzést” írnánk). Ebben az esetben is előfordulhat a 6.4. részben említett probléma, azaz, hogy egyes szakértők veszélyesnek találják a biztosítót, mások viszont nem. Ennek a problémának a feloldására több módszerrel lehet próbálkozni.

A most következő megoldás feltételezi, hogy rendelkezésünkre áll egy, a múltból származó adatállomány, amely nemcsak a mutatók értékeit, de a biztosítók életútját is tartalmazza, azaz minden bemeneti adatsor esetén tudjuk, hogy volt-e inszolvencia probléma a biztosítónál.

6.6.5. A modell változói

Legyen tehát $x_i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ az i-edik biztosító adatsora a t-edik megfigyelési pillanatban (például negyedéves adatok). $x_i^j(t)$ jelölje az i-edik biztosító azon adatait, amelyek a j-edik „szakértő” a döntése során használ. S_j, $(j = 1, \ldots, k)$ jelölje a j-edik szakértő döntését, azaz

$$S_j\left[x_i^j(t)\right] = \begin{cases} 1, & \text{ha } S_j \text{ szerint csőd várható} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$f_i(t)$ jelölje az i-edik biztosító likviditását a t-edik megfigyelés időpontjában:

$$f_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t-\text{kor likviditási problémák vannak} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Általában nehezen definiálható a likviditási probléma fogalma, hogy mikortól nevezünk egy biztosítót inszolvensnek, de mi ezzel most nem foglalkozunk. Ezekkel a változókkal fogjuk az egyes szakértők teljesítményét értékelni. Akkor fogunk egy szakértőnek pontot adni, ha helyes jóslatot kaptunk tőle, azaz P_j-vel jelölve a j-edik szakértő összpontszámát:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left| S_j\left[x_i^j(t)\right] - f_i(t+1) \right| \right)$$

Érdemes lehet akkor is pontot adni a szakértőnek, ha a jóslat nem $(t+1)$-ben, hanem $(t+2)$-ben teljesül, ekkor a fenti képlet a következő alakot ölti:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(1 - \left| S_j\left[x_i^j(t)\right] - f_i(t+1) \right| \right) + \left| S_j\left[x_i^j(t)\right] - f_i(t+1) \right| \cdot \left(1 - \left| S_j\left[x_i^j(t)\right] - f_i(t+2) \right| \right) \right)$$

Ehhez persze fel kell tennünk, hogy az $f_i(t+1) = f_i(t+2) = 1$ összefüggés sohasem teljesül, de ez a feltevés egyértelmű. Ekkor a P_j mindkét definíciójára teljesül, hogy $0 \le P_j \le n$. A szakértők teljesítményének mérésére használhatóak a $\frac{P_j}{n}$ arányok, nem megfelelő arányok esetén érdemes a szakértők definícióját módosítani. A P_j értékek meghatározása után az összehangolt döntés a következő alakban adható meg:

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}[x_i(t)] = \sum_{j=1}^{k} \hat{P}_j \cdot S_j\left[x_i^j(t)\right], \text{ ahol } \hat{P}_j = \frac{P_j}{\sum_{j=1}^{k} P_j}.$$

Ezek után tényleges döntés $\hat{\mathcal{D}} = \begin{cases} \text{Vészjelzés}, & \text{ha } \mathcal{D} > \alpha \\ \text{nincs probléma}, & \text{egyébként} \end{cases}$

Természetesen a szingapúrihoz hasonló módon a $\mathcal{D}$ értékei szerint csökkenő sorrendbe rendezve a biztosítókat a felügyeleti vizsgálat sorrendjének meghatározására is fel lehet használni az eredményeket.

6.6.6. További módosítási lehetőségek

Most azt vizsgáljuk meg, hogy az előző részben mutatott eljárás alkalmazható-e abban az esetben, ha nem tesszük fel, hogy az egyes szakértők egyértelmű döntést adnak a vészjelzés szükségességéről, azaz az S_j definícióját fogjuk módosítani. A 6.6.2. részben definiált szakértők eredményeit fogjuk közvetlenül felhasználni, mindenféle defuzzyfikálás nélkül.

Legyen $\tilde{S}_j\left[x_i^j(t)\right] = (s_j^1,\ ...,\ s_j^m)$, ahol $s_j^{(i)}$ a j-edik szakértő definíciójában szereplő i-edik szabály teljesülésének szintje. Azaz például a fenti szakértő esetében az S[1.05, 0.78, 0.2, 0.21]= (0.675, 0.05, 0.0025, 0.0225, 0.225, 0.025) számhatos. Ehhez a vektorhoz definiáljuk a $v_j^d = (v_j^1,\ ...,\ v_j^m)$ vektort, amelyben:

$$v_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j - \text{edik szakértő definíciójában szereplő} \\ & i - \text{edik szabály teljesülése esetén inszolvencia várható} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ezek után a szakértő összpontszáma: $P_j = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left|\, \tilde{S}_j\left[x_i^j(t)\right] \cdot v_j^d - f_i(t+1) \,\right|\right)$.

Természetesen a P_j másik definíciója is hasonlóan változtatható.

Búcsúzóul

Mielőtt belekezdtem volna ebbe a témába többen figyelmeztettek, hogy a fuzzy logika „hívei" egy meglehetősen elszigetelt csoportot alkotnak a matematikus társaságban, és óvakodjak attól, hogy túlságosan „lelkesen" írjak a témáról. Ezt szem előtt tartva írtam meg dolgozatomat, és most sem szeretném azt mondani, hogy a bemutatott megoldások a lehető legjobb matamatikai modellek az adott problémákra, így ezek megítélését most szeretném az Olvasóra bízni. A magam részéről csak annyit szeretnék mondani, hogy a fuzzy logika számomra olyan, mint a bazsalikom a főzéskor. Sohasem fogja helyettesíteni a pulykát, de a vacsoravendégek kevésbé lennének elégedettek nélküle.

Irodalomjegyzék

[1] Kóczy T. László-Tikk Domonkos. *Fuzzy rendszerek*. Typotex Kiadó, 2000.

[2] Dr. József Sándor. *Általános aktuárius módszertan.* Szakdolgozat, 2004.

[3] Virginia R. Young. *Insurance Rate Changing: A Fuzzy Logic Approach.* The Journal of Risk and Insurance, 1996.

[4] Jean Lemaire. *Fuzzy Insurance.* Astin Bulletin, 1990.

[5] R. J. Verall and Y. H. Yakoubov. *A Fuzzy Approach to Grouping Policyholder Age in General Insurance.*

[6] K. M. Ostaszewski. *An investigation into possible applications of fuzzy set methods in actuarial science.* Society of Actuaries, 1993.

[7] J. C. Bezdek. *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. Plenum Press, 1981.

[8] Krekó Béla. *Biztosítási matematika*. Aula Kiadó, 1994.

[9] Teivo Pentikainen. *Solvency of Insurers and Equalization Reserves.* Insurance Publishing Company, 1982.

[10] Dr. Forgács Zoltán. *Az inszolvencia alakulása és a bonitás jelentősége a biztosításban.* Biztosítási szemle, 1996.

[11] B. Kosko. *Fuzziness vs. probability.* International Journal of General Systems, 1990.

Függelék

Ez a fejezet kifejezetten azon olvasók részére készült akiknek nehézséget okoz a *Mathematica* programok megértése. Most olyan egyszerű példákat mutatok, amelyek segítenek ezek megértésében.

1. Értékadások

Egyszerű értékadás ($x := 3$)

```
In[1]:=  x := 3;
         x

Out[2]=  3
```

Lista definiálása ($l := (l_1, \ ..., l_n)$)

```
In[3]:=  l := {a, b, c, d};
         l

Out[4]=  {a, b, c, d}
```

Mátrix definiálása ($M := [m_{i,j}]_{i=1,...,n}^{j=1,...,n}$)

```
In[5]:=  M := {{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}, {13, 14, 15, 16}};
         M
         M // MatrixForm

Out[6]=  {{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}, {13, 14, 15, 16}}

Out[7]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Hivatkozás lista elemeire ($l(2)$)

```
In[8]:=  l[[2]]

Out[8]=  b
```

Hivatkozás mátrix elemeire

```
In[9]:=  M[[2]]

Out[9]=  {5, 6, 7, 8}

In[10]:=  M[[2]][[3]]

Out[10]=  7
```

2. Egyszerű műveletek listákkal, mátrixokkal

Lista elemeinek összege ($\sum_{i=1}^{n} l(i)$)

```
In[11]:= Sum[l[[i]], {i, 1, Length[l]}]
```

$$\sum_{i=1}^{\text{Length}[l]} l[[i]]$$

```
Out[11]= a + b + c + d
```

Lista megfordítása

```
In[12]:= Reverse[l]

Out[12]= {d, c, b, a}
```

Skalárral való szorzás ($e \cdot \underline{l}$)

```
In[13]:= e l

Out[13]= {a e, b e, c e, d e}
```

Két lista megfelelő elemeinek szorzata

```
In[14]:= {1, 2, 3, 4} l

Out[14]= {a, 2 b, 3 c, 4 d}
```

Vektorok (listák) skaláris szorzata (ilyen szorzásnál a "." a művelet jele)

```
In[15]:= {1, 2, 3, 4}.l

Out[15]= a + 2 b + 3 c + 4 d
```

Mátrixok szorzata

```
In[16]:= M.M // MatrixForm

Out[16]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 90 & 100 & 110 & 120 \\ 202 & 228 & 254 & 280 \\ 314 & 356 & 398 & 440 \\ 426 & 484 & 542 & 600 \end{pmatrix}$$

3. Függvények

Függvény definiálása ($f(x) := x^2$)

```
In[17]:= f[x_] := x^2;
         f[2]

Out[18]= 4
```

Függvény alkalmazása előzetesen definiált változóra ($x = 3$ már fent definiálva van$\to f(3)$)

```
In[19]:= f[x]
Out[19]= 9
In[20]:= With[{y = 4}, f[y]]
Out[20]= 16
```

Függvény alkalmazása listára $(f(l_1),\ \ldots,\ f(l_n))$

```
In[21]:= f[l]
Out[21]= {a^2, b^2, c^2, d^2}
```

Vagy:

```
In[22]:= Map[f, l]
Out[22]= {a^2, b^2, c^2, d^2}
```

Függvény többszöri alkalmazása listára $(f(f(f(l))))$

```
In[23]:= Nest[f, l, 3]
Out[23]= {a^8, b^8, c^8, d^8}
```

Függvény alkalmazása mátrixra

```
In[24]:= f[M] // MatrixForm
Out[24]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 25 & 36 & 49 & 64 \\ 81 & 100 & 121 & 144 \\ 169 & 196 & 225 & 256 \end{pmatrix}$$

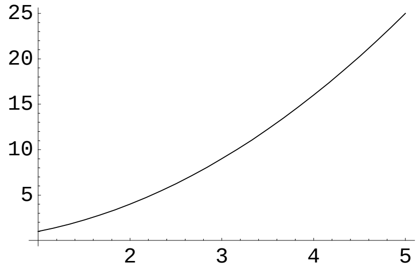
4. Többváltozós függvények

$g(x,\ y) := (x + y,\ x - y,\ x \cdot y,\ \ x \cdot \sin(y))$

```
In[25]:= g[x_, y_] := {x + y, x - y, x y, x Sin[y]};
         g[2, 3]
Out[26]= {5, -1, 6, 2 Sin[3]}
In[27]:= h[x_, y_] := N[x Sin[y]];
         h[2, 3]
Out[28]= 0.28224
```

5. Függvények ábrázolása

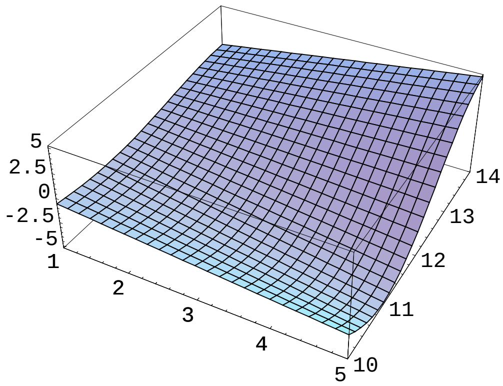
In[29]:= **Plot[f[x], {x, 1, 5}]**



Out[29]= - Graphics -

Többváltozós függvények ábrázolása

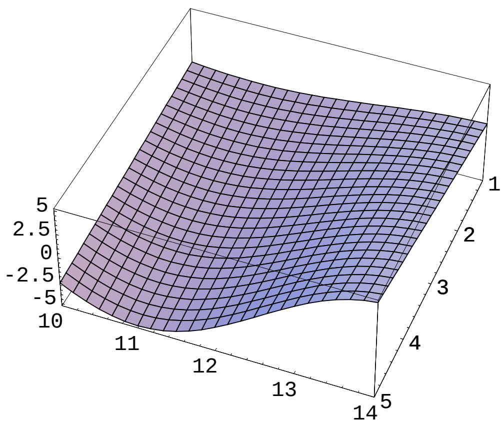
In[30]:= **Plot3D[h[x, y], {x, 1, 5}, {y, 10, 14}]**



Out[30]= - SurfaceGraphics -

A ViewPoint állításával az ábrázolás nézőpontját szabályozzuk

In[31]:= **Plot3D[h[x, y], {x, 1, 5}, {y, 10, 14}, ViewPoint → {5, 2, 5}]**



Out[31]= - SurfaceGraphics -

6. If, Which

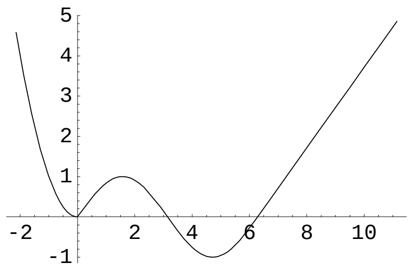
```
In[32]:= If[x < 4, {"x kisebb mint 4" , x}, {"x nagyobb mint 4", x}]

Out[32]= {x kisebb mint 4, 3}
```

$$g(x) := \begin{cases} x^2, \ \text{ha}\, x < 0 \\ \sin(x), \ \text{ha}\, 0 < x < 2\pi \\ x - 2\pi, \ \text{ha}\, x > 2\pi \end{cases}$$

```
In[33]:= g[x_] := Which[x < 0, x^2, 0 < x < 2 π, Sin[x], x > 2 π, x - 2 π]

In[34]:= Plot[g[x], {x, -2.14, 11.14}]
```




```
Out[34]= - Graphics -
```