Mathematica

Idén, 2002-ben ünnepli 14. születésnapját a *Mathematica*. E kezdetben *Stephen Wolfram* nevéhez fűződő számítógépes matematikai programot az évek során kiváló szakemberek tucatjai fejlesztették tovább (jelenleg a 4.1-es verziónál tartunk), s mára a legbonyolultabb számítógépes rendszerek között tartják számon. Felhasználói tábora meghaladja az egymilliót és szinte minden (tudomány)terület képviselői megtalálhatók közöttük. Sokoldalúságának és teljesítményének köszönhetően a kutatásban és az iparban egyaránt használják. Kétszáznál több könyv és tucatnyi *Mathematica*-hoz (sőt, magában *Mathematica*-ban) írt programcsomag, alkalmazás látott napvilágot.

Mindez annak tudható be, hogy a *Mathematica* éppúgy alkalmas nagypontosságú számítások gyors elvégzésére, mint szimbolikus (pl. algebrai) kifejezések és objektumok kezelésére. A legkülönfélébb két- és háromdimenziós ábrák, grafikonok készíthetők segítségével. A *Mathematica* egyben logikusan átgondolt és felépített programnyelv is: rugalmassága éppen abban rejlik, hogy a sok száz beépített matematikai függvényt, illetve utasítást szabadon ötvözhetjük a saját magunk által megírottakkal.

A *Mathematica*-ról e jelen bevezetőnél bővebb ismertetőt tartalmaz az [1] cikk. Részletes magyar nyelvű útmutató a program használatáról a [2] könyv. Wolfram [3] könyve teljességre törekszik. Elmélyülve a *Wolfram Research* [4] honlapján, rengeteg érdekes információra lelhetünk. Szintén ők működtek közre az [5] (folyamatosan bővülő) internetes matematikai enciklopédia elkészítésében. Egy új kezdeményezés, a web*Mathematica* segítségével a böngészőprogramok által internetről futtatható *Mathematica*-alkalmazások hozhatók létre. Ezzel kapcsolatban a [6] és [7] webcímre utalunk.

Kedvcsinálóul néhány (önkényesen, s semmiképpen sem szisztematikusan választott) feladatot oldunk meg a *Mathematica* segítségével. A feladatok rövidek és inkább csak illusztratív jellegűek, összetettebb problémák részekre bontásakor azonban sok-sok ehhez hasonlóval találkozhatunk. A megoldásokhoz rövid magyarázatot fűzünk, ezekkel igyekszünk megvilágítani egy-egy parancs működését. Az általunk begépelendő parancsokat `írógépbetű-típussal` emeltük ki.

Példák

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)$ kifejezést.

A *Mathematica* fő egyszerűsítő parancsát

$$\texttt{FullSimplify[}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)\texttt{]}$$

használva eredményül 6 adódik. Figyeljük meg, hogy a *Mathematica* különbséget tesz a kis- és nagybetűk között. A beépített parancsnevek nagy kezdőbetűvel írandók. Függvény- és parancsargumentumok megadásakor szögletes zárójelet kell használnunk.

2. Írjuk fel a $\cos 4x + \sin 5x$ kifejezést az egyszeres szögek szögfüggvényei segítségével.

A `TrigExpand[Cos[4 x]+Sin[5 x]]` utasítás eredményeként

$$\mathrm{Cos}[x]^4 + 5\,\mathrm{Cos}[x]^4\,\mathrm{Sin}[x] - 6\,\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Sin}[x]^2 - 10\,\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Sin}[x]^3 + \mathrm{Sin}[x]^4 + \mathrm{Sin}[x]^5$$

adódik.

3. Bontsuk szorzattá az előbbi kifejezést.

A `TrigFactor[%]` parancs hatására ezt kapjuk (a `%` jel az előző eredményt jelenti):

$$-\left(\mathrm{Cos}[\tfrac{x}{2}] + \mathrm{Sin}[\tfrac{x}{2}]\right)^2 \left(-1 + 2\,\mathrm{Sin}\,[x]\right) \left(1 + 2\,\mathrm{Sin}\,[3\,x]\right)$$

(Melyik utasítással nyerhető vissza ebből az eredeti $\cos 4x + \sin 5x$ alak?)

4. Adjuk meg $\cos 3^\circ$ pontos értékét.

A *Mathematica* `FullSimplify[FunctionExpand[Cos[3 Degree]]]` utasítása az alábbi legegyszerűbb alakot adja meg:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(4+\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\,\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right)}$$

5. Alakítsuk szorzattá az $x^{15} - 1$ polinomot.

A `Factor[x`^{15}`-1]` utasítás 4 tényezőre bontja polinomunkat:

$$(-1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8)$$

Ebben a felbontásban minden együttható racionális szám. Ha a racionális számtestet a $\sqrt{5}$ elemmel bővítjük,

`Factor[x`^{15}`-1,Extension→`$\sqrt{5}$`]`

a polinom tovább bontható:

$$\tfrac{1}{16}(-1+x)(-2-x+\sqrt{5}\,x-2\,x^2)(1+x+x^2)(2+x+\sqrt{5}\,x+2\,x^2)\cdot$$
$$\cdot(-2+x+\sqrt{5}\,x-x^2-\sqrt{5}\,x^2+x^3+\sqrt{5}\,x^3-2\,x^4)(2-x+\sqrt{5}\,x+x^2-\sqrt{5}\,x^2-x^3+\sqrt{5}\,x^3+2\,x^4)$$

6. Adjuk meg a $2^{67} - 1$ szám prímtényezős felbontását.

A `FactorInteger[2^67-1]` parancs ezt adja:

$$\{\{193707721, 1\}, \{761838257287, 1\}\}$$

azaz $2^{67} - 1$ felírható, mint két óriási prímszám (nevezetesen 193707721 és 761838257287) első hatványának szorzata.

7. Oldjuk meg az $x + y + z = 2$, $xy + xz + yz = -5$, $xyz = -6$ egyenletrendszert.

Ezt a *Mathematica*-ban így tehetjük meg:

```
Solve[x+y+z==2 && x y+x z+y z==-5 && x y z==-6]
```

A *Mathematica* a dupla egyenlőségjellel vizsgálja két kifejezés egyenlőségét, a szimpla egyenlőségjel változó értékének definiálására szolgál. A && jel jelenti a *logikai és* műveletét. A változóneveket nem írhatjuk egybe, a szóköz jelenti a szorzást. Megoldásként egy listában a változók mind a hat lehetséges sorrendjét megkapjuk:

$$\{\{x \to -2, y \to 1, z \to 3\}, \{x \to -2, y \to 3, z \to 1\}, \{x \to 1, y \to -2, z \to 3\},$$
$$\{x \to 1, y \to 3, z \to -2\}, \{x \to 3, y \to -2, z \to 1\}, \{x \to 3, y \to 1, z \to -2\}\}$$

8. Oldjuk meg az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet, ahol a, b, c tetszőleges számok.

A `Reduce[a x^2+b x+c==0,x]` parancs eredménye:

$$x == \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \,\&\&\, a \neq 0 \,||\, x == \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \,\&\&\, a \neq 0 \,||$$

$$a == 0 \,\&\&\, b == 0 \,\&\&\, c == 0 \,||\, a == 0 \,\&\&\, x == -\frac{c}{b} \,\&\&\, b \neq 0$$

A `Reduce` parancsot használtuk, amely paramétert is tartalmazó egyenlet általános megoldását adja meg. A `Solve` utasítás csak az ún. generikus megoldásokat adná meg, jelen esetben csak a másodfokú egyenlet megoldóképletét, ami az $a = 0$ esetben nem lenne megfelelő. A || jel jelenti a *logikai megengedő vagy* műveletét. (Ennek prioritása alacsonyabb az *és* (&&) műveleténél, ezért nem szükségesek zárójelek). A fenti eredmény értelmezése tehát: ha $a \neq 0$, akkor x egyenlő a másodfokú egyenlet két megoldásával; ha $a = 0$, de $b \neq 0$, akkor az elsőfokú egyenlet megoldóképletét kapjuk vissza; végül, ha $a = b = c = 0$, akkor x-re nincs megkötés.

9. Tudjuk, hogy $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ és $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Mennyivel egyenlő ekkor $a^5 + b^5 + c^5$?

```
Eliminate[{mennyi==a^5+b^5+c^5, a+b+c==1, a^2+b^2+c^2==2, a^3+b^3+c^3==3}, {a,b,c}]
```

Erre ezt kapjuk:

mennyi == 6

Az `Eliminate` utasítás ugyanis kiküszöböli a felsorolt egyenletekből a megadott változókat (jelen esetben a, b, c-t). Ami megmarad, éppen az ötödik hatványösszeg. (Hogyan oldható meg a feladat általánosabban: a jobb oldalakon álló $1, 2, 3$ számok helyett α, β, γ paraméterekkel?)

10. Határozzuk meg $(a+b+c+d)^{17}$-ben $a^3b^{13}d$ együtthatóját.

Egy lehetséges megoldást ad az alábbi utasítás:

```
Coefficient[Expand[(a+b+c+d)^17], a^3 b^13 d]
```

A kifejezést az `Expand` bontja ki. Az eredmény 9520.

11. Igazoljuk, hogy $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$, tetszőleges $n \geq 1$ természetes szám esetén.

Az állítást a

```
Sum[k, {k, 1, n}]^2 == Sum[k^3, {k, 1, n}]
```

parancs eredményeként adódó *True* (*azonosan igaz* logikai érték) bizonyítja. (Természetesen a *Mathematica*-val külön-külön kiszámolva a két oldalt $\left(\frac{1}{4}n^2\,(1+n)^2\right)$ magunk is megállapíthatjuk azok egyenlőségét.)

12. Oldjuk meg az $||x-1|-1| + ||x|-4| < 3$ egyenlőtlenséget.

Ehhez először betöltjük az `<<Algebra`InequalitySolve`` csomagot. Ezután az

```
InequalitySolve[Abs[Abs[x-1]-1]+Abs[Abs[x]-4]<3, x]
```

parancs adja meg a megoldást: $\frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}$.

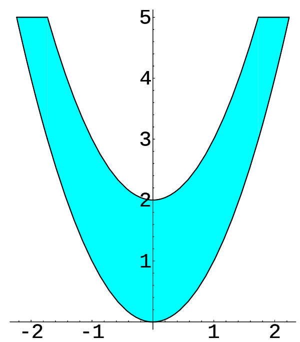
13. Határozzuk meg a $0 \leq y - x^2 \leq 2$ és a $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$ egyenlőtlenségekkel határolt síkbeli tartomány területét.

A tartomány speciális alakja miatt olvassuk be a `<<Calculus`Integration`` csomagot. Ezután a keresett terület a következő határozott integrállal számolható ki:

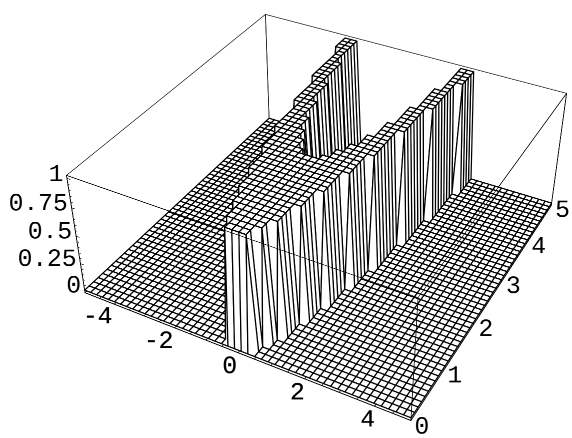
```
Integrate[Boole[0 ≤ y-x^2 ≤ 2], {x, -5, 5}, {y, 0, 5}]
```

Az eredmény $-4\sqrt{3} + \frac{20\sqrt{5}}{3}$ lesz.

Magát a tartományt egyébként a `<<Graphics`InequalityGraphics`` csomag beolvasása után az `InequalityPlot[0` $\leq$ `y-x`^{2} $\leq$ `2,{x,-5,5},{y,0,5}]` utasítás rajzolja ki.



A `Boole` logikai függvény értéke ott 1, ahol a megadott egyenlőtlenség fennáll, másutt zérus. Ez a `Plot3D[Boole[0` $\leq$ `y-x`^{2} $\leq$ `2],{x,-5,5},{y,0,5}]` paranccsal szemléltethető.



14. Hozzuk egyszerűbb alakra a „*(ha A, akkor B) és (A vagy B)*” logikai állítást.

A `LogicalExpand[Implies[A,B]&&(A||B)]` parancs eredménye értelmében a fenti állítás logikailag egyenértékű a B állítással.

15. Adjuk meg azon pozitív egészeket, melyek egyszerre $n^4 + n^2$ és $k^3 + 1$ alakúak, alkalmas $1 \leq n \leq 10^4$, $1 \leq k \leq 10^4$ pozitív egészekkel.

Az alábbi parancs

```
Intersection[Table[n^4+n^2,{n,1,10000}],Table[k^3+1,{k,1,10000}]]
```

két megoldást szolgáltat:

$\{2, 1332\}$

(Ellenőrzés: $1^4 + 1^2 = 2 = 1^3 + 1$, illetve $6^4 + 6^2 = 1332 = 11^3 + 1$.) A megoldás során két, a kívánt alakú számokból álló listát hozunk létre, majd vesszük ezen listák (vagy ha tetszik, halmazok) metszetét. Tudnánk még ilyen tulajdonságú számokat találni?

16. 1 és 10000 között $4k + 1$ vagy $4k + 3$ alakú prímből van több?

A $4k+1$ alakú, 10000-nél kisebb prímek száma 609, míg a $4k+3$ alakúaké 619, amint ezt az alábbi parancsok kiszámolják:

```
Length[Select[Range[10000]],(PrimeQ[#] && Mod[#,4]==1)&]

Length[Select[Range[10000]],(PrimeQ[#] && Mod[#,4]==3)&]
```

Vegyük szemügyre például az első sort. A `Select` parancs egy listába gyűjti ki azokat az elemeket a `Range[10000]` által létrehozott {1,2,...,10000} listából, melyeket `#` helyébe helyettesítve a

„*(prím-e* `#`*) és (4-gyel maradékosan osztva 1-et ad-e maradékul* `#`*)*”

nyitott mondatban igaz értéket kapunk. (Az ilyen nyitott mondatot vagy függvényt a *Mathematica*-ban *tiszta függvénynek* nevezzük. A tiszta függvényt & jellel kell lezárnunk.) Végül a `Length` megszámolja, hány elemet tartalmaz e kiválogatott lista.

17. Előfordul-e valahol a π szám tizedestört alakjában az 1234 szám?

Erre a kérdésre számítógép nélkül aligha válaszolhatnánk. A *Mathematica*-val a megoldás elegáns: az 1234 sorozat már az első 15000 jegy között előfordul, mert a

```
StringMatchQ[ToString[N[π,15000]],"*1234*"]
```

parancs *True*, azaz *igaz* értéket ad. Az `N` függvénnyel először meghatároztuk π értékét 15000 jegy pontossággal, ezt karakterlánccá alakítottuk át, majd megnéztük, ez tartalmazza-e valahol az "1234" jelsorozatot. Azt is meg tudjuk mondani, hogy pontosan hol: a

```
StringPosition[ToString[N[π,15000]],"1234"]
```

utasítás eredménye $\{\{13809, 13812\}\}$, tehát π jegyei között az "1234" szám a tizedesvessző után először a 13807–13810. helyen fordul elő. (Figyelembe vettük ugyanis, hogy a karakterlánccá alakított π-jegyek első két tagja a 3-as és maga a tizedespont.) Meg tudnánk-e oldani a feladatot úgy is, hogy nem alakítjuk át a tizedesjegyeket karakterlánccá?

18. Hány nullára végződik 1000 faktoriálisa?

E jól ismert kérdésre két megoldást is adunk, a válasz egyébként 249. Az első megoldás egy ciklus segítségével számol:

```
a=1000!;n=0;While[a/10 ∈ Integers, n++; a=a/10];n
```

Az értékadások után addig osztjuk az 1000! számot 10-zel, amíg csak egész az eredmény. Minden egyes osztáskor eggyel növeljük n értékét, így a nullák számát az n változó tartalmazza a ciklus végén, amit ki is íratunk. (A pontosvessző teszi lehetővé, hogy több utasítást írjunk egymás után egy sorba.)

Második megoldásunk általánosabb. Egy f függvényt definiálunk, mely tetszőleges, 4-nél nagyobb egész számot elfogad bemenetként, majd megadja, hogy hány nullára végződik n faktoriálisa:

```
f[n_Integer/;n>4] := Length[Split[IntegerDigits[n!]][[-1]]]
```

Először $n!$ számjegyeit az `IntegerDigits` segítségével egyesével egy listába tesszük. E listát a `Split` olyan részlistákra bontja, melyek az eredeti lista egymás után álló *azonos* elemeiből állnak. Ennek vesszük utolsó elemét a `[[-1]]` utasítással (az $n > 4$ feltétel garantálja, hogy valóban nullák állnak hátul), majd meghatározzuk az így adódó lista hosszát. (Például a `Split[IntegerDigits[10!]]` eredménye a {{3},{6},{2},{8,8},{0,0}} lista, melynek utolsó eleme {0,0}.) `f[1000]` eredménye természetesen ezzel a módszerrel is 249.

19. Írjunk függvényt egy szám faktoriálisának kiszámítására.

A számtalan lehetőség közül egy hatékony megoldást szolgáltat az alábbi definíció:

```
faktorialis[n_/; n ∈ Integers && n≥1] := Apply[Times, Range[n]]
```

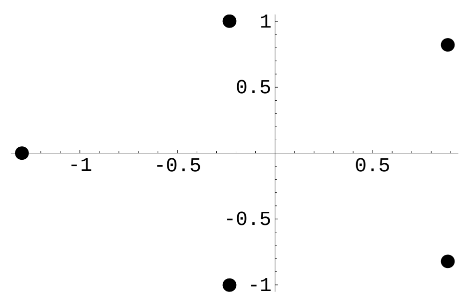
Hogy megvilágítsuk a definíció jobb oldalának működését, tekintsük az $n = 3$ esetet. Ekkor `Range[3]` értéke az {1,2,3} lista (melyet a *Mathematica* `List[1,2,3]` alakban tárol). Ennek *fejét*, azaz a `List` szót az `Apply` parancs `Times`-ra, azaz a szorzásra cseréli. Viszont `Times[1,2,3]` eredménye $1 \cdot 2 \cdot 3$, azaz 6.

20. Írjuk meg a `komplexgyokrajzolo` függvényt, melynek bemenete egy egyváltozós polinom, eredménye pedig e polinom gyökeinek képe a komplex számsíkon.

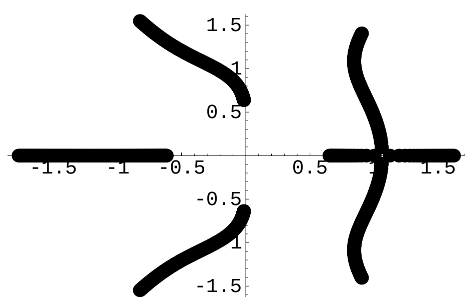
A *Mathematica*-ban mindez egyetlen összetett utasításként megvalósítható:

```
   komplexgyokrajzolo[polinom_] :=
ListPlot[Cases[NSolve[polinom==0][[All, 1, 2]],
      z:(_Complex|_Real)→{Re[z], Im[z]}], PlotStyle→PointSize[0.03]]
```

A nullára rendezett egyenletet először numerikusan megoldjuk (`NSolve`). Az eredmény egy (általában) komplex számokat tartalmazó speciális szerkezetű lista. A komplex számok közvetlenül még nem ábrázolhatók. Ezért e számokat rendre kigyűjtjük (erre szolgál az `[[All, 1, 2]]` operátor), majd (a valós-képzetes résznek megfelelően) valós koordinátapárokká alakítjuk, és egy új listában helyezzük el őket (ezt a `Cases` teszi meg). Végül ábrázoljuk ezt az új listát (`ListPlot`). (Mivel a *Mathematica* által választott pontméretet kicsinek találtuk, a `PointSize` segítségével megnöveltük a pontok méretét). Mindez az $x^5 + x^2 + 2$ polinomra alkalmazva így fest:



Végül az $x^5 + nx^2 + 2$ egyenlet gyökeit ábrázoltuk, amint n (-5)-től 5-ig fut, $\frac{1}{10}$-es lépésekben.



Hivatkozások

[1] Lóczi Lajos: A *Mathematica* első évtizede, Természet Világa, 129. évf. 11. sz. (1998) 515–518. oldal

[2] Szili László – Tóth János: Matematika és *Mathematica*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.

[3] Stephen Wolfram: The *Mathematica* Book, 4th edition, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.

[4] `www.wolfram.com`

[5] `mathworld.wolfram.com`

[6] `www.integrals.com`

[7] `www.wolfram.com/products/webmathematica/examples`