Komplex változós fügvények integrálása

Horváth Miklós előadásai nyomán összeállította Tóth János
BME TTK Matematikai Analízis Tanszék

2006. november 25.

1. A görbementi integrál definíciója

Legyen $U \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow U$ sima egyszerű görbe paraméterezése, és legyen $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Az $\int_\alpha^\beta f \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}$ számot az f függvény $L := \mathcal{R}_\gamma$ görbére vett integráljának nevezzük, és az $\int_L f$ szimbólummal jelöljük. Kapcsolat az $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ típusú függvények vonalintegráljával: $\int_L f = \int_L (u, -v) + j \int_L (v, u)$.

$|\int_L f| \leq \int_L |f|$.

1.1. tétel. (Newton–Leibniz) Ha létezik F primitív függvénye az f függvénynek, akkor $\int_L f = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$.

Biz.: Vizsgáljuk a valós és a képzetes részt, és alkalmazzuk a CR egyenleteket.

1.2. tétel. (Cauchy-féle integráltétel) Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor bármely $L \subset T$ sima egyszerű zárt görbére $\oint_L f = 0$.

1.3. tétel. (Cauchy-féle integrálformula) Ha L pozitív irányban egyszer kerüli meg az a pontot, és f reguláris az L görbe által körülzárt T tartomány lezárásán, akkor

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \quad (a \in T).$$

1.1. megjegyzés.
$$\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = 0 \quad (a \in \mathbb{C} \setminus T).$$

1.4. tétel. (Cauchy-féle integrálformula többszörösen összefüggő tartományra) Ha L pozitív irányban egyszer kerüli meg az a pontot, és f reguláris az L görbe által körülzárt T tartomány lezárásán kivéve a belsejében elhelyezkedő L_i görbék által körülzárt tartományokat, akkor

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j}\Big(\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta\Big) \quad (a \in T).$$

1.2. megjegyzés. Tartományon reguláris függvény ott akárhányszor differenciálható.

1.5. tétel. (Cauchy-féle integrálformula magasabb rendű deriváltakra) Egyszeresen összefüggő tartomány esetén:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{(n+1)}} d\zeta \quad (a \in T).$$

Hasonlóan többszörösen összefüggő tartományon:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j}\Big(\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta - \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{(n+1)}} d\zeta\Big) \quad (a \in T).$$

1.6. tétel. (Liouville tétele) Ha f az egész síkon reguláris korlátos függvény, akkor $f \equiv \mathrm{const}$.

1.7. tétel. (Az algebra alaptétele) Bármely valós vagy komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak a komplex számok körében van gyöke.

1.3. megjegyzés. Valós gyök nem mindig van, pl. $x^2 + 1 = 0$

1.8. tétel. (Középértéktétel) Ha f reguláris a $|z - z_0| \leq R$ körlapon, akkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{|z-z_0|\leq R} f(z) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{j\varphi})}{Re^{j\varphi}} Re^{j\varphi} d\varphi$$

ahol ds ívhossz szerinti integrált jelent. Azaz: a kör középpontjában a függvényérték a körvonalon vett értékek átlaga.

1.9. tétel. Ha u harmonikus a $\overline{K}_R(a)$ zárt körlapon, akkor

$$u(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R(a)} u.$$

1.10. tétel. (Maximumelv) Ha f reguláris a T tartományon, akkor $|f|$ nem lehet maximális T belső pontjaiban, kivéve, ha f állandó.

Biz.: (Heurisztikus, vázlat) Ha z_0-ban maximális, akkor minden z_0 középpontú körön, bárhová eljutunk stb.

1.1. következmény. (Minimumelv) Ha f reguláris a T tartományon, és $f \neq 0$, akkor $|f|$ nem lehet minimális T belső pontjaiban.

Biz.: Maximumelv az $\frac{1}{f}$ függvényre.