

1–2. Elsőrendű differenciálegyenletek

I. Elsőrendű differenciálegyenletek

1. Oldjuk meg az alábbi közvetlenül integrálható, autonóm és szétválasztható változójú egyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémákat. (A d) részben három feladat szerepel, k pozitív valós szám. Az f) részben vezessük be ezt: $u(x) := y(x)/x$.)

- a) $y'(x) = x + e^{-2x} \quad y(0) = 1$
- b) $y'(x) = \cos^2(x) \quad y(\pi) = 0$
- c) $y'(x) = \cosh^2(y(x)) \quad y(1) = 1$
- d) $y'(x) = ky(x)(1 - y(x)) \quad y(0) = 1/2 \quad y(0) = 1 \quad y(0) = 2$
- e) $xy'(x) = \ln(x) \quad y(1) = 0$
- f) $y'(x) = \frac{x - y(x)}{x + y(x)} \quad y(\sqrt{2}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

2. Oldjuk meg az alábbi lineáris elsőrendű differenciálegyenleteket.

- a) $y'(x) + 3y(x) = x + e^{-2x}$
- b) $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$
- c) $xy'(x) + 2y(x) = \sin(x)$

3. Keressünk általános megoldási módszert az

$$y'(x) + a(x)y = b(x)$$

alakú differenciálegyenletre, ahol $a, b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. a) Egy 20 literes edény levegőt tartalmaz (80% nitrogén és 20% oxigén). Az edénybe másodpercenként 0,1 liter nitrogén folyik be, amely folyamatosan elkeveredik, és a keverékből másodpercenként ugyanilyen mennyiség kifolyik. Mennyi idő múlva lesz az edényben 99% nitrogén?

b) A radioaktív anyag eredeti mennyiségének 50%-a elbomlik 30 nap alatt. Mennyi idő múlva marad csak 10% az eredeti mennyiségből? (Használjuk fel a radioaktív bomlás törvényét: az időegység alatt elbomló radioaktív anyag mennyisége egyenesen arányos a vizsgált pillanatban jelen levő anyag mennyiségével.)

II. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a Taylor-sorfejtés segítségével.

a) $y'(x) = x^2 + y(x)$

b) $y'(x) = \frac{2x - y(x)}{1 - x}$

c) $(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n + 1)y(x) = 0$

d) $y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$