

13. Végtelen sorok

I. Laurent-sorfejtés.

1.) Határozzuk meg az alábbi függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden lehetséges tartományon.

$$a.) \quad f(z) = \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = j;$$

$$b.) \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-j)}, \quad z_0 = j;$$

$$c.) \quad f(z) = e^z + \frac{1}{z}, \quad z_0 = 2.$$

2.) Írjuk fel az $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$ függvény -1 pont körüli Laurent-sorát és számoljuk ki az $\oint_{|z+2|=2} f$ és az $\oint_{|z+5|=1} f$ integrál értékét pozitív irányítással.

3.) Tekintsük az

$$f(z) = \frac{1}{(z+j)(z-1)^4}$$

függvényt. Írjuk fel az f függvény 1 bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergenciagyűrűjét és számoljuk ki a $\operatorname{res}_1 f$ és a $\operatorname{res}_{-j} f$ reziduumot valamint az

$\oint_{|z|=3} f$ integrált pozitív irányítással.

4.) Tekintsük az

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh}(z^2) - z^2}{4z^7} \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch}(z^3) - 1}{7z^9}$$

függvényeket. Írjuk fel az f függvény 0 bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergenciagyűrűjét és számoljuk ki az $\oint_{|z|=2} f$ és az $\oint_{|z-3|=2} f$ integrált negatív

irányítással.

5.) Tekintsük az

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$$

függvényt. Írjuk fel az f függvény 2 bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergenciagyűrűjét és számoljuk ki a $\operatorname{res}_2 f$ és a $\operatorname{res}_0 f$ reziduumot.