8. Felületi integrál

I. Számoljuk ki az a középsugarú és b gyűrűsugarú tórusz ($0 < b \leq a$) felszínét!

II. Számoljuk ki az $\iint_F v$ felületi integrált, ahol

1. $v(r) = |r|^3 \big(r \times (0,0,1)\big)$, F a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \leq 1$ része és a felület n normálvektorára $n(0,0,1) \geq 0$ teljesül.
2. $v(x,y,z) = (x, 3x, -2z)$, F az $(1,2,3)$ csúcspontú, a $z = 1$ síkban a $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ vezérgörbéjű kúppalást csúcspont és vezérgörbe közötti része, $n(0,0,1) \geq 0$ irányítással.
3. $v(x,y,z) = (x,y,z)$ és F az

$$r : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos v(3+\cos u), \sin v(3+\cos u), \sin u)$$

egyenletű tóruszdarab befele vett irányítással (vagyis az n normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé mutat).

III. Írjuk át a $\Delta U = 0$ kétdimenziós Laplace-féle differenciálegyenletet polárkoordinátákra!

IV.* Igazoljuk, hogy ha az $\mathbb{R}^3$ térben a gömbi koordinátákat használjuk a $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ függvény megadására, akkor

$$\Delta\Psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]\Psi(r,\vartheta,\varphi)$$

teljesül.

V.* A Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra: Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, melyet gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta\Phi = 0$, akkor a $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \dfrac{R}{r}\Phi\left(\dfrac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ függvényre is teljesül a $\Delta\Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}$ paraméter mellett.

---

3. Matematika A3, 2006.11.03., 1. lap, Andai Attila nyomán