# 9. Integráltételek

I. Szemléltesse az alábbi feladatokon a Gauss-Osztogradszkij-tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a térfogati integrált kiszámolja:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$;

a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0$;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (x - 2z)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} + (x - y + z)\mathbf{k}$;

a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

II. Szemléltesse az alábbi feladatokon a Stokes-tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a vonalintegrált kiszámolja:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (x + z)\mathbf{i} + (3y - 2z)\mathbf{j} + (5x - 3y)\mathbf{k}$;

a felület: $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ alakörű és (0,0,5) csúcspontú kúppalást;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := xz^2\mathbf{i} + zy^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$;

a felület a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid azon része, amelyre $x^2 + y^2 \leq 4$.

III. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Igazoljuk, hogy

$$\oint\limits_{x^2+y^2=2,\ z=0} \frac{\ln|r|}{|r|^2} r = 0.$$

2. Legyen $F$ a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és a normálisára teljesüljön az $n(0,0,1) \geq 0$ egyenlet és legyen $v(x,y,z) = (xz^2, zy^2, yx^2)$. Határozzuk meg az $\iint\limits_F \operatorname{rot} v(r)$ integrál értékét.

3. Számoljuk ki a $v(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott korlátos kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.

4. Legyen $v(x,y,z) = (x, y, -2z)$, $F$ az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része az $n(0,1,0) \geq 0$ irányítással. Határozzuk meg az $\iint\limits_F v$ integrál értékét.

5. Számítsuk ki a $v(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$ vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletettel megadott körhenger $-2 \leq z \leq 3$ felületére, kifele mutató irányítás mellett.

---

4. Matematika A3, 2006.11.07., 1. lap, Andai Attila nyomán