10. Az integráltételek következményei

I*. Integrálok differenciálása.

1. Legyen $A \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $\gamma \in C^2(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ olyan függvény, mely minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre egy $\gamma(\cdot, t) : I \to \mathbb{R}^3$ görbét ad meg, melyet $\Gamma(t)$-vel jelölünk. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int\limits_{\Gamma(t)} A(r,t) \;\mathrm{d}\,r = \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\partial A(r,t)}{\partial t} - v(r,t) \times \operatorname{rot} A(r,t) + \operatorname{grad}(v(r,t)A(r,t)) \;\mathrm{d}\,r$$

teljesül, ahol $v(\gamma(a,t),t) := (\partial_2\gamma)(a,t)$. Továbbá, ha minden $t \in I$ paraméterre a $\Gamma(t)$ görbe zárt, akkor az integrálban szereplő $\operatorname{grad}(vA)$ tag elhagyható.

2. Legyen $\rho \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $F \in C^2(T \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ pedig olyan függvény, mely minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre egy $F(\cdot, t) : T \to \mathbb{R}^3$ zárt, sima felület ad meg, melynek belsejét $V(t)$-vel jelöljük. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \iiint\limits_{V(t)} \rho(r,t) \;\mathrm{d}\,r = \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + v(r,t) \operatorname{grad} \rho(r,t) + \rho(r,t) \operatorname{div} v(r,t) \;\mathrm{d}\,r$$

teljesül, ahol $r = F(a,t)$ esetén $v(r,t) = (\partial_2 F)(a,t)$.

3. Legyen $A \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $T \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és $F \in C^2(T \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ olyan függvény, mely minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre egy $F(\cdot, t) : T \to \mathbb{R}^3$ sima felület ad meg, melyet $S(t)$-vel jelölünk. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \iint\limits_{S(t)} A(r,t) \;\mathrm{d}\,r = \iint\limits_{S(t)} \frac{\partial A(r,t)}{\partial t} + v(r,t) \operatorname{div} A(r,t) + \operatorname{rot}(A(r,t) \times v(r,t)) \;\mathrm{d}\,r$$

teljesül, ahol $r = F(a,t)$ esetén $v(r,t) = (\partial_2 F)(a,t)$.