Egy tanulságos hiba

2007. január 9.

Az első vizsgazárthelyi 5. feladatában az $f(z) := \frac{z^3}{z-4}$ képlettel értelmezett függvény 100. deriváltját kellett meghatározni az origóban.

1. Megoldás

Mivel

$$\frac{z^3}{z-4} = -\frac{z^3}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{z^3}{4}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}+\dots\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+3}}{4^{n+1}}, \qquad (1)$$

ha $|\frac{z}{4}| < 1$, vagyis ha $|z| < 4$; és mivel a nulla körüli 4 sugarú nyílt körlapon a függvény reguláris, ezért Taylor-sora előállítja őt, vagyis az is igaz, hogy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}.$$

Ezekből

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = -\frac{1}{4^{98}}, \text{azaz} f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{4^{98}}.$$

2. Másik „megoldás”

Fejtsük az f függvényt Laurent-sorba:

$$\frac{z^3}{z-4} = \frac{z^2}{1-\frac{4}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{z^{n-2}} = z^2+4z+16+\frac{64}{z}+\dots. \qquad (2)$$

Itt z^{100} együtthatója 0, tehát $f^{(100)}(0) = 0$.

Valóban igaz, hogy a Laurent-sor együttható így állnak elő:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{3}$$

a deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle integrálformula szerint pedig

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{4}$$

ámde (4) a G görbe belsejében adja meg a derivált értékét, (3) viszont a 4 és $+\infty$ sugarú körgyűrűben, tehát speciálisan az origóban *nem*. Vegyük észre, hogy az $|z| < 4$ körben a Taylor sor előállítja a függvényt. Ekkor a Taylor-sor megegyezik a Laurent-sorral, tehát a Laurent-sorba fejtés itt nem ad további információt.