

# Nánássi Berta - PUAWFQ

## Két életre szóló járadékok modellezése

A két életre szóló biztosítások esetén a biztosítók azzal az egyszerűsítéssel élnek, hogy a házaspárok halálozási valószínűségei függetlenek. Az elmúlt 40 évben azonban számos kutatás indult a témával kapcsolatban, miszerint a házaspárok életútjai nem függetlenek. Statisztika adatok alapján látszik, hogy függőség van a két életút között, melyet a nemzetközi irodalomban csak 'broken heart syndrome'-nak neveznek. Hosszú házasság után, ha elvesztik a társukat - ez különösen igaz a férfiakra -, akkor a túlélő fél halálozási valószínűsége megnő. Ezt a tényt fel lehetne használni mind az életbiztosítások, mind a járadékok árazásánál, így pontosabban lehetne árazni a termékeket, és a biztosítók is kisebb kockázattal működhetnének.

Ahhoz, hogy a statisztikai vizsgálatokat el lehessen végezni, olyan kétdimenziós adatbázisra van szükség, amelyben házaspáronként szerepelnek a születési és halálozási évszámok. Ilyen adatbázist egyetlen biztosító sem bocsátott rendelkezésemre, a Nyugdíjfolyósító Főigazgatóság pedig nem rendelkezik ilyen adatokkal, ezért saját gyűjtési adatbázissal dolgoztam. Az adathalmazom megközelítőleg 5000 adatból áll, melyek temetői adatbázisokból, illetve korábbi gyűjtésekből származnak. Az SPSS 18-cal történt kiértékelés után egyértelműen látszik a két életút közötti függés, hiszen ha férfi a túlélő, akkor a feleségük halála után 5 évben a túlélők 44%-a, 10 éven belül pedig a 69%-a hal meg. Nőknél 5 éven belül 27%, 10 éven belül 48% hal meg a férje halála után. Természetesen közrejátszik a halálozásoknál, hogy a férfiak várható élettartama alacsonyabb, de még ezen korreláció is fellép a két életút között.

A biztosítások díjszámításához halandósági táblára van szükség, amelyet a biztosítók vagy a saját adatbázisukból készítenek vagy pedig a KSH által készített néphalandósági táblából dolgoznak. A saját készítésű táblákat a biztosítók nem hozzák nyilvánosságra, így a KSH 2003-as néphalandósági táblájával dolgozom.

**Prno = Flatten[Import[[http://www.math.bme.hu/~nberta/l\\_x\\_no.xls](http://www.math.bme.hu/~nberta/l_x_no.xls)]];**

`Prffi = Flatten[Import[„http://www.math.bme.hu/~nberta/l_x_ff.xls”]];`

A számolásoknál figyelni kell arra, hogy a lista számozása 1-től kezdődik, míg a populáció a 0 évesektől. Így például a 22 éves nők száma az induló populációból:

`Prno[[23]] * 100000`

## Elméleti bevezető az egyszemélyes járadékokról

### A járadékbiztosítás

A szerződő előzetes díjfizetése ellenében, a biztosító vállalja, hogy szerződés feltételei szerint rendszeres időközönként pénzt folyósít a biztosított, vagy az általa megnevezett kedvezményezett részére. A biztosítás szolgáltatása, azaz a járadék folyósítása – a szerződő választása szerint – történhet a biztosított élete végéig vagy egy előre rögzített időpontig (pl. a kedvezményezett 70 éves koráig) illetve egy meghatározott időtartamig (pl. 10 év). A járadékbiztosítás, a díjfizetés szerint lehet folyamatos díjas vagy egyszeri díjas. Az Ügyfél választhat, hogy a járadék folyósítására alapot teremtő biztosítási díjat évek alatt (folyamatos díjfizetéssel) vagy egy nagyobb összeg (egyszeri) megfizetésével teljesíti.

A járadékbiztosítást sok esetben nyugdíj-kiegészítésnek szánják, így a díjfizetési idő a biztosított nyugdíjkorhatáráig tart, a járadékfizetés pedig a nyugdíjba lépéstől a biztosított haláláig.

### Egyszeri díjas azonnal induló életjáradék

Nagyobb összegű befizetés ellenében a biztosító arra vállal kötelezettséget, hogy minden év elején egy előre meghatározott összeget fizet a biztosított haláláig.

Ez a járadéktípus az egyik legfontosabb, ugyanis az összes járadék díjszámítása levezethető belőle.

A biztosítás nettó díja:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \dots + l_{x+\omega}v^\omega}{l_x}, \text{ ahol}$$

$l_x$  :  $x$  éves biztosítással rendelkezők száma a kihalási rend szerint

$\omega$  : maximális életkor

$$D_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j}v^j \quad j=0, 1, \dots$$

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \quad j=0, 1, \dots$$

$v = \frac{1}{1+i}$ , ahol  $i$  a technikai kamat.

A biztosítási számításoknál általában 3 %-os technikai kamattal számolnak, ezért én is ezt használom:

$$i = 0.03$$

$$v = 1/(1 + i)$$

A férfiakat jelöljük  $x$ -szel, a nőket pedig  $y$ -nal, így az előzőek alapján az egyszerűes nettó díjak:

$$ax[x\_ ] = \text{Sum}[\text{Prffi}[[x + 1 + j]] * v^j / \text{Prffi}[[x + 1]], \{j, 0, 100\}];$$

$$ay[y\_ ] = \text{Sum}[\text{Prno}[[y + 1 + j]] * v^j / \text{Prno}[[y + 1]], \{j, 0, 100\}];$$

## Kétszemélyes járadékok bemutatása

A kétszemélyes járadékoknak két biztosítottja van, általában egy házaspár két tagja, ahol a járadéktagot a két fél közösen halmozza fel. Ezeknél a biztosításoknál kétféleképpen alakulhat a biztosítási esemény. A egyik lehetőség, hogy a biztosítás az első halálkor szűnik meg és addig tart a járadékfizetés, illetve amikor a második halált tartjuk a biztosítási eseménynek. Amennyiben az első halálkor szűnik meg a biztosítás, akkor a túlélő fél már nem fog járadékot kapni, így azokkal foglalkozunk, amikor a második halálig tart a járadékkifizetés, így a túlélő házastársnak is tudunk járadékot biztosítani.

Az első halál után a túlélő fél a házastárs járadékának egy részét is megkaphatja, általában 30%-ot, hiszen a társa halála után a kiadásai nem csökkennek olyan mértékben, mint a bevételei. Ilyen esetekben megkülönböztetünk szimmetrikus és aszimmetrikus járadékokat. A szimmetrikus járadékoknál a házaspár bármely tagjának halála esetén a túlélő fél számít özvegynek és a járadékfolyósítás folytatódik, az aszimmetrikus járadékoknál azonban a szerződéskötéskor megállapítják a járadékost és a társbiztosítottat. Amennyiben a társbiztosított nem éli túl a járadékost, akkor a járadék-kifizetés megszűnik.

## Aszimmetrikus kétszemélyes járadékok

$x$  éves belépési korú biztosított,  $y$  éves belépési korú társbiztosított, aki a járadékos halála után a járadékos járadékának 30%-át megkapja. Ha a társbiztosított korábban meghal, akkor a járadék a járadékos halála utána megszűnik.

A járadék képlete:  $\ddot{a}_x + 0.3 \cdot \ddot{a}_y - 0.3 \cdot \ddot{a}_{xy}$  vagy  $0.3 \cdot \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 0.3 \cdot \ddot{a}_{xy}$

ahol  $\ddot{a}_x$ ,  $\ddot{a}_y$  az egyszemélyes járadékok nettó díjai,  $\ddot{a}_{xy}$  pedig a kétszemélyes járadék nettó díja. Ez a képlet általánosítható úgy, hogy a túlélő fél a járadékos járadékának  $R$ -ed részét kapja meg. Amennyiben az  $x$  éves belépési koró biztosított halála után  $y$  A járadékot kap,  $y$  halála után  $x$  B járadékot, a közös járadék pedig  $C$  akkor a járadék a következőképpen számítható:

$$A \cdot \ddot{a}_x + B \cdot \ddot{a}_y - (A + B - C) \cdot \ddot{a}_{xy}$$

Független esetben a járadék nettó díja, az egyszemélyes járadékok szorzataként kapható:

$$\text{axy}[x\_ , y\_ ] = \text{Sum}[\text{Prffi}[[x + 1 + k]] * \text{Prno}[[y + 1 + k]] * v^k / (\text{Prffi}[[x + 1]] * \text{Prno}[[y + 1]]), \{k, 0, 100\}];$$

Független nettó díj férfi járadékos és női kedvezményezett esetén, a kedvezményezett, amennyiben túléli a járadékos  $R$  hányadú járadékot kap:

$$\text{függetlennettódíjffi}[x\_ , y\_ , R\_ ] = \text{ax}[x] + R * \text{ay}[y] - R * \text{axy}[x, y];$$

$$\text{függetlennettódíjffi}[50, 50, 0.3]$$

Független nettó díj női járadékos és férfi kedvezményezett esetén:

$$\text{függetlennettódíjnő}[x\_ , y\_ , R\_ ] = R * \text{ax}[x] + \text{ay}[y] - R * \text{axy}[x, y];$$

$$\text{függetlennettódíjnő}[50, 50, 0.3]$$

$$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$$

$$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.6], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$$

$$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$$

$$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.6], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$$

$$\text{Manipulate}[\{\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3], \text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.3], \text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3] / \text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.3]\}, \{x, 50, 80, 1\}, \{y, 50, 80, 1\}]$$

A könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért a férfi és női díjak arányát is kiszámítom minden belépési életkor-párra:

$$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3] / \text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$$

Látható, hogy az esetek döntő többségében drágább a női járadékosra számított díj.

## Két életre szóló túlélési függvény

Ahhoz, hogy kiszámolhassunk a kétszemélyes túlélési valószínűségeket, az adathalmazból kell külön a férfiak és külön a nők túlélési éveire egy folytonos túlélési függvényt illeszteni. A témához kapcsolódó irodalomban mind a Gompertz-, mind a Weibull-függvényt használják.

Az adathalmazból SPSS segítségével a következő paramétereket kaptam meg:

	Férfi	Nő
Átlagéletkor	71.63	73.88
Szórás	9.869	10.110

Ezeket az adatokat felhasználva marginális túlélési függvényeket tudunk létrehozni a Weibull-függvény segítségével, amely az alábbi:

$$S_M(x) = e^{-\left(\frac{x}{m_m}\right)^{\frac{m_m}{\sigma_m}}}$$

$$S_F(y) = e^{-\left(\frac{y}{m_f}\right)^{\frac{m_f}{\sigma_f}}}$$

Férfiak túlélési függvénye a Weibull alapján:

$$\mathbf{Sff}[x\_ ] = E^{-(x/71.63)^{(71.63/9.869)}}$$

A halálozási függvény:

$$\mathbf{ferfi}[x\_ ] = 1 - \mathbf{Sff}[x]$$

Nők túlélési függvénye:

$$\mathbf{Sno}[y\_ ] = E^{-(y/73.88)^{(73.88/10.110)}}$$

A halálozási függvény pedig:

$$\mathbf{noi}[y\_ ] = 1 - \mathbf{Sno}[y]$$

Ezeket a függvényeket ábrázolva összehasonlíthatóak a nemek közötti különbségek a túlélésre vonatkozóan.

**Plot[{Sffi[i], Sno[i]}, {i, 0, 100}]**

Ezeket a marginális eloszlásokat felhasználva előállítható a kétdimenziós túlélési függvény a Gumbel–Hougaard- és Clayton-kopula segítségével.

### **Kopula**

Definíció: A  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  kopulák bináris függvények, melyre teljesülnek az alábbiak:

- $C(u, 0) = C(0, u) = 0 \quad \forall u \in [0, 1]$
- $C(u, 1) = C(1, u) = u \quad \forall u \in [0, 1]$
- $C([u_1, v_1] \times [u_2, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$ .

Gumbel–Hougaard-kopula

$$\alpha \geq 1$$

$C_{GH}(u, v, \alpha) = e^{-[(-\log u)^\alpha + (-\log v)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}}$ , ahol  $u$  és  $v$  helyére a Weibull-függvényből kinyert halálozási függvényeket helyettesítjük be,  $\alpha$  pedig a függőséget jellemző paraméter.

Clayton-kopula

$$\alpha > 0$$

$$C_C(u, v, \alpha) = [u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}$$

A kopuláknál használt  $\alpha$  függőségi paramétert a Kendall-féle  $\tau$  segítségével lehet meghatározni, ezt az együtthatót pedig a saját gyűjtésű adatbázisomból számoltam ki SPSS segítségével.

**tau = 0.146**

A Gumbel–Hougaard-kopulánál a függőségi paramétert az alábbi összefüggés alapján számolhatjuk ki:

$$\mathbf{alpha = 1/(1 - tau)}$$

A Clayton-kopula paramétere pedig a következőképpen kapható meg:

$$\mathbf{alfa = (2 * tau)/(1 - tau)}$$

Ezt a paraméter felhasználva kiszámíthatjuk a nettó díjat a kopulák segítségével

$$\mathbf{gumbel[Sffi_, Sno_, alpha_] = E^{(-((-Log[Sffi])^alpha + ((-Log[Sno])^alpha))^{1/alpha})}$$

$$\text{clayton}[\text{Sffi}_-, \text{Sno}_-, \text{alfa}_-] = (\text{Sffi}^{(-\text{alfa})} + \text{Sno}^{(-\text{alfa})} - 1)^{(-1/\text{alfa})}$$

A kétszemélyes közös nettó díj kiszámolás kopulák segítségével:

$$\ddot{a}_{xy} = \sum C(x+j, y+j)/C(x, y)v^j \quad j = 0, 1, \dots$$

A kétszemélyes díj:

$$\text{agumbel}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] = \text{Sum}[\text{gumbel}[\text{Sffi}[x+k], \text{Sno}[y+k], \text{alpha}] * v^k, \{k, 0, 51\}]/\text{gumbel}[\text{Sffi}[x], \text{Sno}[y], \text{alpha}];$$

$$\text{aclayton}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] = \text{Sum}[\text{clayton}[\text{Sffi}[x+k], \text{Sno}[y+k], \text{alpha}] * v^k, \{k, 0, 51\}]/\text{clayton}[\text{Sffi}[x], \text{Sno}[y], \text{alpha}];$$

$$\text{gumbelnettóffi}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{R}_-] = \text{ax}[x] + R * \text{ay}[y] - R * \text{agumbel}[x, y];$$

$$\text{claytonnettóffi}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{R}_-] = \text{ax}[x] + R * \text{ay}[y] - R * \text{aclayton}[x, y];$$

Valamint női járadékos és férfi kedvezményezett eseteén a díj:

$$\text{gumbelnettónő}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{R}_-] = R * \text{ax}[x] + \text{ay}[y] - R * \text{agumbel}[x, y];$$

$$\text{claytonnettónő}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{R}_-] = R * \text{ax}[x] + \text{ay}[y] - R * \text{aclayton}[x, y];$$

$$\text{Manipulate}[\{\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3], \text{gumbelnettóffi}[x, y, 0.3]\}, \{x, 50, 80, 1\}, \{y, 50, 80, 1\}]$$

A várakozásokkal ellentétben drágább lett a nettó díj, mindez azért van, mert a második halálig tart a járadékkifizetés, így túlárazza a díjat. Azonban az első halálig tartó járadékoknál megfelelően áraz, de azokat a mindennapi életben nem lehetne jól használni járadékként. A második halálig tartó járadékoknál változtatni kell a kopulák használatán.

### „Last survivor contract”

Ez a járadékfajta szintén a második halálig tart, a kedvezményezett a járadékos járadékának R-ed részét kapja meg a járadékos halála után. A számolásokhoz szükségünk van azokra a valószínűségekre, amikor mindkét fél életben van, illetve, hogy valamelyik fél életben van.

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni annak a valószínűségét, hogy valamelyik fél életben van, ki kell számolni a túlélési kopulát, amely marginálisai a férfi és nő halálozási függvények.

$$\text{gumbel}[1 - \text{Sffi}[x], 1 - \text{Sno}[y], \text{alpha}]$$

$$\text{clayton}[1 - \text{Sffi}[x], 1 - \text{Sno}[y], \text{alfa}]$$

Ezután meghatározható az a valószínűség, hogy valamelyik fél életben van:  
 $\text{gumbelvalakiéletben}[x\_ , y\_ ] = 1 - \text{gumbel}[1 - \text{Sffi}[x], 1 - \text{Sno}[y], \text{alpha}]$

$\text{claytonvalakiéletben}[x\_ , y\_ ] = 1 - \text{clayton}[1 - \text{Sffi}[x], 1 - \text{Sno}[y], \text{alfa}]$

Ezzel a valószínűséggel pedig megkaphatjuk annak a valószínűségét, hogy mindketten életben vannak:

$\text{gumbelkozosp}[x\_ , y\_ ] = \text{Prffi}[[x + 1]] + \text{Prno}[[y + 1]] - \text{gumbelvalakiéletben}[x, y];$

$\text{claytonkozosp}[x\_ , y\_ ] = \text{Prffi}[[x + 1]] + \text{Prno}[[y + 1]] - \text{claytonvalakiéletben}[x, y];$

Gumbel–Hougaard-kopula segítségével számolt nettó díj, amennyiben a 2. halálkor szűnik meg a járadékkifizetés:

$\text{Rgumbelnettódíjffi}[x\_ , y\_ , R\_ ] = \text{Sum}[v^k * (\text{Prffi}[[x + k]] + R * \text{Prno}[[y + k]] - R * \text{gumbelkozosp}[x + k, y + k]), \{k, 0, 100\}];$

$\text{Rgumbelnettódíjnő}[x\_ , y\_ , R\_ ] = \text{Sum}[v^k * (R * \text{Prffi}[[x + k]] + \text{Prno}[[y + k]] - R * \text{gumbelkozosp}[x + k, y + k]), \{k, 0, 100\}];$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjffi}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjffi}[x, y, 0.6], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.6], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

Clayton-kopula segítségével számolt nettó díjak:

$\text{Rclaytonnettódíjffi}[x\_ , y\_ , R\_ ] = \text{Sum}[v^k * (\text{Prffi}[[x + k]] + R * \text{Prno}[[y + k]] - R * \text{claytonkozosp}[x + k, y + k]), \{k, 0, 100\}];$

$\text{Rclaytonnettódíjnő}[x\_ , y\_ , R\_ ] = \text{Sum}[v^k * (R * \text{Prffi}[[x + k]] + \text{Prno}[[y + k]] - R * \text{claytonkozosp}[x + k, y + k]), \{k, 0, 100\}];$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjffi}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjnő}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjffi}[x, y, 0.6], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjnő}[x, y, 0.6], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

Ezek a díjak már megfelelően árazottak, hiszen figyelembe vették, hogy a díjkifizetés a második halálig tart. Ekkor a nettó díjak aránya:

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjffi}[x, y, 0.3]/\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjffi}[x, y, 0.3]/\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.3], \{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$



$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.3]/\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.3],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjnő}[x, y, 0.3]/\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.3],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjffi}[x, y, 0.6]/\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.6]/\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjffi}[x, y, 0.6]/\text{függetlennettódíjffi}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.6]/\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rclaytonnettódíjnő}[x, y, 0.6]/\text{függetlennettódíjnő}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

A számolások során két kopulát is használtam, így meg tudom vizsgálni, hogy melyik áraz jobban:

$\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjffi}[x, y, 0.3]/\text{Rclaytonnettódíjffi}[x, y, 0.3],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.3]/\text{Rclaytonnettódíjnő}[x, y, 0.3],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjffi}[x, y, 0.6]/\text{Rclaytonnettódíjffi}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$   
 $\text{MatrixForm}[\text{Table}[\text{Rgumbelnettódíjnő}[x, y, 0.6]/\text{Rclaytonnettódíjnő}[x, y, 0.6],$   
 $\{x, 50, 80, 5\}, \{y, 50, 80, 5\}]]$

Látható, hogy a mátrix mellékátlója fölött a Clayton-kopula áraz olcsóbban, alatta pedig a Gumbel–Hougaard-kopula, így a belépési korpárok függvényében lehetne alkalmazni a megfelelő kopulát. Az élethosszak közötti függőséget felhasználva új árazási módszert lehetne bevezetni a biztosítóknál, amellyel kedvezőbb áron tudnák kínálni a termékeiket, ezzel növelve a keresletet, illetve kisebb kockázattal, költséghatékonyabban működhethének a biztosítók. Sajnos itthon nincsen olya központi adatbázis, amelyben házaspárok szereplnének, a biztosítók pedig titkosították ezeket az adatbázisaikat. Nagyobb adathalmazzal pedig valószínűleg nagyobb korrelációs együttható adódott volna, így még olcsóbb díjakat kaphatnánk.

## Hivatkozások

- Banyár József: Életbiztosítás, AULA, 2006
- Ferguson, T. S. - Genest, C. - Hallin, M.: Kendall's Tau for Serial Dependence, The Canadian Journal of Statistics, Vol. 28, 2000
- Frees, E. W. - Valdez, E. A.: Understanding Relationships Using Copulas, North American Actuarial Journal, Vol. 2, 1998
- Luciano, E. - Spreeuw, J. - Vigna, E: Cross-generational Comparison of Stochastic Mortality of Coupled Lives, Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2010
- Shemyakin, A. - Youn, H.: Copula Models if Joint survival Analysis, Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2006
- Youn, H. - Shemyakin, A.: Pricing Practices for Joint Last Survivor, Actuarial Reserach Clearing House, 2001.