

Blokk-szívósság

Boros Benedek

2011. május 1.

1. Bevezetés

Václav Chvátal 1973-ban megjelent [4] cikkében vezette be a szívósság fogalmát. A szívósságnak és a Hamilton-kör létezésének kapcsolatát vizsgálta, ahogy utána sokan mások is. Ezen kutatások többségének alapját a Chvátal cikkében megfogalmazott sejtések alkotják. A legnagyobb kihívást jelentő sejtés máig nyitott: Létezik-e t_0 véges konstans, melyre igaz, hogy minden t_0 -szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört? Chvátal konkrét t_0 -ra is megfogalmazta sejtését: Minden $3/2$ -szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört. Ez utóbbit Thomassen cáfolta meg 1978-ban, lást [3]. Enomoto és társai [5] 1985-ben bebizonyították, hogy minden 2-szívós gráf tartalmaz 2-faktort, valamint azt, hogy tetszőleges pozitív ε esetén létezik olyan $(2 - \varepsilon)$ -szívós gráf, ami nem tartalmaz 2-faktort, így Hamilton-kört sem. Így adódik a következő, szintén Chvátalnak tulajdonított sejtés: Minden 2-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört. 2000-ben Bauer és társai [2] viszont ezt is megcáfolták. Olyan konstrukciót adtak, mellyel tetszőleges ε -ra olyan $(9/4 - \varepsilon)$ -szívós gráf adható, ami nem tartalmaz Hamilton-utat, így Hamilton-kört sem. A bizonyítás alapját egy kicsi (8 pontú), mégis szívós gráf jelenti, melyet a konstrukció során építőelemként használtak fel. Vizsgálataim során ehhez hasonló kis gráf keresése volt a cél a *Mathematica* segítségével, ily módon közelítve meg a sejtés esetleges megjavításának lehetőségét.

2. Terminológia

Az alábbiakban csak egyszerű, irányítatlan gráfokkal foglalkozunk. Egy G gráf minden pontját pontosan egyszer érintő utat *Hamilton-útnak*, minden pontját pontosan egyszer érintő kört *Hamilton-körnek* nevezzük. Egy gráf k -reguláris feszített részgráfját k -faktornak nevezzük. A G gráf pontjainak halmazát jelölje $V(G)$, összefüggő komponenseinek számát pedig $\omega(G)$. A G gráf t -szívós, ha $t \leq |S|/\omega(G - S)$ teljesül a gráf pontjainak minden olyan $S \in V(G)$ részhalmazára, melyre $\omega(G - S) > 1$, azaz bárhogy hagyunk el a gráfból S pontalmazt, a keletkező összefüggő komponensek száma legfeljebb $|S|/t$. A G gráf *szívóssága* az a legnagyobb t konstans, melyre G t -szívós. A G gráf szívósságát $\tau(G)$ -vel jelöljük. A teljes gráfok szívóssága legyen végtelen: $\tau(K_n) := +\infty$ ($n \geq 1$).

3. A Chvátal-sejtés cáfolata

Avagy: Nem minden 2-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Az alábbiakban bemutatjuk azt a konstrukciót [2], amellyel ellenpélda adható a Chvátal sejtésére, tehát bebizonyítjuk, hogy nem minden 2-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört.

A konstrukció

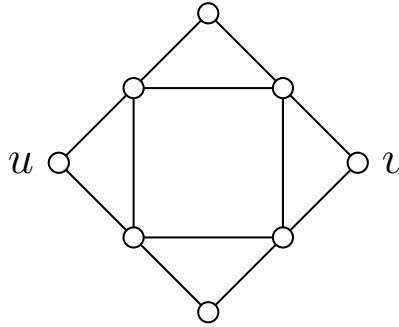
Adott H gráfra és két pontjára $(x, y \in V(H))$, valamint két természetes számra $(l, m \in \mathbb{N})$ definiáljuk a $G(H, x, y, l, m)$ gráfot. Jelölje H_1, \dots, H_m a H gráf m számú független másolatát, a H gráf x és y pontjainak megfelelő H_i -beli pontokat pedig x_i és y_i $(i = 1, \dots, m)$. Legyen F_m a $H_1 \cup \dots \cup H_m$ gráfból az $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}$ halmaz összes lehetséges pontpárja közötti él hozzávételével kapott gráf. Végül legyen $G(H, x, y, l, m) := K_l \vee F_m$, azaz a K_l teljes gráf és az F_m gráf uniója, melyben minden T -beli pont össze van kötve minden F_m -beli ponttal.

Az alábbi tétel bizonyítása Bauer és társai 1994-ben megjelent cikkéből való [1].

1. Tétel. *Legyen x és y a H gráf két olyan pontja, amelyek között nem vezet Hamilton-út. Ha $m \geq 2l + 3$, akkor $G(H, x, y, l, m)$ -ben nincs Hamilton-út.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $G(H, x, y, l, m)$ tartalmaz Hamilton-utat, legyen ez P . A P út és az F_m gráf metszete egy legfeljebb $l + 1$ számú független útból álló \mathcal{P} halmaz, és ezen utak együttesen tartalmazzák F_m minden pontját. Mivel $m \geq 2(l + 1) + 1$, van olyan H_{i_0} részgráf F_m -ben, amely \mathcal{P} egyetlen útjának végpontját sem tartalmazza. Ekkor P és H_{i_0} metszete olyan út, amely H_{i_0} minden pontját tartalmazza, és amelynek végpontjai x_{i_0} és y_{i_0} . Ez ellentmond annak, hogy a H_{i_0} gráf a H gráf másolata, melyben nincs x és y közötti Hamilton-út. \square

Tekintsük az alábbi ábrán látható L gráfot.



1. ábra. Az L gráf.

2. Tétel. *Ha $l \geq 2$ és $m \geq 1$, akkor*

$$\tau(G(L, u, v, l, m)) = \frac{l + 4m}{2m + 1}.$$

Bizonyítás. Legyen $\Gamma := G(L, u, v, l, m)$ valamely rögzített $l \geq 2$ és $m \geq 1$ természetes számokra. Válasszuk meg a Γ gráf pontjainak $S \subset V(\Gamma)$ részhalmazát úgy, hogy $\omega(\Gamma - S) > 1$ és $\tau(\Gamma) = |S|/\omega(\Gamma - S)$ teljesüljön. Ekkor nyilvánvalóan $V(T) \subseteq S$. Legyen $S_i := S \cap V(L_i)$, $s_i := |S_i|$, és jelölje ω_i az $L_i - S_i$ gráf azon összefüggő komponenseinek számát, melyek sem u_i -t, sem v_i -t nem tartalmazzák $(i = 1, \dots, m)$. Ekkor

$$\tau(\Gamma) = \frac{l + \sum_{i=1}^m s_i}{c + \sum_{i=1}^m \omega_i} \geq \frac{l + \sum_{i=1}^m s_i}{1 + \sum_{i=1}^m \omega_i},$$

ahol

$$c = \begin{cases} 0, & \text{ha } u_i, v_i \in S_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\text{-re,} \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Most megmutatjuk, hogy

$$s_i \geq 2\omega_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Először vegyük észre, hogy $\omega_i \leq 2$, mivel az $L - \{u, v\}$ gráfban a független pontok maximális száma 2. Ha $\omega_i = 0$ vagy $\omega_i = 1$, akkor $s_i \geq 2\omega_i$ nyilván teljesül. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $s_i \leq 3$, akkor $\omega_i \leq 1$, azaz $s_i \geq 2\omega_i$ az $\omega_i = 2$ esetben is teljesül.

Ebből következik, hogy

$$\tau(\Gamma) \geq \frac{l + 2 \sum_{i=1}^m \omega_i}{1 + \sum_{i=1}^m \omega_i}.$$

Mivel $l \geq 2$, ez az alsó korlát $\tau(\Gamma)$ -re $\sum_{i=1}^m \omega_i$ -nek nemnövekvő függvénye, és akkor veszi fel a minimumát, ha $\omega_i = 2$ minden $i \in \{1, \dots, m\}$ -re.

Így

$$\tau(\Gamma) \geq \frac{l + 4m}{2m + 1}.$$

Legyen $U = V(T) \cup U_1 \cup \dots \cup U_m$, ahol U_i az L_i gráf 4 fokszerű pontjainak halmaza L_i -ben ($i = 1, \dots, m$). Vegyük észre, hogy ekkor

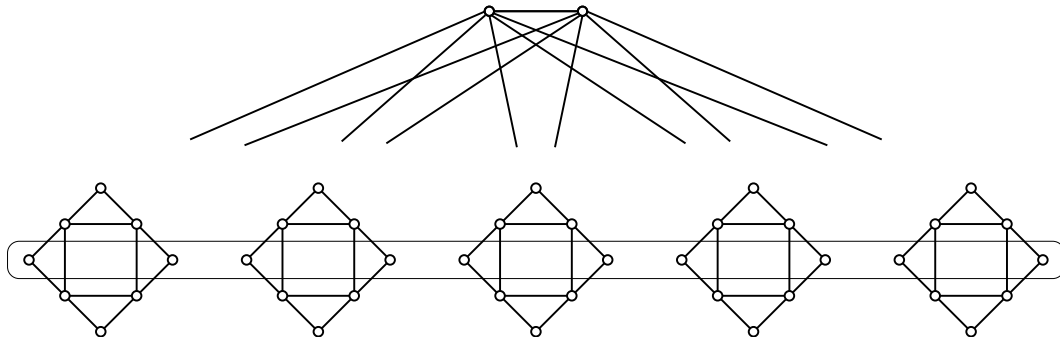
$$\tau(\Gamma) \leq \frac{|U|}{\omega(\Gamma - U)} = \frac{l + 4m}{2m + 1},$$

és ezzel beláttuk az egyenlőséget. □

Következmény. Bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik Hamilton-utat nem tartalmazó $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$ -szívós gráf.

Bizonyítás. Mivel az L gráfban nincs u -t és v -t összekötő Hamilton-út, az 1. tétel szerint a $G(L, u, v, l, 2l + 3)$ gráfban nincs Hamilton-út, és a 2. tétel szerint ennek a gráfnak a szívóssága $(9l + 12)/(4l + 7)$, ha $l \geq 2$. Így az l megfelelő megválasztásával a gráf szívóssága tetszőlegesen megközelíti a $9/4$ -et. □

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha az 1. tételben az „ $m \geq 2l + 3$ ” egyenlőtlenséget „ $m \geq 2l + 1$ ” egyenlőtlenségre, a „Hamilton-utat” pedig „Hamilton-körre” cseréljük, akkor a tétel állítása igaz marad. Ez azt jelenti, hogy a $G(L, u, v, 2, 5)$ gráf nem tartalmaz Hamilton-kört, és a 2. tétel szerint szívóssága 2. A gráfot a 2. ábrán szemléltetjük. Tehát a legkisebb ellenpélda Chvátal sejtésére, miszerint minden 2-szívós gráfban van Hamilton-kör, a 42 pontú $G(L, u, v, 2, 5)$ gráf. Hasonlóan a legkisebb Hamilton-utat nem tartalmazó 2-szívós gráf az 58 pontú $G(L, u, v, 2, 7)$ gráf.



2. ábra. A $G(L, u, v, 2, 5)$ gráf.

4. Blokk-szívósság

A 2. tétel bizonyításából kitűnik, hogy a $G(H, x, y, l, m)$ gráf szívósságának igazolásához azt használtuk fel, hogy az L gráf egy szívóssághoz hasonló mérőszáma nagy. Ennek a mérőszámnak a definíciója abban tér el a szívósság definíciójától, hogy az S ponthalmaz elhagyása után keletkezett komponensek közül csak azokat kell összeszámlálnunk, amelyek nem tartalmaznak két olyan általunk meghatározott pontot, amik között nem vezet Hamilton-út a gráfban. (A bizonyításban u és v az L két olyan pontja, melyek között nem vezet Hamilton-út L -ben.) Arra való tekintettel, hogy az L gráfot a konstrukció során építőelemként („building block”) használtuk fel, az így definiált mérőszámot *blokk-szívósságnak* neveztem el. A bizonyításból az is kiderül, hogy az L gráf blokk-szívóssága 2, mivel $s_i \geq 2\omega_i$ teljesül, ahol s_i az L gráf L_i másolatából elhagyott pontok száma, ω_i pedig az így keletkezett komponensek közül azoknak a száma, melyek nem tartalmazzák sem u -t, sem v -t.

Definíció. A G gráf $u, v \in V(G)$ pontpárra vonatkozó blokk-szívóssága

$$\beta(G; u, v) := \min_S \left(\frac{|S|}{\omega(G-S) - k} \mid S \subseteq V(G), \omega(G-S) - k \neq 0 \right),$$

ahol

$$k = \begin{cases} 0, & \text{ha } \{u, v\} \cap S = 2, \\ 1, & \text{ha } \{u, v\} \cap S = 1, \text{ vagy} \\ & \{u, v\} \cap S = 0, \text{ de } u \text{ és } v \text{ a } G-S \text{ gráf ugyanazon komponensében vannak,} \\ 2, & \text{ha } \{u, v\} \cap S = 0, \text{ de } u \text{ és } v \text{ a } G-S \text{ gráf különböző komponenseiben vannak.} \end{cases}$$

A G gráf *blokk-szívóssága* pedig

$$\beta(G) := \max_{\{u,v\}} \left(\beta(G; u, v) \mid u \text{ és } v \text{ között nem vezet Hamilton-út } G\text{-ben} \right).$$

Azt mondjuk, hogy a G gráf *b-blokk-szívós*, ha $\tau(G) \geq b$.

5. Gráfok vizsgálata a Mathematica-val

A Mathematica-val alacsony pontszámú gráfok vizsgálatát végeztem szívósság és blokk-szívósság szempontjából. A **Toughness** függvény megvizsgálja az argumentumként kapott gráf szívósságát. (Teljes gráfokra végtelent ad vissza.) A **BlockToughness** függvény megvalósítja a blokk-szívósság definícióját, és az argumentumként kapott gráfról (illetve gráfról és pontpárról) megállapítja a gráf blokk-szívósságát. (Olyan gráfokra, melyeknek minden lehetséges pontpárja között van Hamilton-út, mínusz végtelent ad vissza.) A gráfokat graph6 (.g6) formátumú állományból olvassuk be. A szívósságot ellenőrző függvény argumentuma egy gráf, a pontpárra vonatkozó blokk-szívósságot ellenőrző függvény argumentuma egy gráf és egy pontpár, viszont – kezelhetőségi szempontok végett – a blokk-szívósságot ellenőrző függvény argumentuma egy szomszédossági mátrix.

A graph6 formátum

Az irányítatlan gráfok tömör kódolására használt graph6 formátumot Brendan McKay, az Australian National University professzora fejlesztette ki. Elsősorban kicsi, vagy nagy és sűrű (legfeljebb $2^{36} - 1$ pontú) gráfok tárolására alkalmas. Graph6 formátumban a gráfokat kizárólag ASCII karakterekkel kódolják, soronként egy gráfot tartalmazó (.g6 kiterjesztésű) szövegfájlokban. A graph6 file-okban használt header: >>graph6<< (sor vége karakter nélkül).

Brendan McKay honlapjáról [7] letölthetőek a 2 – 10 pontszámú gráfokat tartalmazó graph6 formátumú file-ok. Pontszámoként külön letölthetőek a csak összefüggő gráfokat tartalmazó file-ok is. A gráfok *Mathematica*-val való vizsgálata során ezeket a file-okat használtam külső állományként. (A *Mathematica* **GraphData** parancsa csak neves gráfokat kezel, az adott pontszámú összes összefüggő gráf előállítására nem alkalmas.)

A kódolás [6]: Tekintsük a k bitből álló x bináris számot. Egészítsük ki 0-kkal jobbról úgy, hogy a hossza 6-nak többszöröse legyen, majd osszuk fel $\lceil k/6 \rceil$ darab 6 bites blokkra. Bináris számként értelmezve a blokkokat, adjunk hozzá mindhez külön-külön 63-at, így 1 byte-on tárolható (63 és 126 közötti) számokat kapunk. Jelölje $R(x)$ az x szám így kapott byte-string reprezentációját. Legyen n egy nemnegatív egész a $[0, 68719476735]$ intervallumból ($2^{36} - 1 = 68719476735$), és legyen

$$N(x) = \begin{cases} n + 63, & \text{ha } 0 \leq n \leq 62, \\ 126 R(x), & \text{ha } 63 \leq n \leq 258047, \text{ ahol } x \text{ az } n \text{ 18 bites bináris alakja,} \\ 126 \cdot 126 R(x), & \text{ha } 258048 \leq n \leq 68719476735, \text{ ahol } x \text{ az } n \text{ 36 bites bináris alakja.} \end{cases}$$

Példa.

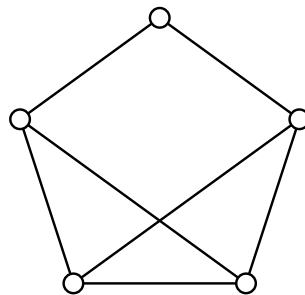
$$\begin{array}{rcl} x = & 1000101100011100 & \\ & \downarrow & \text{kiegészítjük két 0-val, hogy a hossza } 3 \cdot 6 = 18 \text{ legyen} \\ & 100010110001110000 & \\ & \downarrow & \text{6 bites blokkokra osztjuk} \\ & 100010 \ 110001 \ 110000 & \\ & \downarrow & \text{decimálissá alakítjuk, és minden blokkhoz hozzáadunk 63-at} \\ R(x) = & 97 \ 112 \ 111 & \end{array}$$

Példa.

$$\begin{aligned} N(30) &= 93 \\ N(12345) &= N(000011 \ 000000 \ 111001) = 126 \ 66 \ 63 \ 120 \\ N(460175067) &= N(000000 \ 011011 \ 011011 \ 011011 \ 011011 \ 011011) \\ &= 126 \ 126 \ 63 \ 90 \ 90 \ 90 \ 90 \ 90 \end{aligned}$$

Vegyünk egy n pontú G gráfot, és írjuk fel az A szomszédossági mátrixának felső háromszögét egyetlen bit-vektorral az alábbi sorrendben: $x = A_{1,2} \ A_{1,3} \ A_{2,3} \ A_{1,4} \ A_{2,4} \ A_{3,4} \ \dots \ A_{n-1,n}$. Ekkor a G gráf graph6 kódolású alakja: $N(n) \ R(x)$.

Példa. Tekintsük az alábbi ábrán látható G gráfot.



3. ábra. G gráf - graph6 példa.

A G gráf szomszédossági mátrixa:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

az átló feletti háromszög:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$x = 1 \ 01 \ 011 \ 1011,$$

$$N(n) = N(5) = 5 + 63 = 68, \text{ és } R(x) = R(101011 \ 101100) = 106 \ 107.$$

Így a G gráf graph6 kódolású alakja: **68 106 107**, ASCII karakterekkel pedig: **Djk**.

Szintén Brendan McKay nevéhez fűződik a *sparse6* formátum, ami a graph6-hez hasonlóan irányítatlan gráfok ASCII karakterekkel történő kódolását végzi, de első sorban nagy és ritka gráfok tárolására alkalmas.

Felmerült problémák

A program írása során a legtöbb problémát a *Combinatorica* csomag kompatibilitási hiányosságai okozták. Ezeket egy külön munkafüzetben összegyűjtve részletezem. Ezen kívül problémák adódtak a program futtatása során fellépő memóriahiányból. Ezt részben a program memória takarékoská váló átírása, részben a gráfokat tároló külső állomány részletekben történő feldolgozása, végül a program Octopuson történő futtatása oldotta meg.

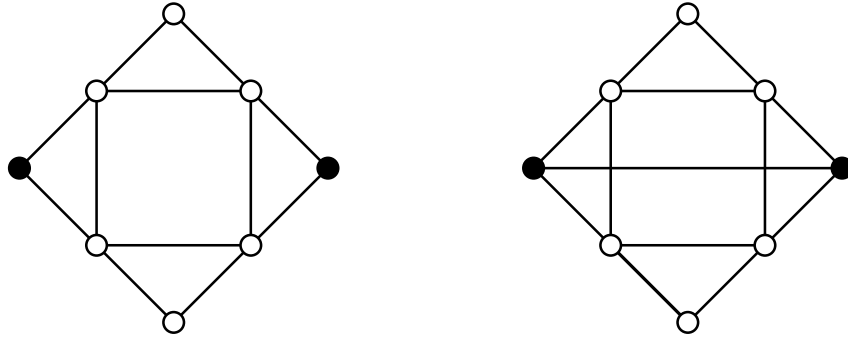
Eredmények és futási idők

Az alábbi táblázat a 3 – 9 pontú összefüggő gráfok szívóosságának és blokk-szívóosságának maximumait, valamint az ezek megállapításához szükséges futási időket tartalmazza.

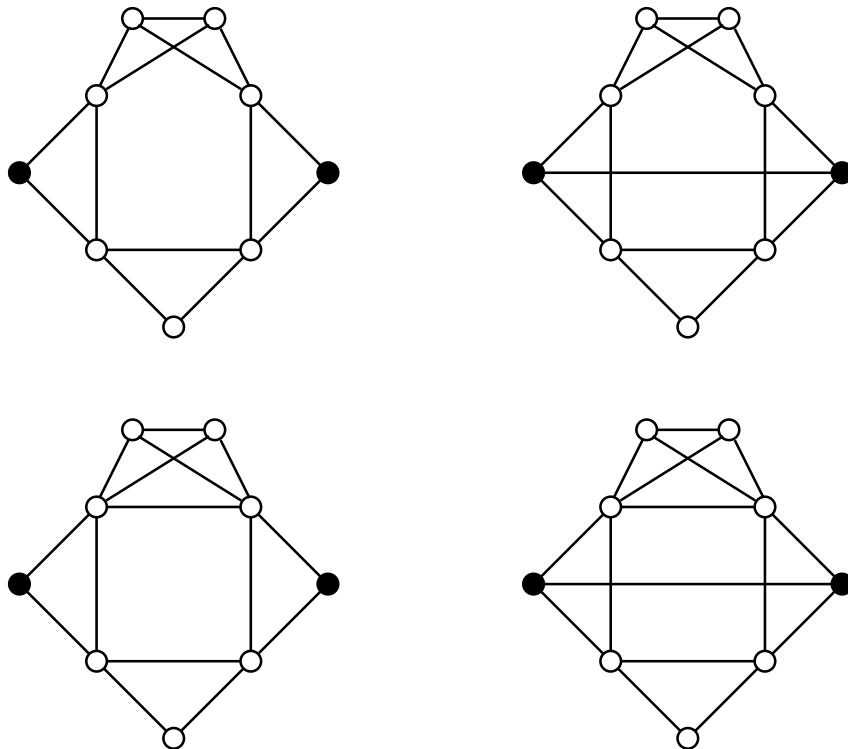
Pontszám $ V(G) $	Gráfok száma	Szívóosság maximuma	Futási idő kb. (AbsoluteTiming)	Blokk-szívóosság maximuma	Futási idő kb. (AbsoluteTiming)
3	2	1/2	0.1 mp	1	0.2 mp
4	6	1	0.3 mp	1	0.5 mp
5	21	3/2	0.9 mp	1	2.8 mp
6	112	2	4.9 mp	3/2	30 mp
7	853	5/2	40 mp	3/2	7 perc
8	11117	3	18.4 perc	2	4 óra
9	261080	7/2	17 óra	2	181 óra

1. táblázat. Eredmények és futási idők.

A vizsgálat eredménye szerint kettő 8 pontú, és négy 9 pontú gráf van, melyek blokk-szívóssága 2. A 4. és az 5. ábrán ezek a gráfok láthatók. A besatírozott pontpárok jelölik, hogy a gráfoknak mely pontpárra vonatkozó blokk-szívóssága 2.

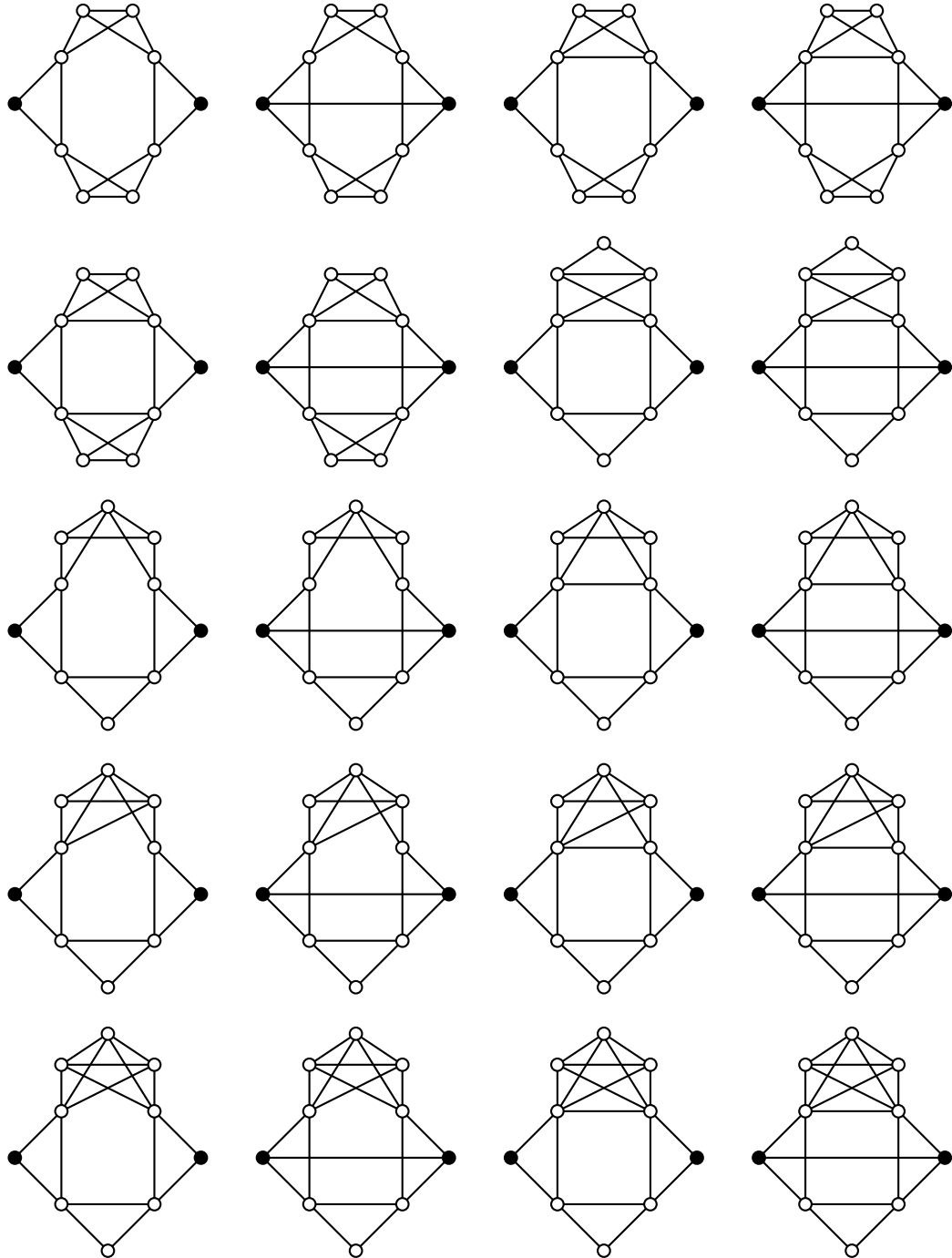


4. ábra. A 2-blokk-szívós 8 pontú gráfok.



5. ábra. A 2-blokk-szívós 9 pontú gráfok.

A 10 pontú gráfok teljes vizsgálata ezzel a módszerrel több évet venne igénybe, mivel a 10 pontú összfüggő gráfok száma 11716571. Az alábbi ábrán a fenti gráfok mintájára konstruált 10 pontú 2-blokk-szívós gráfok láthatók.



6. ábra. 2-blokk-szívós 10 pontú gráfok.

Hivatkozások

- [1] Bauer, D., Broersma, H.J., van den Heuvel, J., Veldman, H.J.: On Hamiltonian properties of 2-tough graphs, *J. Graph Theory* 18, 539 – 543 (1994).
- [2] Bauer, D., Broersma, H.J., Veldman, H.J.: Not every 2-tough graph is hamiltonian, *Discrete Appl. Math* 99, 317 – 321 (2000).
- [3] Bermond, J. C.: Hamiltonian graphs, in: L. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, London, 127 – 167 (1978).
- [4] Chvátal, V.: Tough graphs and Hamiltonian circuits, *Discrete Math.* 5, 215 – 228 (1973).
- [5] Enomoto, H., Jackson, B., Katerinis, P., Saito A.: Toughness and the existence of k -factors, *J. Graph Theory* 9, 87 – 95 (1985).
- [6] McKay, B.: Description of graph6 and sparse6 encodings, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.txt> (2005).
- [7] McKay, B.: Graphs, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html> (2005).