Blokk-szívósság

Boros Benedek

2011. május 13.

MŰEGYETEM 1782

BME

Terminológia

Terminológia

- ***Hamilton-kör***: egy gráf minden pontját egyszer érintő kör.

Terminológia

- ***Hamilton-kör***: egy gráf minden pontját egyszer érintő kör.
- ***Hamilton-út***: egy gráf minden pontját egyszer érintő út.

Terminológia

- ***Hamilton-kör***: egy gráf minden pontját egyszer érintő kör.
- ***Hamilton-út***: egy gráf minden pontját egyszer érintő út.
- ***Feszített részgráf***: egy gráf minden pontját tartalmazza.

Terminológia

- ***Hamilton-kör***: egy gráf minden pontját egyszer érintő kör.
- ***Hamilton-út***: egy gráf minden pontját egyszer érintő út.
- ***Feszített részgráf***: egy gráf minden pontját tartalmazza.
- k***-reguláris gráf***: minden pontjának fokszáma k.

Terminológia

- ***Hamilton-kör***: egy gráf minden pontját egyszer érintő kör.
- ***Hamilton-út***: egy gráf minden pontját egyszer érintő út.
- ***Feszített részgráf***: egy gráf minden pontját tartalmazza.
- k***-reguláris gráf***: minden pontjának fokszáma k.
- k***-faktor***: egy gráf k-reguláris feszített részgráfja.

Terminológia

- ***Hamilton-kör***: egy gráf minden pontját egyszer érintő kör.
- ***Hamilton-út***: egy gráf minden pontját egyszer érintő út.
- ***Feszített részgráf***: egy gráf minden pontját tartalmazza.
- k***-reguláris gráf***: minden pontjának fokszáma k.
- k***-faktor***: egy gráf k-reguláris feszített részgráfja.
- Jelölje $\omega(G)$ a G gráf komponenseinek számát.

A szívósság definíciója

A szívósság definíciója

Definíció.
Egy G gráf *t-szívós*, ha bármely $S \subset V(G)$ ponthalmazának elhagyásával legfeljebb $|S|/t$ komponensre esik szét, feltéve hogy szétesik. Tehát $t \leq |S|/\omega(G - S)$ teljesül minden olyan $S \subset V(G)$ esetén, amelyre $\omega(G - S) > 1$.

A szívósság definíciója

Definíció.
Egy G gráf *t-szívós*, ha bármely $S \subset V(G)$ ponthalmazának elhagyásával legfeljebb $|S|/t$ komponensre esik szét, feltéve hogy szétesik. Tehát $t \leq |S|/\omega(G-S)$ teljesül minden olyan $S \subset V(G)$ esetén, amelyre $\omega(G-S) > 1$.

A G gráf *szívóssága* az a legnagyobb t konstans, melyre G t-szívós. A G gráf szívósságát $\tau(G)$-vel jelöljük.

A szívósság definíciója

Definíció.
Egy G gráf *t-szívós*, ha bármely $S \subset V(G)$ ponthalmazának elhagyásával legfeljebb $|S|/t$ komponensre esik szét, feltéve hogy szétesik. Tehát $t \leq |S|/\omega(G-S)$ teljesül minden olyan $S \subset V(G)$ esetén, amelyre $\omega(G-S) > 1$.

A G gráf *szívóssága* az a legnagyobb t konstans, melyre G t-szívós. A G gráf szívósságát $\tau(G)$-vel jelöljük.

A teljes gráfok szívóssága legyen végtelen: $\tau(K_n) = \infty$ $(n \geq 1)$.

A szívósság definíciója

Definíció.
Egy G gráf t-*szívós*, ha bármely $S \subset V(G)$ ponthalmazának elhagyásával legfeljebb $|S|/t$ komponensre esik szét, feltéve hogy szétesik. Tehát $t \leq |S|/\omega(G-S)$ teljesül minden olyan $S \subset V(G)$ esetén, amelyre $\omega(G-S) > 1$.

A G gráf *szívóssága* az a legnagyobb t konstans, melyre G t-szívós. A G gráf szívósságát $\tau(G)$-vel jelöljük.

A teljes gráfok szívóssága legyen végtelen: $\tau(K_n) = \infty$ $(n \geq 1)$.

Tehát $\tau(G) = \min\{|S|/\omega(G-S)\}$, ahol a minimum $V(G)$ azon S részhalmazain fut végig, melyek elhagyásával szétesik a gráf.

Történeti áttekintés

Történeti áttekintés

- Chvátal (1973):
  - Szívósság fogalma
  - Szívósság és Hamilton-kör

Történeti áttekintés

- Chvátal (1973):
  - Szívósság fogalma
  - Szívósság és Hamilton-kör
  - Kérdés:

    Létezik-e t_0 véges konstans, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört? Ha igen, mi a legkisebb ilyen t_0?

Történeti áttekintés

- Chvátal (1973):
  - Szívósság fogalma
  - Szívósság és Hamilton-kör
  - Kérdés:

    Létezik-e t_0 véges konstans, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört? Ha igen, mi a legkisebb ilyen t_0?
- Thomassen (1978): $t_0 > 3/2$.

Történeti áttekintés

- Chvátal (1973):
  - Szívósság fogalma
  - Szívósság és Hamilton-kör
  - Kérdés:

    Létezik-e t_0 véges konstans, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört? Ha igen, mi a legkisebb ilyen t_0?
- Thomassen (1978): $t_0 > 3/2$.
- Enomoto és társai (1985):
  - Minden 2-szívós gráf tartalmaz 2-faktort.
  - $\exists$ $(2-\varepsilon)$-szívós gráf, ami nem tartalmaz 2-faktort ($\forall \varepsilon > 0$).

Történeti áttekintés

- Chvátal (1973):
  - Szívósság fogalma
  - Szívósság és Hamilton-kör
  - Kérdés:

    Létezik-e t_0 véges konstans, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört? Ha igen, mi a legkisebb ilyen t_0?
- Thomassen (1978): $t_0 > 3/2$.
- Enomoto és társai (1985):
  - Minden 2-szívós gráf tartalmaz 2-faktort.
  - $\exists$ $(2-\varepsilon)$-szívós gráf, ami nem tartalmaz 2-faktort ($\forall \varepsilon > 0$).

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Minden 2-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört?}}$

Történeti áttekintés

- Chvátal (1973):
  - Szívósság fogalma
  - Szívósság és Hamilton-kör
  - Kérdés:

Létezik-e t_0 véges konstans, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört? Ha igen, mi a legkisebb ilyen t_0?

- Thomassen (1978): $t_0 > 3/2$.
- Enomoto és társai (1985):
  - Minden 2-szívós gráf tartalmaz 2-faktort.
  - $\exists$ $(2-\varepsilon)$-szívós gráf, ami nem tartalmaz 2-faktort ($\forall \varepsilon > 0$).

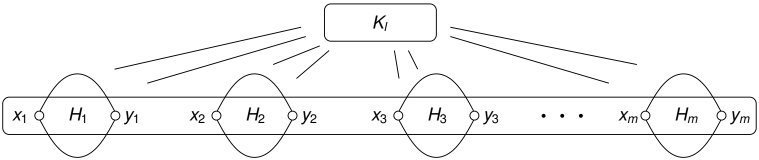
  $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Minden 2-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört?}}$

- Bauer és társai (2000): Konstrukció, amellyel ($\forall \varepsilon > 0$) $(9/4-\varepsilon)$-szívós Hamilton-kört nem tartalmazó gráf adható.

A sejtés cáfolata *(Nem minden 2-szívós gráfban van Hamilton-kör.)*

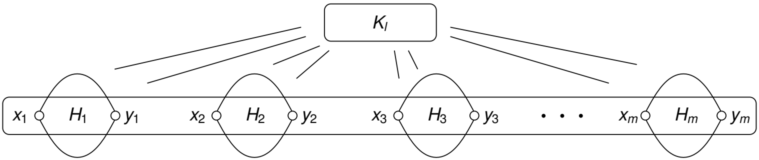
A sejtés cáfolata *(Nem minden 2-szívós gráfban van Hamilton-kör.)*

A konstrukció.
Adott H gráfra, két pontjára ($x, y \in V(H)$) és két természeteres számra ($l, m \in \mathbb{N}$) definiáljuk a $G(H, x, y, l, m)$ gráfot.



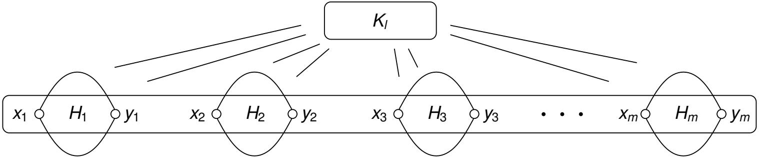
A sejtés cáfolata *(Nem minden 2-szívós gráfban van Hamilton-kör.)*

A konstrukció.
Adott H gráfra, két pontjára ($x, y \in V(H)$) és két természeteses számra ($l, m \in \mathbb{N}$) definiáljuk a $G(H, x, y, l, m)$ gráfot.
Jelölje $H_1, \ldots, H_m$ a H gráf másolatait, x_i és y_i pedig az x és y pontoknak megfelelő pontokat H_i-ben ($i = 1, \ldots, m$).



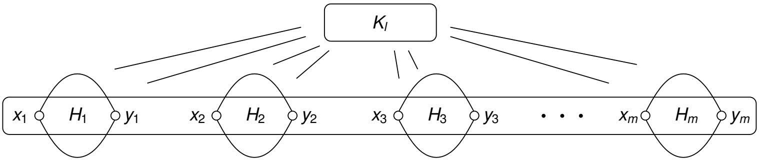
A sejtés cáfolata *(Nem minden 2-szívós gráfban van Hamilton-kör.)*

A konstrukció.
Adott H gráfra, két pontjára ($x, y \in V(H)$) és két természetes számra ($l, m \in \mathbb{N}$) definiáljuk a $G(H, x, y, l, m)$ gráfot.
Jelölje $H_1, \ldots, H_m$ a H gráf másolatait, x_i és y_i pedig az x és y pontoknak megfelelő pontokat H_i-ben ($i = 1, \ldots, m$).
Legyen F_m a $H_1 \cup \cdots \cup H_m$ gráfból az $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m\}$ összes lehetséges pontpárja közötti él behúzásával kapott gráf.



A sejtés cáfolata (Nem minden 2-szívós gráfban van Hamilton-kör.)

A konstrukció.
Adott H gráfra, két pontjára ($x, y \in V(H)$) és két természeteres számra ($l, m \in \mathbb{N}$) definiáljuk a $G(H, x, y, l, m)$ gráfot.
Jelölje $H_1, \dots, H_m$ a H gráf másolatait, x_i és y_i pedig az x és y pontoknak megfelelő pontokat H_i-ben ($i = 1, \dots, m$).
Legyen F_m a $H_1 \cup \dots \cup H_m$ gráfból az $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}$ összes lehetséges pontpárja közötti él behúzásával kapott gráf.
Ekkor $G(H, x, y, l, m) := K_l \vee F_m$, azaz a $K_l \cup F_m$ gráfból az összes lehetséges K_l és F_m közötti él behúzásával kapott gráf.



A sejtés cáfolata

A sejtés cáfolata

Tétel

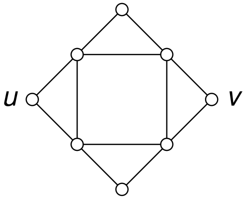
Legyen x és y a H gráf két olyan pontja, amelyek között nem vezet Hamilton-út. Ha $m \geq 2l + 1$, akkor $G(H, x, y, l, m)$-ben nincs Hamilton-kör.

A sejtés cáfolata

Tétel

Legyen x és y a H gráf két olyan pontja, amelyek között nem vezet Hamilton-út. Ha $m \geq 2l + 1$, akkor $G(H, x, y, l, m)$-ben nincs Hamilton-kör.

Tekintsük az alábbi L gráfot:



A sejtés cáfolata

A sejtés cáfolata

Tétel

Legyen $l \geq 2$ és $m \geq 1$. Ekkor

$$\tau(G(L, u, v, l, m)) = \frac{l+4m}{2m+1}.$$

A sejtés cáfolata

Tétel

Legyen $l \geq 2$ és $m \geq 1$. Ekkor

$$\tau(G(L,u,v,l,m)) = \tfrac{l+4m}{2m+1}.$$

A bizonyítás kulcs momentuma:

Az L gráf L_i másolataira igaz, hogy

$$s_i \geq 2\omega_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

ahol s_i az L gráf L_i másolatából elhagyott pontok száma, ω_i pedig az így keletkezett komponensek közül azoknak a száma, amelyek nem tartalmazzák sem u-t, sem v-t.

A sejtés cáfolata

A sejtés cáfolata

Tétel

Bármely $\varepsilon > 0$ *esetén létezik Hamilton-kört nem tartalmazó* $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$*-szívós gráf.*

A sejtés cáfolata

Tétel

Bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik Hamilton-kört nem tartalmazó $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$-szívós gráf.

Bizonyítás. Mivel az L gráfban nincs u-t és v-t összekötő Hamilton-út, a $G(L, u, v, l, 2l + 1)$ gráfban nincs Hamilton-kör.

A sejtés cáfolata

Tétel

Bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik Hamilton-kört nem tartalmazó $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$-szívós gráf.

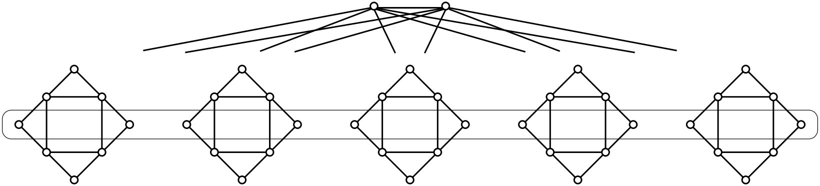
Bizonyítás. Mivel az L gráfban nincs u-t és v-t összekötő Hamilton-út, a $G(L, u, v, l, 2l + 1)$ gráfban nincs Hamilton-kör. Az előző tétel szerint ha $l \geq 2$, akkor $\tau(G(L, u, v, l, 2l + 1)) = \frac{9l+4}{4l+3}$, és $\frac{9l+4}{4l+3} \rightarrow \frac{9}{4}$, ha $l \rightarrow \infty$. $\square$

A sejtés cáfolata

Tétel

Bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik Hamilton-kört nem tartalmazó $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$-szívós gráf.

Bizonyítás. Mivel az L gráfban nincs u-t és v-t összekötő Hamilton-út, a $G(L, u, v, l, 2l + 1)$ gráfban nincs Hamilton-kör. Az előző tétel szerint ha $l \geq 2$, akkor
$\tau(G(L, u, v, l, 2l + 1)) = \frac{9l+4}{4l+3}$, és $\frac{9l+4}{4l+3} \to \frac{9}{4}$, ha $l \to \infty$. $\square$



A blokk-szívósság definíciója

A blokk-szívósság definíciója

A fenti tétel bizonyításának kulcs momentuma: $s \geq 2\omega$
$\Longrightarrow$ az L gráf egy szívóssághoz hasonló mérőszáma 2.

A blokk-szívósság definíciója

A fenti tétel bizonyításának kulcs momentuma: $s \geq 2\omega$ $\Longrightarrow$ az L gráf egy szívóssághoz hasonló mérőszáma 2. A különbség: ω csak az u-t és v-t nem tartalmazó komponenseket számlálja össze, nem az összeset.

A blokk-szívósság definíciója

A fenti tétel bizonyításának kulcs momentuma: $s \geq 2\omega$
$\Longrightarrow$ az L gráf egy szívóssághoz hasonló mérőszáma 2.
A különbség: ω csak az u-t és v-t nem tartalmazó komponenseket számlálja össze, nem az összeset.

Definíció.
A G gráf $u, v \in V(G)$ *pontpárra vonatkozó blokk-szívóssága* b, ha bármely $S \subset V(G)$ ponthalmazának elhagyása után a sem u-t, sem v-t nem tartalmazó komponensek száma legfeljebb $|S|/b$. Jelölésben: $\beta(G; u, v) = b$.

A blokk-szívósság definíciója

A fenti tétel bizonyításának kulcs momentuma: $s \geq 2\omega$ $\Longrightarrow$ az L gráf egy szívóssághoz hasonló mérőszáma 2.
A különbség: ω csak az u-t és v-t nem tartalmazó komponenseket számlálja össze, nem az összeset.

Definíció.
A G gráf $u, v \in V(G)$ *pontpárra vonatkozó blokk-szívóssága* b, ha bármely $S \subset V(G)$ ponthalmazának elhagyása után a sem u-t, sem v-t nem tartalmazó komponensek száma legfeljebb $|S|/b$. Jelölésben: $\beta(G; u, v) = b$.

A G gráf *blokk-szívóssága* $\beta(G) = \max\{\beta(G; u, v)\}$, ahol a maximum azokon az u, v pontpárokon fut végig, amelyek között nincs Hamilton-út G-ben.

Gráfok vizsgálata a *Mathematica*-val

Gráfok vizsgálata a *Mathematica*-val

- **Motiváció:**
  Ha találnánk olyan H gráfot, amelyre $\beta(H) > 2$, akkor a $G(H, x, y, l, m)$ gráf szívóssága növelhető lenne.

Gráfok vizsgálata a *Mathematica*-val

- **Motiváció:**
  Ha találnánk olyan H gráfot, amelyre $\beta(H) > 2$, akkor a $G(H, x, y, l, m)$ gráf szívóssága növelhető lenne.

- **Terv:**
  Alacsony pontszámú összefüggő gráfok szívósságának és blokk-szívósságának vizsgálata a *Mathematica*-val.

Gráfok vizsgálata a *Mathematica*-val

- **Motiváció:**
  Ha találnánk olyan H gráfot, amelyre $\beta(H) > 2$, akkor a $G(H, x, y, l, m)$ gráf szívóssága növelhető lenne.

- **Terv:**
  Alacsony pontszámú összefüggő gráfok szívósságának és blokk-szívósságának vizsgálata a *Mathematica*-val.

- **Cél:**
  Olyan G gráf konstruálása, amely nem tartalmaz Hamilton-kört, és amelyre $\tau(G) \geq 9/4$.

Gráfok vizsgálata a *Mathematica*-val

- **Motiváció:**
  Ha találnánk olyan H gráfot, amelyre $\beta(H) > 2$, akkor a $G(H, x, y, l, m)$ gráf szívóssága növelhető lenne.
- **Terv:**
  Alacsony pontszámú összefüggő gráfok szívósságának és blokk-szívósságának vizsgálata a *Mathematica*-val.
- **Cél:**
  Olyan G gráf konstruálása, amely nem tartalmaz Hamilton-kört, és amelyre $\tau(G) \geq 9/4$.
- **Vizsgálat:**
  1 – 9 pontú összefüggő gráfok szívósságának és blokk-szívósságának feltérképezése.

Eredmények

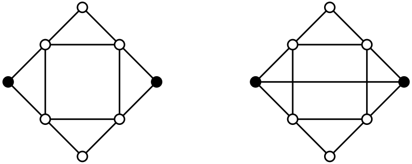
Eredmények

Pontszám $\lvert V(G) \rvert$	Gráfok száma	$\tau(G)$ max	Futási idő	$\beta(G)$ max	Futási idő
3	2	1/2	0.1 mp	1	0.2 mp
4	6	1	0.3 mp	1	0.5 mp
5	21	3/2	0.9 mp	1	2.8 mp
6	112	2	4.9 mp	3/2	30 mp
7	853	5/2	40 mp	3/2	7 perc
8	11117	3	18 perc	2	4 óra
9	261080	7/2	17 óra	2	181 óra

Eredmények és futási idők.

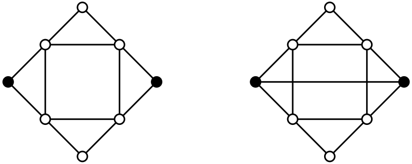
A 8 és 9 pontú gráfok

A 8 és 9 pontú gráfok

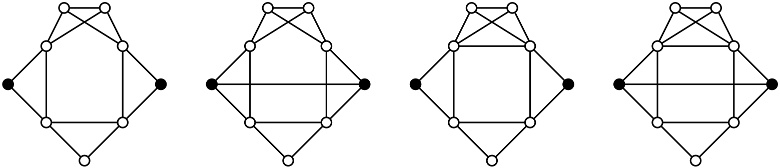


1. ábra. A 2-blokk-szívós 8 pontú gráfok.

A 8 és 9 pontú gráfok



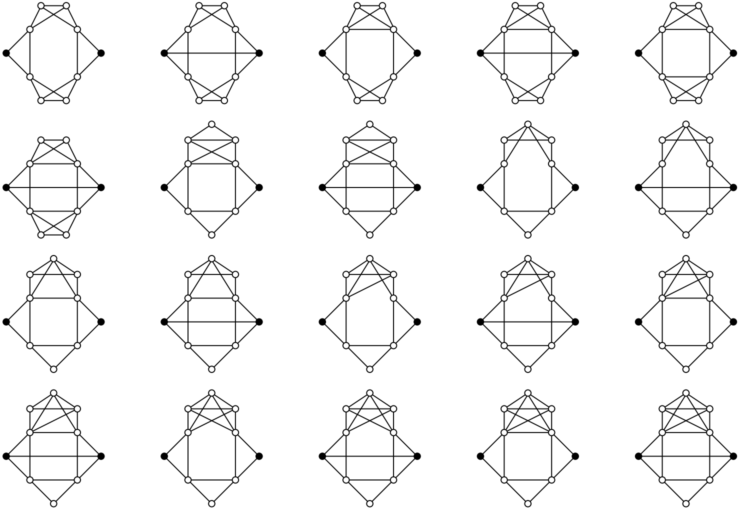
1. ábra. A 2-blokk-szívós 8 pontú gráfok.



2. ábra. A 2-blokk-szívós 9 pontú gráfok.

2-blokk-szívós 10 pontú gráfok

2-blokk-szívós 10 pontú gráfok



A *Combinatorica* csomag

A *Combinatorica* csomag

A *Combinatorica* csomag kompatibilitási hiányosságai

A *Combinatorica* csomag

A *Combinatorica* csomag kompatibilitási hiányosságai

Mathematica 8

A *Combinatorica* csomag

A *Combinatorica* csomag kompatibilitási hiányosságai

Mathematica 8

Beépített függvények

Combinatorica függvények

A *Combinatorica* csomag

A *Combinatorica* csomag kompatibilitási hiányosságai

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \textit{Mathematica}\ 8 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Beépített függvények} \arrow[d] & & \textit{Combinatorica}\ \text{függvények} \arrow[d] \\
\text{System`Graph} & & \text{Combinatorica`Graph}
\end{tikzcd}$$

A *Combinatorica* csomag

A *Combinatorica* csomag kompatibilitási hiányosságai

$$\begin{tikzcd} & \textit{Mathematica}\ 8 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Beépített függvények} \arrow[d] & & \textit{Combinatorica}\text{ függvények} \arrow[d] \\ \text{System`Graph} \arrow[rr, shift left, "\texttt{ToCombinatoricaGraph}"] & & \text{Combinatorica`Graph} \arrow[ll, shift left, "\texttt{ToSystemGraph}"] \end{tikzcd}$$

Köszönöm a figyelmet!

Hivatkozások

- Bauer, D., Broersma, H.J., van den Heuvel, J., Veldman, H.J.: On Hamiltonian properties of 2-tough graphs, J. Graph Theory 18, 539 – 543 (1994).
- Bauer, D., Broersma, H.J., Veldman, H.J.: Not every 2-tough graph is hamiltonian, Discrete Appl. Math 99, 317 – 321 (2000).
- Bermond, J. C.: Hamiltonian graphs, in: L. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), Selected Topics in Graph Theory, Academic Press, London, 127 – 167 (1978).
- Chvátal, V.: Tough graphs and Hamiltonian circuits, Discrete Math. 5, 215 – 228 (1973).
- Enomoto, H., Jackson, B., Katerinis, P., Saito A.: Toughness and the existence of *k*-factors, J. Graph Theory 9, 87 – 95 (1985).