Programozási feladat 3 (terv)
Az híres neves $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ térnek az kövezéseirül

Szép Enikő*

December 5, 2010

A 2×2-es egységnyi determinánsú valós mátrixok Lie-csoportot alkotnak, melynek jele: $SL(2,\mathbb{R})$. Mint minden Lie-csoport, ez is indukál egy Riemann-metrikát a csoporton, mely invariáns a jobbról szorzásra. A hiperbolikus síkot, mint alapteret, bizonyos módon pontonként ellátva az $\mathbb{R}$ fibrummal egy olyan fibrált nyalábot kapunk, melynek természetes Riemann-metrikája megegyezik az $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ Riemann-metrikájával. (Vagyis az $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ tér egy fibrált nyaláb, melynek alaptere kétdimenziós, fibruma pedig egydimenziós.) Ezt a teret az euklideszi síkba beágyazva modellezhetjük egy egyköpenyű hiperboloiddal. A fibrált nyalábként kapott modelljét az $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$-nek Beltrami–Cayley–Klein-modellnek nevezik.

Differenciálgeometriai vizsgálódásaimat ezen utóbbi modellben végzem. A geodetikusok egyenlete ismert ezen a téren, azonban a geodetikus gömb térfogata még ismeretlen. Ehhez kapcsolódóan a következőket vizsgálom. Vegyük a hiperbolikus alapsíkot (Cayley–Klein-modell), melyen megadunk egy derékszögű háromszöget, melynek egyik csúcsa az origó. Ezt a háromszöget fibrum irányba eltolva egy ,,csavarodott prizmát" kapunk. Keressük az ebbe írható gömböt, és vizsgáljuk a térfogataik arányát az alapháromszög szögeinek nagyságától függően. A háromszöget tükrözhetjük az oldalaira is, ekkor egy szabályos n szöget kapunk az origó körül. Mekkora n esetén hogyan aránylanak egymáshoz a térfogatok? Ezen a sokaságon háromféle geodetikust tudunk megkülönböztetni, lehet térszerű, fényszerű vagy fibrumszerű. Így a gömböt is három részből tudjuk ,,összerakni". Vizsgáljuk, hogy a gömb és a többi alakzat hogyan viselkedik, ha eltoljuk a modellben. Itt lehet sok érdekességet találni, (például túl nagy eltolás esetén a gömb széthullik). Ennek szemléltetésére különböző animációkat készíthetünk.

A számítógépes programok nagyban hozzásegítenek ezeknek a furcsa tereknek a megértéséhez, szemléltetéséhez, ugyanis sokszor már a geodetikusok egyenlete olyan bonyolult, hogy szinte lehetetlen elképzelni még az egyszerűbb alakzatokat is. Én is ehhez fogom használni a *Mathematica*-t Programozási feladat 3 tantárgyból.

---

* AH4WUN