

Vese csere program matematikai modellje

Varga Gábor

May 1, 2011

1 Bevezetés

Alvin E. Roth, Tayfun Sönmez, M. Utku Ünver *Kidney Exchange* című cikke alapján azzal foglalkoztam, hogy hogyan lehet különböző algoritmusok segítségével minnél hatékonyabbá tenni a vese csere programot. Manapság egy vesebetegnek, ha donor szervhez akar jutni két lehetősége van: vagy van egy hozzátartozója aki hajlandó donor lenni és ha éppen kompatibilisak, akkor elvégezhető a transzplantáció; vagy bekerül a halott vese várólistára, ahol bizonytalan idő múlva kap egy vesét. A fent említett cikk szerzőinek az újítása az, hogy az élődonorral rendelkező betegek esetén nem csak a donor és kedvezményezettje között hajtható végre a transzplantáció, hanem lehetséges az, hogy a donor másnak adja a veséjét, annak érdekében, hogy kedvezményezettje jobb minőségű (vagy magasabb fokú kompatibilitással rendelkező) vesét kapjon.

A szerzők a következő eljárásokat vizsgálták:

1. **Donor és kedvezményezettje közti transzplantáció:** Leggyakrabban alkalmazott eljárás.
2. **Páros vese csere:** Jelenleg az Egyesült Államokban működő eljárás, de nem elég hatékony, mivel csak két donor-beteg pár közt teszi lehetővé a szervek cseréjét.
3. **RSD-SR algoritmus:** Hátránya, hogy az eljárásban résztvevőknek nem garantál legalább olyan jó állapotot, mint amilyennel eleve rendelkeznek.
4. **TTC eljárás:** Az élődonorral rendelkező betegek közt Pareto-hatékonyan¹ osztja el a veséket, de nem veszi figyelembe a halott várólista lehetőségét, amivel tovább növelhető a hatékonyság.
5. **YRM-IGYT eljárás:** Ez az algoritmus figyelembe veszi a halott várólista lehetőségét, viszont statikusan tudja csak kezelni a problémát, azaz nem veszi figyelembe azt, hogy a halottból származó szerv minősége és megjelenésének időpontja bizonytalan.
6. **TTCC algoritmus:** A vizsgált algoritmusok közül a legelőnyösebb, újítás a TTC-hez képest az, hogy a beteg magas prioritást kap a halott várólistán, ha donorja vesét ad a várólistán levőknek, a cikk szerzői ezt javasolják gyakorlati megvalósításra. (Több változata is létezik.)

¹Egy rendszer Pareto-hatékony, ha a rendszerben nem hajtható végre olyan változtatás, hogy a szereplők közül legalább egy jóléte nő és a többieké nem csökken.

Ebben a munkámban ezen algoritmusokat számítógéppel implementáltam Mathematica nyelven.

2 Vese átültetés jelentősége és problémái

A vese transzplantáció a leghatékonyabb kezelése a komoly vesemegbetegedéseknek, hiszen transzplantáció révén nagymértékben nő a beteg életminősége (egy átültetett vese élettartama akár 30 év is lehet). Emellett az élődonor számára a veseátültetés kockázata alacsony. Az Egyesült államokban több, mint 55000 beteg vár vese transzplantációra, azonban a halottból származó vesékből hiány van évente körülberül 3000-en halanak meg a halott várólistán. Ezért lehet szükség a lentebb ismertetett eljárásokra, melyek révén mind az átültetett vesék száma, mind a kompatibilitás foka nagy mértékben növelhető.

2.0.1 Probléma

Az átültetett vese két forrásból származhat:

1. halottból és
2. élő donorból.

Jelenleg ha az élődonor veséje biológiai okokból nem beültethető, akkor vagy a halott vese várólistára kerül, vagy páros vese csere eljárását alkalmazzák. Azonban ez nem elég hatékony, mivel megfelelő algoritmussal növelhető mind a beültetett vesék száma, mind a kompatibilitás foka.

2.0.2 Kompatibilitási tényezők.

A fő tényező, amely meghatározza egy vese beültethetőségét az a donor és a páciens vércsoportja. Négyféle fő vércsoport létezik: 0,A,B,AB. Az alábbi táblázat a vércsoport és a beültethetőség közötti kapcsolatot mutatja.

| Donor vércsoportja | Kedvezményezett lehetséges vércsoportja |
|--------------------|---|
| 0 | 0,A,B,AB |
| A | A,AB |
| B | B,AB |
| AB | AB |

Ugyancsak jelentős tényező egy páciens számára a saját szervezete és a donor szerv HLA antigén beli különbségei. A donor és a páciens HLA típus beli különbségei csökkentik a beültetett vese élettartamát.

A beültetendő vese vese harmadik fő tulajdonsága a származása. Élő donorból átültetett vese élettartama általában nagyobb, mint a halottból származóé.

Egy páciens a fenti tényezők alapján határozza meg a preferenciáit a vesékről.

3 A vese csere programban alkalmazható algoritmusok

Az algoritmusokat először az eredeti alkalmazásukban mutatjuk be, ezután megadjuk a vese csere programmal való analógiát. Ezután rámutatunk az eljárások előnyeire, esetleges hiányosságaira.

3.1 RSD-SR eljárás, Kollégiumi férőhelyek kiosztása

Az RSD-SR (random serial-dictatorship with squatting rights) algoritmust először kollégiumi szobák kiosztására használták az Egyesült Államokban. Adottak diákok, akik már elfoglaltak egy szobát, amit véletlenszerűen kiosztottak nekik és vannak olyanok, akiknek még nincs szobájuk. Minden lakó dönt, hogy részt vesz-e a szobák újraelszótásában, ha nem vesz részt, akkor a jelenlegi szobáját kapja meg, ezután eljárásban résztvevők között létrehozunk egy véletlenszerű sorrendet. Az első diák megkapja az általa legjobban preferált üres szobát, a második a maradék szobák közül a neki legjobban tetszőt és így tovább.

Az alábbi táblázat az RSD-SR eljárás és a vesecsre program tényezői közti megfeleltetést mutatja:

| RSD-SR eljárásban | Vesecsre programban |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| szobák | vesék |
| szobával rendelkező diákok | élő donorral rendelkező páciensek |
| szobával nem rendelkező diákok | élő donorral nem rendelkező páciensek |

A probléma az, hogy a mechanizmus nem elég hatékony, mert a már szobával rendelkező résztvevőknek nem garantálja, hogy jobban preferált szobát kapnak a sajátjukénál.

3.2 TTC algoritmus, Lakás piac

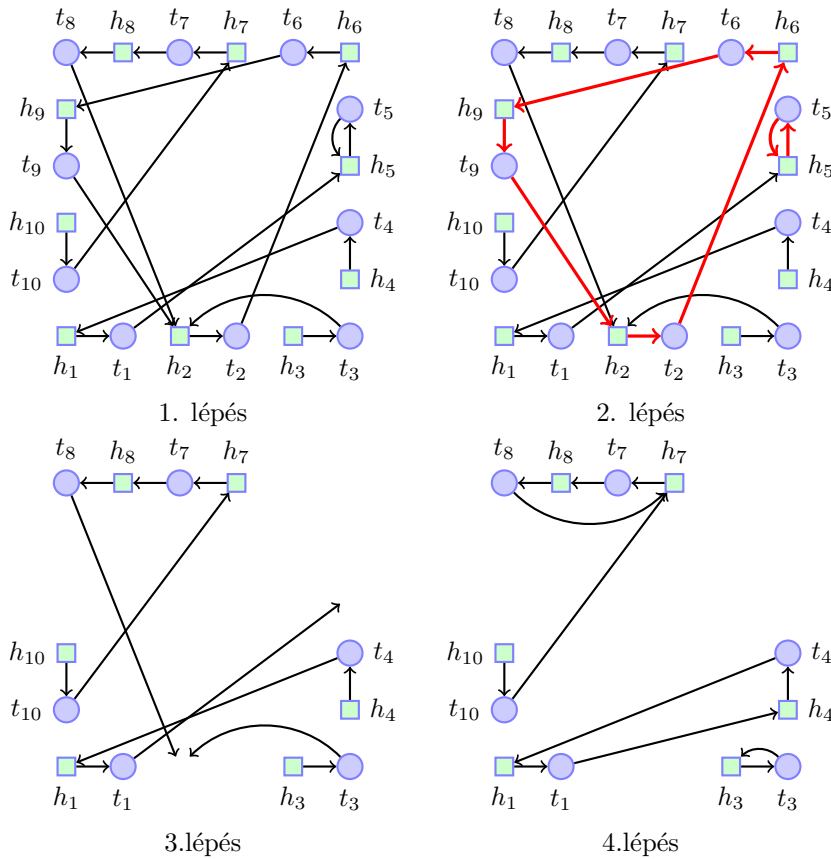
A TTC (top trading circles) algoritmus használata a lakás piacon merült fel, a cél Pareto-hatékonyan elosztani a tulajdonosok közt a házakat, úgy, hogy a piacon nincs pénz. Adottak házak és háztulajdonosok és minden tulajdonosnak van egy szigorú preferencia sorrendje a házakon. Az algoritmus során minden lépésben előállítunk egy irányított gráfot, melynek csúcsai a házak és a tulajdonosok, éleit pedig úgy határozzuk meg, hogy minden házból vezet egy él a tulajdonosa felé és minden tulajdonosból a számára legjobban tetsző ház felé. Ekkor a gráfban, mivel véges, van egy kör ami mentén végrehajthatók a lakások cseréje, ezután újra megkonstruáljuk a gráfot úgy, hogy a szóbanforgó lakások és tulajdonosok nem vesznek részt többé az eljárásban és így folytatjuk tovább, addig amíg minden tulajdonosnak nem lesz háza.

Az alábbi táblázat a TTC algoritmus és a vesecsre program tényezői közti megfeleltetést mutatja:

| TTC eljárásban | Vesecsre programban |
|-------------------|----------------------------------|
| lakástulajdonosok | élődonorral rendelkező páciensek |
| lakások | élő donorok |

Az algoritmus kizárólag az élődonorall rendelkező pácienseket veszi figyelembe. A halott várólista lehetőségét is bevéve az eljárásba a hatékonyság tovább növelhető.

3.2.1 Egy példa a TTC algoritmus menetére



Az 1. lépésben megkonstruálunk egy irányított páros gráfot, melynek egyik csúcsai a tulajdonosok (t_1, t_2, \dots, t_{10}) és a házaik (h_1, h_2, \dots, h_{10}). Minden házból vezet egy él a tulajdonosa felé és minden tulajdonosból az általa legjobban preferált ház felé. 2. lépésben megkeressük a köröket a gráfban: $h_2 \rightarrow t_2 \rightarrow h_6 \rightarrow t_6 \rightarrow h_9 \rightarrow t_9 \rightarrow h_2$ és $h_5 \rightarrow t_5 \rightarrow h_5$. Ezen körök mentén végrehajtható a házak cseréje. Nyilvánvalóan így minden résztvevő legalább olyan jól jár, mintha nem vett volna részt az eljárásban, hiszen ha saját házat preferálja a többivel szemben, az a gráfban egy hurokért jelent és akkor e mentén hajtódik végre a csere. Az algoritmus az előbb meghatározott körök belüli csúcsok nélkül folytatódik tovább (3. lépés). A 4. lépésben azon háztulajdonosok, akik az éppen letörölt körök belüli házakat preferálták a preferenciasorrendjüknek megfelelő következő házra mutatnak.

3.3 YRMH-IGYT eljárás

Az YRMH-IGYT algoritmus (you request my house-I get your turn) algoritmus az RSD-SA eljárás hiányosságainak megoldására találták ki. Néhány diáknak

van (nem biztos, hogy neki tetsző) szobája, néhánynak nincs. Minden diáknak van egy preferenciasorrendet a szobákon. Véletlenszerűen sorbarendezzük a diákokat, majd sorban a diákok rendre rámutatnak a legjobban preferált szobára. Ha a szoba üres, akkor a diák megkapja a szobát és többé sem a diák, sem a szoba nem szerepel az eljárásban, ha foglalt, akkor a szoba lakója a sor elejére kerül és így folytatódik az eljárás. Az eljárás során az alábbi esetekben hajtjuk végre a szobák cseréjét l_1, l_2, \dots, l_n lakók között:

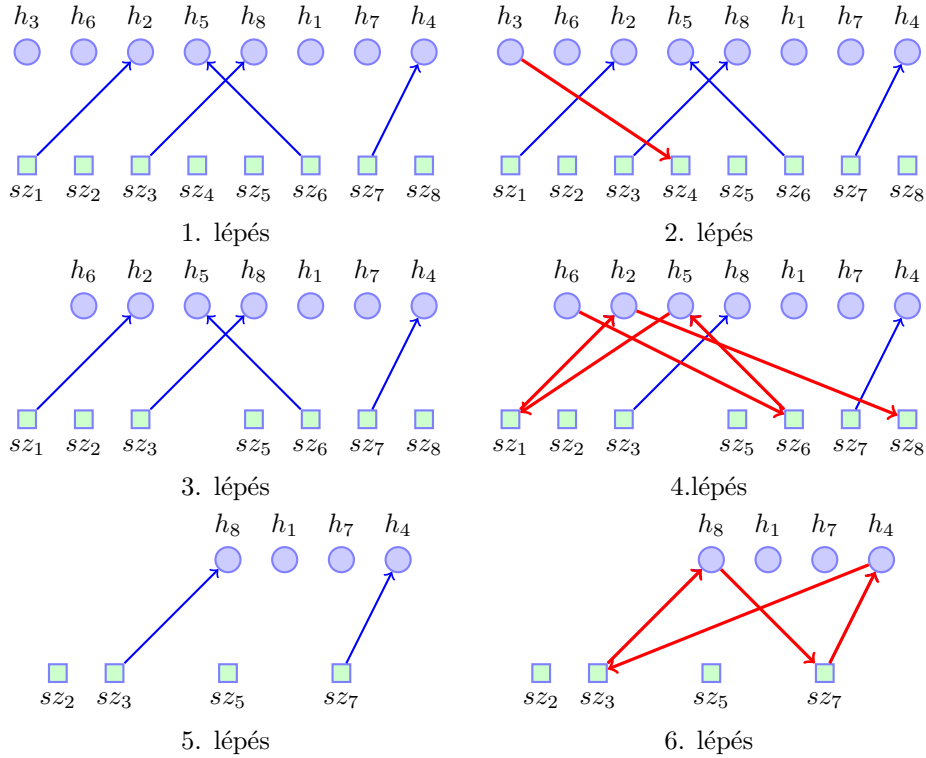
- l_1 l_2 szobáját, l_2 l_3 -ét \dots , l_n l_1 -ét szeretné (kör mentén)
- l_1 l_2 szobáját, l_2 l_3 -ét \dots , l_n egy üres szobát szeretne (út mentén)

Az alábbi táblázat az YRMH-IGYT eljárás és a vesecsre programban tényezői közti megfeleltetést mutatja.

| YRMH-IGYT eljárásban | Vesecsre programban |
|--------------------------------|----------------------------------|
| lakással rendelkező diákok | élődonorral rendelkező páciensek |
| már elfoglalt lakások | élő donorok |
| lakással nem rendelkező diákok | várólistás páciensek |
| el nem foglalt lakások | halottból származó vesék |

Ez az eljárás pareto hatékonyra osztja el a szobákat a hallgatók közt. Viszont az analógia a két probléma közt nem vesz figyelembe egy fontos különbséget, azt hogy az el nem foglalt lakásokkal szemben, a halottból származó vesék minősége, elérhetőségének időpontja nem pontosan meghatározott. Ezért az YRMH-IGYT eljárás módosításra szorul.

3.3.1 Egy példa az YRMH-IGYT eljárásra:



Az 1. lépésben megkonstruáljuk a gráfot, h_1, h_2, \dots, h_8 a hallgatókat jelenti, sz_1, sz_2, \dots, sz_8 pedig a szobákat. Egy hallgató és szoba közt fut él, ha a szobán forgó hallgatónak már megkapta a szobát (kék él) és a hallgatókat véletlenszerűen sorbarendezzük. A 2. lépésben a sorrend szerint első hallgató, h_3 a negyedik szobát szeretné, amit meg is kap, mivel ennek a szobának még nincs tulajdonosa, ezután már sem a hallgató, sem a szoba nem fog részt venni az eljárásban (3. lépés). A 4. lépésben egy út alakult ki, mivel h_6 a hatodik szobát szeretné, aminek már van tulajdonosa (h_5) és most ő kapja meg a jogot, hogy szobát válasszon attól függetlenül, hogy hol szerepel a sorrendben. Mindez addig folytatódott míg valaki egy üres szobára nem mutatott. A szobák kiosztása végrehajtható a $h_6 \rightarrow sz_6 \rightarrow h_5 \rightarrow sz_1 \rightarrow h_2 \rightarrow sz_8$ út mentén. Az 5. lépésben megint letöröljük az újonnan szobát kapott hallgatókat és szobáikat. A 6. lépésben a 4. lépéshez hasonlóan a hallgatók tulajdonossal rendelkező szobákra mutatnak, viszont itt egy kör alakul ki. Ekkor a $h_8 \rightarrow sz_7 \rightarrow h_4 \rightarrow sz_3 \rightarrow h_8$ kör mentén hajthatók végre a szobák cseréi. Az eljárás addig folytatódik, míg minden hallgatónak nincs szobája.

3.4 TTCC eljárás

A TTCC algoritmus (top trading cycles and chains) a TTC továbbfejlesztése a vese csere problémára. Az algoritmus minden lépésben előállítunk egy G irányított gráfot, melynek csúcsai a páciensek (p_1, p_2, \dots, p_n), a donorok (v_1, v_2, \dots, v_n) és a halott várólista lehetősége (w). Ha egy páciens a halott várólistát preferálja, az azt jelenti, hogy a saját donorának veséjéért cserébe ő

kap egy kedvezményezett helyet a várólistán. Minden donortól fut él a kedvezményezettjéhez és minden páciensről az általa legjobban preferált donorhoz, vagy a halott várólistához. Ezután a következő történik:

- ha van irányított kör, akkor a kör mentén végrehajthatók a transzplantációk,
- ha nincs irányított kör, akkor minden p_i pontból indul út w -be. Ekkor ezen utak (w -láncok) valamelyike mentén hajthatók végre a transzplantációk, úgy, hogy az út végén levő páciens donora bekerül a halott várólistára.

Az algoritmus addig fut, míg minden páciensnek nincs donora, vagy egy kedvezményezett helye a halott várólistán.

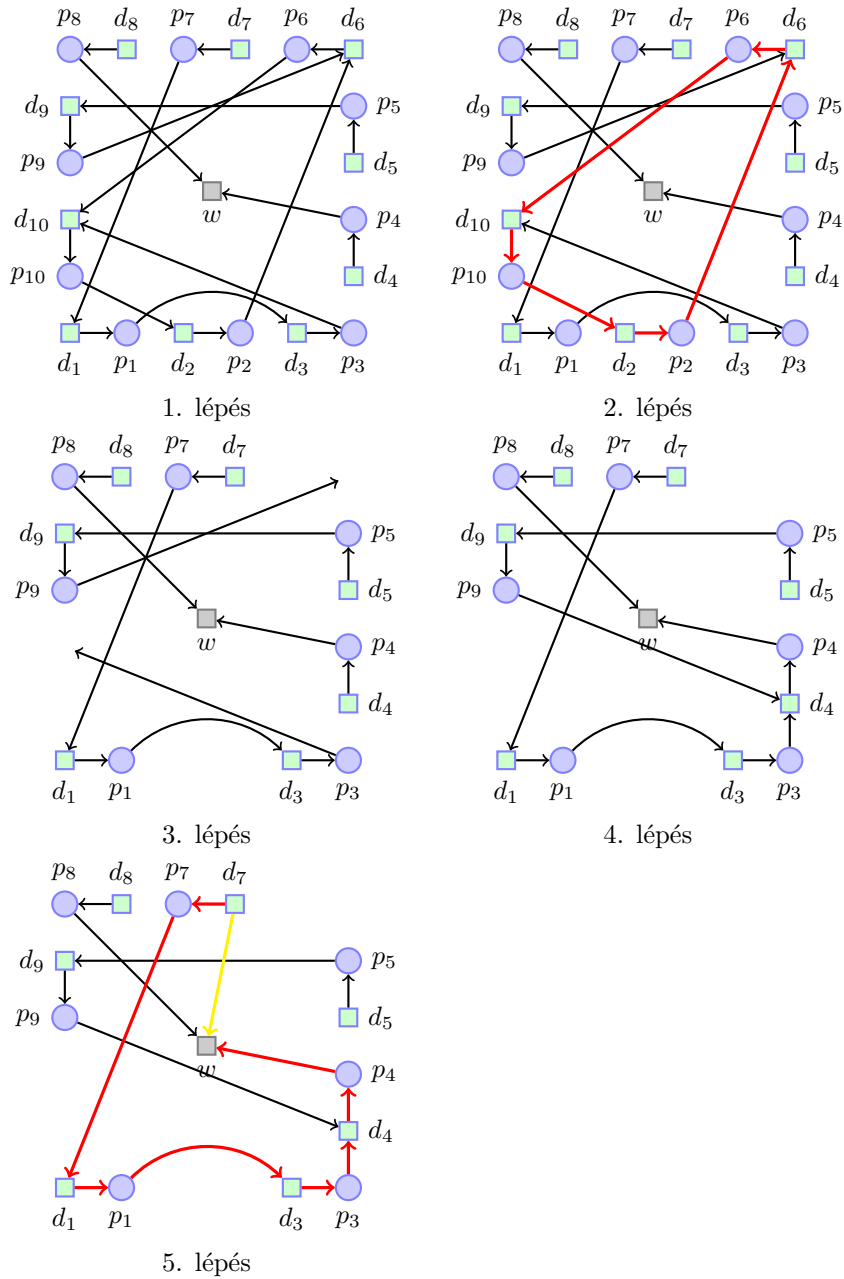
3.4.1 Példák a w -láncok kiválasztásának szabályára

Az algoritmus során a halott várólistába vezető utakat hívjuk w -láncoknak. A w láncok utolsó pácienséhez tartozó donor veséjét megtarthatjuk, ami azt jelenti, hogy az eljárás következő lépésében e donor veséje nem kerül be a halott várólistába, hanem a még vesét nem kapott páciensek mutathatnak rá. Példák w láncok kiválasztásának szabályára:

- Válasszunk minimális w -láncot és távolítsuk el, vagy tartsuk meg.
- Válasszunk a maximális w -láncot és távolítsuk el, vagy tartsuk meg.
- Adjunk meg prioritási sorrendet a donor páciens párok között és válasszuk mindig azt a w -láncot, amely a legmagasabb prioritású párral kezdődik, majd távolítsuk el, vagy tartsuk meg.
- Adott meg proritási sorrend a párokon, (0-ás donorral magasabb), válasszuk a legnagyobb prioritású párral kezdődő w -láncot és tartsuk meg, ha a donor 0-ás, ellenkező esetben távolítsuk el.

A TTCC eljárás miatt a várólistán levő 0-ás vércsoportúak hátrányba kerülhetnek, mivel nekik csak 0-ás vércsoportú donor megfelelő és a TTCC eljárás révén több nem 0-ás szerv kerül a halott váró listára, mint amennyi bekerül oda. A legutóbbi w lánc kiválasztási szabállyal kompenzálható a várólistán levő 0-ás vércsoportúak hátránybakerülése, hiszen azon w -láncokat preferáljuk, ahonnan 0-ás szerv kerül a várólistára.

3.5 Egy példa a TTCC eljárásra



Az első lépésben megkonstruáljuk a G gráfot: minden donortól vezet el a kedvezményezettjéhez és a páciensektől az általuk legjobban preferált donorhoz, vagy a halott várólistához (w). Ekkor kialakult egy kör (2. lépés), $d_2 \rightarrow p_2 \rightarrow d_6 \rightarrow p_6 \rightarrow d_{10} \rightarrow p_{10} \rightarrow d_2$ mentén végrehajthatók a transzplantációk. 3. lépésben kitöröljük a az előbbi csúcsokat, majd (4. lépés) az érintett páciensek preferenciasorrendjüknek megfelelően változtatják a preferált lehetőséget (halott várólista, vagy donor). Ezután egy olyan gráfot kaptunk, amely nem kör, ekkor

a leghosszabb w -be vezető út mentén, $d_7 \rightarrow p_7 \rightarrow d_1 \rightarrow p_1 \rightarrow d_3 \rightarrow p_3 \rightarrow d_4 \rightarrow p_4 \rightarrow w$ mentén hajthatók végre a transzplantációk, azaz a hetes számú donor veséje bekerül a a halott várólistára, p_4 pedig kap egy halottból származó vesét.

3.6 TTCC eljárás taktikázásbiztossága és Pareto hatékonysága

A TTCC eljárás például az alábbi esetekben Pareto-hatékony:

- Legrövidebb w -láncot választjuk és megtartjuk azt.
- Prioritási sorrendet definiálunk a párok felett és mindig a legmagasabb prioritású párral kezdődő w -láncot választjuk.

A TTCC eljárás taktikázásbiztos² például az alábbi esetekben:

- Válasszunk minimális w -láncot és távolítsuk el
- Adott prioritási sorrend a párokon, válasszuk a legnagyobb prioritású párral kezdődő w -láncot és távolítsuk el, vagy tartsuk meg.
- Adott proritási sorrend a párokon, (0-ás donorral magasabb) válasszuk a legnagyobb prioritású párral kezdődő w -láncot és tartsuk meg, ha a donor 0-ás, ellenkező esetben távolítsuk el.

4 További feladatok

Továbbiakban érdemes lenne felhasználni a megírt algoritmusokat egy szimulációhoz, amellyel a következő szempontok szerint lehetne összehasonlítani ezeket az eljárásokat:

1. Pareto-hatékonyság.
2. A vesét kapók aránya az élődonorral rendelkezők között.
3. Az átültetett vesék kompatibilitásának foka.
4. A halott várólistán levők esetén a különböző vércsoporttal rendelkezők várakozási idejének megváltozása.
5. A halott várólistán levő egyes betegek esetleges hátránybakerülése.
6. A halott várólistáról beültetett vesék kompatibilitásának foka.
7. Milyen hatással van a kimenetelre, az ha az algoritmus nem taktikázásbiztos.

Emellett ki lehetne egészíteni az algoritmusokat azzal, hogy egy páciensek nem csak egy donorja lehet, hanem több is, ekkor a kör kereső algoritmust módosítani kell (például szélességi bejárással), hiszen kihasználtuk azt, hogy minden csúcsnak pontosan egy akifoka.

5 Felhasznált irodalom

- Wikipedia
- Alvin E. Rot, Tayfun Sönmez, M. Utku Ünver: KIDNEY EXCHANGE

²Egy rendszert taktikázásbiztosnak nevezünk, ha a rendszer szereplőinek nem áll érdekükben, hogy hazudjanak, vagy eltitkolják a tudomásukban levő információkat.