PROGRAMOZÁSI FELADAT 3

Véletlen partíciók generálása

Vincze Erika

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozatban a véletlen partíciók generálásával foglalkozom. Ehhez $[n] = \{1, 2, \ldots\}$ egyenletes véletlen permutációját használom fel. A véletlen permutációk generálásának egyszerű módja a Kínai étterem folyamat. Főként ennek vizsgálatával foglalkozom.
Másik megközelítést ad a véletlen egész számok prímtényezős felbontása, melynek során egy olyan $c_i^{(n)}$ sorozathoz jutunk, amelyre $C_1^{(n)} p_1 + C_2^{(n)} p_2 + \ldots = n$. Ekkor a kapott $(C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \ldots, C_n^{(n)})$ vektort vizsgálhatjuk.
A témához továbbá szorosan kapcsolódik a kétparaméteres modell, melynek megszorítása a Kínai étterem folyamat. A témakörben szereplő folyamatok határeloszlása különböző paraméterű Poisson-Dirichlet, illetve Griffith-Engen-McCloskey eloszlások.
Bizonyos urnamodellekhez, illetve utódlási folyamatokhoz is hátteret ad az elmélet. A különböző leképezések elméletét Aldous vizsgálta, melynek eredményeképp a $\theta = 1/2$ paraméterű Poisson-Dirichlet eloszlást kapta. Továbbá kapcsolat fedezető fel a Ewens-Sampling formulával, amely $\theta = 1$ paraméterre az egyenletes eloszlású véletlen permutációkat jellemzi.
A ChinesePartition néven megírt program a Kínai étterem folyamatot reprezentálja. Ellenőrzöm rá a kívánt határeloszlástételek teljesülését. Érdemes lehet megfigyelni az eltéréseket a Mathematica beépített RandomPartition parancsával szemben. Szembeötlő, hogy a ChinesePartition lényegesen gyorsabban fut, nagyságrendekkel nagyobb számokra alkalmazható, ami a két parancs működési elvéből egyértelműen következik. A RandomPartition létrehozza az összes lehetséges permutációt, majd ebből választ véletlenszerűen, míg a ChinesePartition az új elemek bevételével folyamatosan generálja a permutációt, így a partíciót is. A vizsgált szempontok (ciklusok száma, leghosszabb ciklus mérete, egy hosszú ciklusok száma) esetében is látszik a különbség a két módszerrel kapott partíciók között. A témakört érintő további megközelítésekhez is írtam megfelelő, őket generáló programot, így vizsgálható a kétparaméteres modell, illetve a prímtényezők által létrejövő ciklusok tulajdonságai is megfigyelhetők.

A kínai étterem reprezentáció

Ez a folyamat egy σ_n véletlen permutációt definiál az $[n] := \{1, ..., n\}$ halmazon úgy, hogy a Π_n véletlen partíciókat σ_n ciklusai generálják. Így a pozitív egész számok legáltalánosabb véletlen partícióihoz jutunk.

A kétparaméteres modell

Ez a bekezdés legfőbbképp a természetes számok véletlen partícióval foglalkozik, melyet valós számok egy (α, θ) párjával paraméterezünk. Ezzel a $GEM(\alpha, \theta)$(Griffith-Engen-McCloskey), illetve sorba rendezett esetben a $PD(\alpha, \theta)$ (Poisson-Dirichlet) eloszlásokhoz jutunk.

Véletlen egészek prímtényezős felbontása

Ha $N(n)$ az $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy véletlen választott eleme, és $N(n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \ldots$ felírásában $p_1 < p_2 < \ldots$ prímtényezők c_i kitevői vizsgálhatók.

2. A kínai étterem reprezentáció

2.1. Konzisztens véletlen permutációk

Tekintsük a $(\sigma_n, n = 1, 2, ...)$ véletlen permutációk egy sorozatát a következőképpen:

1. σ_n egyenletes véletlen permutációja $[n]$-nek, minden n-re.
2. Ha σ_n adott a ciklusokból minden n-re, akkor σ_{n-1}-et kapjuk, ha σ_n ciklusából töröljük az n. elemet.

Például, a sztenderd jelöléseket használva:
ha $\sigma_5 = (134)(25)$ akkor $\sigma_4 = (134)(2)$;
ha $\sigma_5 = (134)(2)(5)$ akkor $\sigma_4 = (134)(2)$.
Könnyen belátható, hogy a fenti eljárással a következő eljárásnak megfelelő eloszlású σ_n sorozathoz jutunk:

Egy kezdetben üres étteremben korlátlan számú kerek asztal áll rendelkezésre, $1; 2; \ldots$ számozással, és minden egyes asztalhoz korlátlan számú ember ülhet. A vendégek is $1; 2; \ldots$ számozásúak, és egyenként foglalnak helyet a következők szerint:

2.2. Egyszerű véletlen ülésrend

Az első ember az első asztalhoz ül. Az $n + 1$.-hez tegyük fel, hogy már n ember helyet foglalt valamelyik asztalnál úgy, hogy minden j-re $(1 \leq j \leq k)$, ahol k az olyan asztalok száma, amelynél az első n ember ül. Az $n + 1$. vendég a következő $n + 1$ hely közül egyenlő valószínűséggel választ: a j. vendég bal oldalára $(1 \leq j \leq n)$, vagy egyedül ül a $k + 1$. asztalhoz.
Legyen $\sigma_n : [n] \to [n]$ a következő: ha az n. vendég érkezése után az i. és a j. vendég egy asztalnál ül, i. a j. bal oldalán, akkor $\sigma_n(i) = j$, és ha az i. vendég egyedül ül egy asztalnál, akkor $\sigma_n(i) = i$.
σ_n ekkor kielégíti az (1) illetve a (2) feltételeket.
Ebből a konstrukcióból az egyenletes véletlen permutációk sok tulajdonsága kiolvasható.
Az n. vendég érkezése után az asztaloknál ülő emberek száma a következőképpen alakul:

$$K_n = \{\sigma_n ciklusai\} = Z_1 + ... + Z_n$$

ahol Z_j az indikátora annak az eseménynek, hogy a j. vendég új asztalhoz ül. A konstrukció miatt a Z_j-k független Bernuolli(1/j) valószínűségi változók, ezért:
$\frac{K_n}{\log n} \to 1$ majdnem biztosan, és $\frac{K_n - \log n}{(\log n)^{1/2}} \xrightarrow{d} B_1$,
ahol B_1 a standard Gauss eloszlás.

Legyen Π_n a σ_n ciklusai által generált véletlen partíciója $[n]$-nek. Ekkor Π_n az $[n]$ felcserélhető véletlen partíciója, és Π_n konzisztens, ahogy n változik. Így a $\Pi_\infty = (\Pi_n)$ sorozat az N egy felcserélhető véletlen partíciója. Legyen X_n annak az eseménynek az indikátora, hogy az $n + 1$. vendég az első asztalhoz ül. Ekkor az $(X_n)_{n \geq 1}$ egy felcserélhető sorozat, ami a Pólya-féle urnamodellnek az eredménye, $a = b = 1$-re. Ezért $S_n = X_1 + ... + X_n$ egyenletes eloszlású a $\{0; 1; ...; n\}$-on. Ugyanígy az $S_n + 1$ méretű ciklusa az 1-et tartalmazó σ_{n+1}-nek egyenletes eloszlású a $\{1; ...; n+1\}$-en. Az aszimptotikus gyakorisága a σ_n 1-et tartalmazó osztályainak, majdnem biztosan korlátos, $S_n = n$-nel, ami természetesen egyenletes eloszlású a $[0; 1]$-en.

2.3. A határeloszlások

Legyen $(N_{n,1}; ...; N_{n,K_n})$ a Π_n blokkjainak mérete, az elemek megjelenése szerinti sorrendben. Az éttermes modell szerint $N_{i,n}$ az $i.$ asztalnál ülök száma, amikor n ember van az étteremben. Az előzőek szerint $N_{n,1}$ egyenletes eloszlású $[n]$-en. Hasonlóan, adott $N_{n,1} = n_1 < n$, esetén $N_{n,2}$ is egyenletes eloszlású $[n-n_1]$-en, és így tovább. Ez a diszkrét egyenletes "stick-breaking" séma, melynek eloszlása, ha $n \to \infty$, a relatív gyakorisága σ_n ciklusainak a méretének $(N_{n,i}/n; i \geq 1)$ tart a folyamatos egyenletes "stick-breaking" folyamathoz eloszlásban.

$$(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots) = (U_1, \bar{U}_1 U_2, \ldots),$$

ahol U_i-k független $U[0, 1]$ változók, és $\bar{U} = 1 - U$. Ekkor a hozzá tartozó EPPF:

$$p_{0,1}(n_1, \ldots, n_k) := \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{k} (n_i - 1)!.$$

2.1. Megjegyzés:. *EPPF (exchangeable partition probability function):*
Az $[n]$ bármely $\{A_1, \ldots, A_k\}$ partíciójára

$$\mathbb{P}(\pi_n = \{A_1, \ldots, A_k\}) = p(|A_1|, \ldots, |A_k|)$$

az n $(n_1, \ldots, n_k)$ kompozíciójának valamely p szimmetrikus függvénye. Ezt a p függvényt nevezzük a π_n EPPF-jének.

2.4. Általánosítás

A kínai étterem folyamat könnyen általánosítható, ha a σ_n permutációk sorozatához tartozó $\pi_\infty := (\pi_n)$ a legáltalánosabb felcserélhető partíciója az egész számoknak. A hozzá tartozó EPPF: $p(n_1, ..., n_k)$ megadja minden $(n_1, ..., n_k)$-ra annak a valószínűségét, hogy π_n az $[n]$-et éppen $(n_1, ..., n_k)$ méretű halmazokra osztja. A kínai éttermes meggondolásból most csak a σ_n ciklusok által generált partíciókkal foglalkozunk. Így $1 \leq i \leq K_n$-re az állítás, miszerint az $n + 1$. látogató az i. asztalhoz ül, azt jelenti, hogy π_{n+1} az $[n + 1]$ olyan partíciója, melynek $[n]$-re való megszorítása π_n, és $n+1$ a π_n i. osztályához tartozik. Hasonlóan, ha az $n + 1$. vendég új asztalhoz ül, akkor nk. Így $1 \leq i \leq K_n$-re az állítás, miszerint az $n + 1$-edik látogató az i. asztalhoz ül, azt jelenti, hogy π_{n+1} az $[n + 1]$ olyan partíciója, melynek $[n]$-re való megszorítása π_n egy $\{n+1\}$ külön blokkal. Adott végtelen EPPF-hez tartozó felcserélhető random partíciója a természetes számoknak konstruálható a következőképpen:

2.5. Véletlen ülésrend egy felcserélhető partícióhoz

Az első vendég az első asztalhoz ül. Ha n-ig adott π_n partíció, az első n ember helyével, k asztallal, akkor az $n + 1$. vendég:

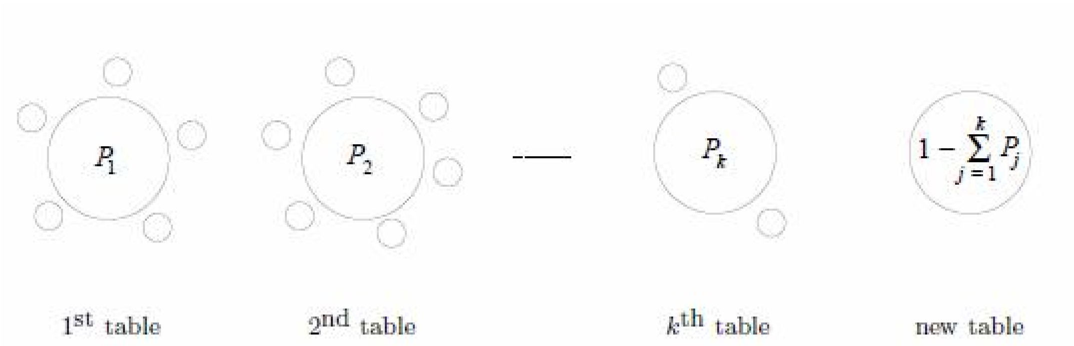
- a j. asztalhoz ül $p(\ldots, n_j + 1, \ldots)/p(n_1, \ldots, n_k)$ valószínűséggel
- új asztalhoz ül $p(n_1, \ldots, n_k, 1)/p(n_1, \ldots, n_k)$ valószínűséggel.

Ez megfelel a feltételeknek. Az ültetési rendek legtöbbje által generált π_∞ nem felcserélhető. Kingman elmélete szerint annak, hogy felcserélhető partíciót kapjunk, szükséges feltétele, hogy minden i-re létezik egy majdnem biztos határeloszlás az i. asztalnál ülők számára. Ennek elérésének a legegyszerűbb módja a következő:

2.6. Véletlen ülésrend egy parciálisan felcserélhető partícióhoz

Legyen $P_i, i = 1, 2, \ldots$ nem negatív véletlen változók tetszőleges sorozata úgy, hogy $\sum_{i=1}^{k} P_i \leq 1$. Adott $P_i, i = 1, 2, \ldots$ sorozathoz az első ember üljön az első asztalhoz, és ha n-ig adott az ülésrend k asztallal, akkor az $n+1$. ember:

- a j. helyre ül P_j valószínűséggel
- új asztalhoz ül $1 - \sum_{i=1}^{k} P_i$ valószínűséggel.



A konstrukció és a nagy számok törvénye miatt így léteznek a határeloszlások, melyek éppen a P_i-kel egyeznek meg. Az adott P_i sorozatra meghatározható annak a valószínűsége, hogy $[n]$ éppen $(n_1, \ldots, n_k)$ méretű blokkokra bomlik. Ez a következő formulával fejezhető ki:

$$p(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i - 1} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \sum_{j=1}^{i} P_j)] \tag{1}$$

2.1. Tétel:. *Legyen (P_i) nem negatív véletlen változók sorozata úgy, hogy $\sum_{i=1}^{k} P_i \leq 1$. $p(n_1, \ldots, n_k)$-t pedig az előző formulával határozzuk meg.*

1. *$\exists$ π_∞ felcserélhető véletlen partíciója a természetes számoknak, melynek blokkjainak sűrűsége megjelenési sorrendben $(\tilde{P}_i)$ eloszlása (P_i) akkor és csak akkor, ha $p(n_1, \ldots, n_k)$ függvény szimmetrikus függvénye $(n_1, \ldots, n_k)$-nek minden k-ra.*
2. *Ha π_∞ ilyen felcserélhető véletlen partíciója a természetes számoknak , akkor a π_∞-hez tartozó EPPF: $p(n_1, \ldots, n_k)$ a 1. képlet alapján adódik $P_i = \tilde{P}_i$-vel.*

2.7. A ciklusok számának együttes eloszlása

Egy permutáció ciklusait megadhatjuk a következőképpen: $c = (c_1, \ldots, c_n) \in Z^+$; ahol c_j a j méretű ciklusok számát jelöli. Ekkor c-t a permutáció típusának nevezzük. A c

szerint adott c_i méretű ciklusokkal rendelkező permutációk számát jelöljük $N(n,c)$-vel! $N(n,c)$ kiszámításásra a Cauchy-formulát használhatjuk:

$$N(n,c) = \mathbf{1}\left\{\sum_{j=1}^{n} jc_j = n\right\} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!},$$

Ha a permutációt egyenletesen és véletlenül választottuk a lehetséges $n!$ számú S_n permutációból, akkor a j hosszú ciklusok $C_j^{(n)}$ számai függnek egymástól. Ekkor az együttes eloszlás szintén a Cauchy formulából következik, és a következőképp adható meg:

$$\mathbb{P}[C^{(n)} = c] = \frac{1}{n!} N(n,c) = \mathbf{1}\left\{\sum_{j=1}^{n} jc_j = n\right\} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!},$$

valamely c pozitív egész számra.

2.2. Tétel:. *A ciklusok számlálója eloszlásban a a természetes számokon értelmezett j^{-1} várható értékű Poisson folyamathoz tart. Vagyis, ha $n \to \infty$,*

$$(C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \ldots) \xrightarrow{d} (Z_1, Z_2, \ldots),$$

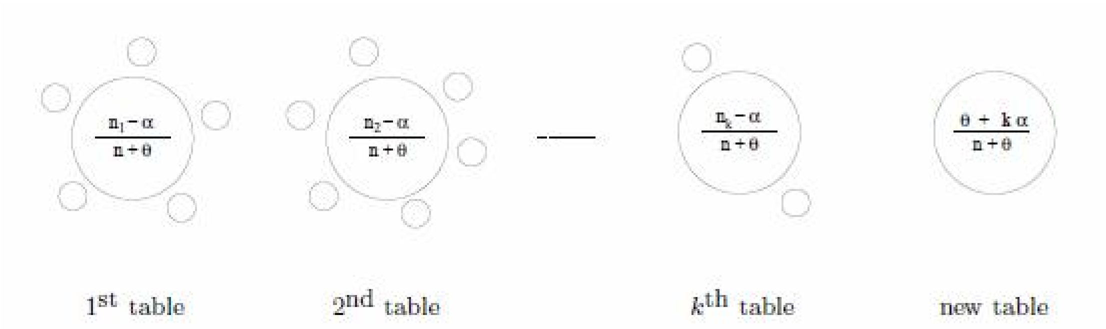
ahol Z_j, $j = 1, 2, \ldots$ független Poisson eloszlású véletlen változók $\frac{1}{j}$ várható értékkel.

3. A kétparaméteres modell

3.1. (α, θ) ültetési rend

Az n. lépésben k elfoglalt asztallal az i. asztalnál ülők száma n_i. A következő vendég

- az i. asztalhoz ül $(n_i - \alpha)/(n + \theta)$ valószínűséggel
- új asztalhoz ül $(\theta + k\alpha - \alpha)/(n + \theta)$.



A valószínűségek tulajdonságainak megfeleltetve α és θ a következők szerint választhatók.

- $\alpha = -\kappa < 0$ és $\theta = m\kappa$ valamely $m = 1, 2, \ldots$ esetén.
- vagy $0 \leq \alpha \leq 1$ és $\theta > -\alpha$.

Ekkor a következő eseteket vizsgáljuk:

$(\alpha = -\kappa < 0)$ és $\theta = m\kappa$ valamely $m = 1, 2, \ldots$ esetén:
Ekkor π_∞ eloszlása $m\kappa$ paraméterű szimmetrikus Dirichlet.

$\alpha = -\kappa$ és $\theta > 0$ esetén:
Ez az előző eset gyenge limesze, ha $\kappa \to 0$ és $m\kappa \to \theta$. A Blackwell-MacQueen urnamodellhez hasonlóan π_∞ eloszlása θ paraméterű Dirichlet folyamatból vett mintáknak felel meg.

$\alpha = 0$ és $\theta = 1$ esetén:
Az előző modellt adja.

$0 < \alpha < 1$ és $\theta > -\alpha$ esetén:
Az α indexű "stable subordinator"-ral rokon esethez vezet.

3.1. Tétel:. *Tegyük fel, hogy a természetes számok egy π_∞ felcserélhető véletlen partíció blokkjainak $\bar{P}_j$ a sűrűsége (az elemek megjelenési sorrendjében) úgy, hogy $0 < \bar{P}_1 < 1$ majnem biztosan, és igaz rá a következők valamelyike:*

1. *π_∞ $[n]$-re való megszorítása π_n $Gibbs_{[n](v_\bullet, w_\bullet)}$ partíció, ami azt jelenti, hogy a hozzá tartozó EPPF szorzat alakú, nem negatív $v_\bullet$ és $w_\bullet$ sorozatok párjaira, vagy*

2. *a $\bar{P}_j$ sűrűségek szorzat alakúak, valamely W_i véletlen változókra.*

Ekkor π_∞ eloszlását vagy a kétparaméteres modell determinálja valamely (α, θ) párra, vagy "coupon collectors partition" valamely $m = 2, 3, \ldots$-ra.

4. Véletlen egész számok és prímtényezős felbontásuk

A véletlen permutációk témája megközelíthető a véletlen egész számok prímtényezős felbontásán keresztül is. Vizsgálhatjuk a hasonlóságot, illetve az eltéréseket a korábbi véletlen permutációkhoz képest.
Minden egést szám egyértelműen felbontható prímek szorzatára. Például $m = 220$ prímfelbontásában a 2 kettő, az 5 egy és a 11 is egy kitevővel szerepel. Ekkor jellemezhetjük m-et egy c típus jelzővel, ahol c egy vektor, amely a (c_p) számokból tevődik össze. A (c_p)-ket pedig az adja meg, hogy a p prímtényező mekkora kitevővel szerepel az adott szám felbontásában. Tehát $c = (c_2, c_3, c_5, \ldots)$, úgy, hogy $m = \prod p^{c_p}$. Esetünkben, az $m = 220$ típusa a következő: $c = (2, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

4.1. Prím faktorok együttes eloszlása

Adott c típusra 1 vagy 0 neki megfelelő egész létezhet az $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból, attól függően, hogy $\prod_{p \leq n} p^{c_p} \leq n$ teljesül-e. Legyen $N = N(n)$ az $[n]$ szából egyenletesen véletlen választott egész szám. Az $N(n)$ prímtényezős felbontásában szereplő p prímek $C_p^{(n)}$ kitevői véletlen változók. Amennyiben $p > n$, $C_p^{(n)} = 0$ adódik. Így

$$N(n) = \prod_{p \leq n} p^{C_p^{(n)}} = \prod_p p^{C_p^{(n)}}$$

egyenletes eloszlású $[n]$-en és $C^{(n)} = (C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, \ldots)$ adott a következő képlettel:

$$\mathbb{P}[C^{(b)} = c] = \frac{1}{n}\mathbf{1}\left\{\sum_p c_p \log p \leq \log n\right\}, c \in Z_+^{\infty}.$$

4.2. Prím faktorok marginális eloszlása

Egy $k \geq 0$ számra az, hogy $C_p^{(n)} \geq k$ azt jelenti, hogy $N(n)$ a p^k többszöröse. Ekkor $N(n) \in [n]$ $\lfloor n/p^k \rfloor$ értéket vehet fel. Tehát

$$\mathbb{P}\left[C_p^{(n)} \geq k\right] = \frac{1}{n}\left\lfloor n/p^k \right\rfloor, \tag{2}$$

amiből pedig

$$\mathbb{P}\left[C_p^{(n)} = k\right] = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor n/p^k \right\rfloor - \left\lfloor n/p^{k+1} \right\rfloor\right). \tag{3}$$

Az együttes eloszlást is jellemezhetjük: jelölje $\pi(b)$ a b-nél kisebb vagy egyenlő prímek számát. Ekkor valamely $c = (c_p, p \leq b) \in Z_+^{\pi(b)}$ esetén

$$\mathbb{P}\left[C_p^{(n)} \geq c_p, p \leq b\right] = \frac{1}{n}\lfloor n/d \rfloor,$$

ahol $d = \prod_{p \leq b} p^{c_p}$.

4.3. Prím faktorok határeloszlása

A 2 képletből egyértelműen következik, hogy bármely p prímre és k pozitív egész számra,

$$\mathbb{P}\left[C_p^{(n)} = k\right] \to \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^k,$$

ha $n \to \infty$, vagyis $C_p^{(n)}$ eloszlásban egy $1/p$ paraméterű geometriai eloszlású Z_p véletlen változóhoz tart. Hasonlóan a 3 képletből $c = (c_p, p \leq b) \in Z_+^{\pi(b)}$, ha $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left[C_p^{(n)} = c_p, p \leq b\right] \to \prod_{p \leq b}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^k,$$

ahol a jobb oldal éppen $\mathbb{P}\left[Z_p = c_p, p \leq b\right]$-nek felel meg, vagyis a geometriai eloszlású Z_p valószínűségi változók függetlenek. Tehát

$$(C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, \ldots) \overrightarrow{d} (Z_2, Z_3, \ldots).$$

5. A kapott programokról

A Mathematica-val készített programokban a következő eredményekre jutottam, illetve az alábbi kérdéseket vizsgáltam:

5.1. A ChinesePartition program

5.1.1. A program

A ChinesePartition nevű program a Kínai étterem folyamat szerint hoz létre véletlen partíciót. Ennek másik része a ChinesePartitionuj, amelyben az érkezők sorrendjét is nyomon követhetjük.

5.1.2. A leghosszabb ciklus mérete

A ChinesePartitionnal kapott legnagyobb ciklus méretét a RandomPartitionnal generált permutációkéval vetem össze. Mivel a Kínai étterem folyamat esetében nagyobb az esélye, hogy az új érkező nagyobb asztalhoz ül, így a nagyobb ciklusok kialakulása valószínűbb, mint ha véletlen választunk az összes permutáció közül. A kapott ábrán ez szépen látszik.

5.1.3. A ciklusok száma

A ciklusok K_n számára teljesül, hogy $\frac{K_n}{\log n} \to 1$, melyet a számítások is alátámasztanak. Ha több permutációt is létrehozunk és ezek átlagát vizsgáljuk, akkor egyértelműbben erre az eredményre jutunk.
A ciklusok számára is a várt adatokat kapjuk a RandomPartitionnal szemben, ugyanis a ChinesePartition esetében kisebb az esély egy új ciklus létrejöttének. Így a ciklusok száma nagyobb, ha a RandomPartitionnal hozzuk létra.
A ciklusok hosszainak összeszámlálására a ciklus nevű program használható.

5.1.4. Adott hosszúságú ciklusok száma

Az 1 hosszú ciklusok száma is jelentős eltérést mutat a RandomPartitionnal szemben, hiszen a a Kínai étterem folyamat esetében a konstrukcióból következik, hogy kisebb valószínűséggel jön létre új ciklus, illetve a meglévő ciklusok nagyobb valószínűséggel nőnek meg.
A végzett számítások továbbá alátámasztják, hogy a j méretű ciklusok arányának a várható értéke $1/j$.

5.2. Véletlen ültetési rend adott valószínűségekhez

Itt létrehoztam egy megfelelő sorozatot, melyek az adott asztalokhoz ülés valószínűségeit adják. Ehhez a korábban említett módszer olyan véletlen ültetési rendet hoz létre, melynek éppen az adott valószínűségek sorozata a határértéke. Erre egy-egy példát generáltam.

5.3. A kétparaméteres modell

5.3.1. A ketparameteres program

A ketparameteres nevű program a paraméterek függvényében létrehozza a partíciókat. Ennek határeloszlása is látható a keletkezett ábrán.

5.4. Számok prímtényezős felbontása

A számok c-vel jelölt típusa kapható az itt megírt programokkal.

5.4.1. Véletlen számok típusa

A randomtipus egy adott számig véletlen választott szám típusát adja meg, a tipus pedig egy általunk választott egészre számol.

5.4.2. Prímek multiplicitása

A multipl program egy általunk választott prím kitevőjét adja meg egy adott számig véletlen kapott szám prímtényezős felbontásában.

5.5. További megjegyzés

Az általam írt ChinesePartition használható akár 10^6 nagyságrendre is, míg a beépített RandomPartition függvény csak ezres nagyságrendig működik. Ez jól látszik, ha megvizsgáljuk a két program futásidejét.

Hivatkozások

[1] Jim Pitman: Combinatorial Stochastic Processes

[2] Richard Arratia, A.D. Barbour, Simon Tavare : Logarithmic Combinatoria Structures: a Probabilistic Approach

[3] S. Tavare, W. J. Ewens: Multivariate Ewens Distribution (41. Fejezet)