MŰEGYETEM 1782

Felrobbanás vizsgálata polinomiális és kvázi-polinomiális közönséges differenciálegyenletekben

Csikja Rudolf
Matematikai Analízis Tanszék

Konzulens:
dr. Tóth János

2006. szeptember 30.

Kivonat

Az alábbiakban ismertebb és kevésbé ismert eljárásokat mutatunk be a felrobbanás jelenségének vizsgálatára – a dinamikai rendszerek egy nagy osztályát alkotó – a polinomiális, illetve kvázi-polinomiális közönséges differenciálegyenletekben. Mivel a bonyolultabb apparátusok, mint a Painlevé-analízis

1. Bevezetés

$$\vdots$$

1.1. Bevezető példa

Az egyik, lehető legegyszerűbb példán keresztül fogjuk bemutatni, hogy a dolgozatban tárgyalt egyenlet típusok megoldásának, hogyan is alakulhat az értelmezési tartománya, amiből fontos gyakorlati következményt fogunk levonni. Legyen a differenciálegyenlet, illetve kezdetiérték-probléma az

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}x^3(t) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^+,$$

ekkor a jobb oldal egy alkalmas értelmezési tartománya $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. A fenti kezdeti érték esetén a megoldás a

$$\left(-\infty, \frac{1}{x_0^2}\right) \ni t \mapsto x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2}{1 - x_0^2 t}}$$

függvény, aminek az értelmezési tartománya nem egyezik meg az egész $\mathbb{R}$ intervallummal, hanem felülről korlátos, mégpedig:

$$t_* := \sup \mathcal{D}_x = \frac{1}{x_0^2}.$$

A fenti eredményt, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a megoldásnak (valós) szingularitása van véges pontban, ami függ a kezdeti feltételtől. Az ilyen fajta szingularitás az angol szakirodalomban **movable singularity** néven ismert, – ami igen beszédes kifejezés, hiszen valóban mozgatható olyan értelemben, hogy a kezdeti érték változásával együtt a szingularitás helye is változik.

Gyakorlatibb megfogalmazásban, azt is mondhatjuk, hogy a megoldás **felrobban** – a jelenség neve az angol szakirodalomban **blow up**. A felrobbanás is teljesen jogos kifejezés, hiszen gondoljunk bele, hogy mi történik akkor, ha ez a megoldás például egy kémiai reakcióban résztvevő anyag koncentrációját írja le. Konkrétan a fenti példában t_* időpontban következik be a felrobbanás, bármilyen $x_0 \in \mathbb{R}^+$ kezdeti értékre.

Az előző példában könnyű dolgunk volt, hiszen egyszerűen meg tudtuk határozni az analitikus megoldást, így ebből rögtön látszott is, hogy milyen feltételek mellett, és pontosan mikor következik be a felrobbanás. Viszont, ha általánosítani szeretnénk a problémát, – nem meglepő módon – nehézségekbe ütközünk. Ráadásul ezzel a témával kapcsolatban a meghatározó cikkek száma igen csekély.

A kérdések, melyeknek megválaszolására a dolgozat további részében próbálkozunk a következők:

◇ Milyen feltételek mellett következik be felrobbanás?

◇ Ha bekövetkezik, akkor milyen időpontban?

Ahhoz, hogy a kérdéseket, akár részben is megválaszolhassuk először is be kell vezetnünk a felrobbanás fogalmát, továbbá a kérdéseinket át kell fogalmaznunk a matematika nyelvére.

1.2. A felrobbanás definíciója

Tekintsük a következő elsőrendű rendszert:

$$\dot{x} = f \circ x,$$

ahol tehát $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ polinom[1], vagy lokális alakban:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_x)\,.$$

Ennek a rendszernek az általános megoldása, – ami ez esetben mindig létezik – n számú állandót tartalmaz, és $t \mapsto x(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ alakú, ahol c_i tetszőleges állandó. Legyen adott az $x(0) := x_0$ kezdeti feltétel, ekkor a megoldás, – az unicitás következtében – felírható $t \mapsto x(t, x_0)$ alakban.

1. Definíció. *A megoldás véges időn belül felrobban (1. ábra), ha létezik olyan $t_* \in \mathbb{R}^+$ és $x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^n$, hogy bármely $M \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy:*

$$t_* - t < \varepsilon \Rightarrow \|x(t; x_0)\| > M,$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma.

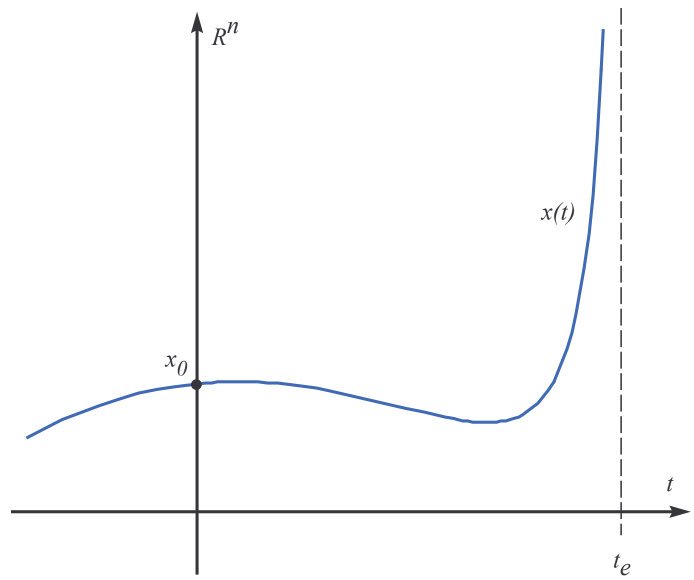
A definíció azt mondja, hogy ha van a kezdeti értékeknek egy olyan X_0 halmaza, melyből a megoldást az $x_0 \in X_0$ kezdeti értékből indítva, azok origótól mért távolsága (tetszőleges normában), a felrobbanás t_* időpontjához (balról) közeledve határtalanul nagy lesz, tehát formálisan így is írhatjuk:

$$\lim_{t \to t_*} \|x(t, x_0)\| = +\infty.$$

A feladat egy konkrét probléma esetében meghatározni, – a rendszer formális megoldásának előállítása nélkül – hogy létezik-e ilyen x_0 kezdeti feltétel, és ha igen, akkor t_* értéke (közelítőleg) mennyi. Általánosságban, pedig az egyenletek egy népesebb csoportjára szeretnénk valamilyen – szükséges, elégséges, illetve szükséges és elégséges – feltételeket adni.

A feladat megoldására az alábbiakban öt lehetséges megközelítést ismertetünk.

[1] A továbbiakban, ahol van értelme ide értjük a kvázi-polinomokat is.



1. ábra. Felrobbanás szemléltetése.

2. Legfeljebb lineárisan növő jobboldal

Jól ismert tény, hogy egy legfeljebb lineárisan növő jobboldalú differenciálegyenlet teljes megoldásának „a lehető legnagyobb” az értelmezési tartománya.

1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ és $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}_f$, továbbá tegyük fel, hogy létezik olyan $k \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ függvény úgy, hogy bármely $(t, p) \in \mathcal{D}_f$ esetén fenn áll, hogy*

$$p^\top f(t,p) \leq k(t)\|p\|^2, \tag{2.1}$$

ekkor az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának értelmezési tartománya a teljes I intervallum.

A tétel bizonyításának alapja a Gronwall-féle integrálegyenlőtlenség, vagyis ha

$$0 < \varphi(t) \leq \Delta + L \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

akkor

$$\varphi(t) \leq \Delta e^{L(t-t_0)}.$$

Ha a tételben szereplő feltétel helyett csupán az

$$|f(t,p)| \leq k|p|,$$

egyenlőtlenséget tesszük fel, akkor nem kell kikötni, hogy f folytonos, mert ebből következik. A tételben viszont ki kell kötni, mert például $f(t,p) :=$ $= \sin(\mathrm{sign}(p))$ nem folytonos, de teljesíti a (2.1) egyenlőtlenséget.

1. Probléma. *Létezik-e olyan nem folytonos f függvény, amelyre (2.1) egyenlőtlenség teljesül és a megoldás fölrobban?*

3. Első integrál

$$\vdots$$

---

4. Elemi becslések, lineáris algebrai módszerek

Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$, illetve $c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R}$, és tekintsük az

$$\dot{x}_i = x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i \quad i = 1, \ldots, n \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

differenciálegyenletet, illetve kezdetiérték-problémát. Az A_i mátrixokról feltehetjük, hogy szimmetrikusak. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A := \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i, \quad b := \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i, \quad c := \sum_{i=1}^{n} \omega_i c_i,$$

ahol ω_i az $\omega \in \mathbb{R}^n$ vektor i-edik komponense. Az egyenletek lineáris kombinációjából a

$$\frac{\mathrm{d}\omega^\top x}{\mathrm{d}t} = x^\top A x + b^\top x + c$$

egyenletet kapjuk, aminek jobb oldalát felírhatjuk a következő formában:

$$\left(\sqrt{A}x + \frac{1}{2}\left(\sqrt{A}\right)^{-1} b\right)^2 - \frac{1}{4} b^\top A^{-1} b + c,$$

ahol $\sqrt{A} := B$ mátrix olyan, melyre $B^2 = A$. Foglalkozzunk most csak az előző kifejezés négyzetes tagjával, és alakítsuk át azt egy kicsit, így:

$$\left[\sqrt{A}\left(x + \frac{1}{2}A^{-1}b\right)\right]^2 = \left(x + \frac{1}{2}A^{-1}b\right)^\top A \left(x + \frac{1}{2}A^{-1}b\right).$$

Az átláthatóság végett legyen

$$y := \left(x + \frac{1}{2}A^{-1}b\right),$$

ekkor a következő becslés tehető:

$$y^\top A y \geq \lambda y^\top y = \frac{\lambda}{\omega^\top \omega}(y^\top y)(\omega^\top \omega) \geq \frac{\lambda}{\omega^\top \omega}\left(\omega^\top y\right)^2,$$

ahol λ az A mátrix legkisebb sajátértéke. Az első becslés a kvadratikus alakra vonatkozik, a második pedig a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből adódik. Végül visszahelyettesítve a következő becslést kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}\omega^\top x}{\mathrm{d}t} \geq \frac{\lambda}{\omega^\top \omega}\left[(\omega^\top x)^2 + \omega^\top A^{-1} b(\omega^\top x) + \left(\frac{1}{2}\omega^\top A^{-1} b\right)^2\right] - \frac{1}{4} b^\top A^{-1} b + c,$$

amely egyenlőtlenség tulajdonképpen skaláris alakú, vagyis felírható

$$\dot{u} \geq k_1 u^2 + k_2 u + k_3 \quad u(t_0) = \omega^\top x_0$$

alakban, ahol

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda}{\omega^\top \omega}, \\ k_2 &= k_1 \omega^\top A^{-1} b, \\ k_3 &= k_1 \left(\frac{1}{2}\omega^\top A^{-1} b\right)^2 - \frac{1}{4} b^\top A^{-1} b + c. \end{aligned}$$

Ezt az egyenlőtlenséget már elemi módszerekkel könnyen lehet vizsgálni, és ebből a vizsgálatból egy tétel adódik az itt tárgyalt típusú egyenletekre, de a tétel kimondása előtt még a rövidség végett vezessünk be egy jelölést:

$$\Delta := \frac{\lambda}{\omega^\top \omega}\left(b^\top A^{-1} b - 4c\right),$$

ami egyébként hasonlít a másodfokú egyenletnél definiált diszkriminánshoz, tehát valamiféle általánosított diszkriminánsnak nevezhetnénk. Valamint megjegyezzük, hogy mivel A_i mátrixok szimmetrikusak, ezért λ valós, továbbá pozitív, ha $A > 0$, azaz pozitív definit. A [3] cikkben szereplő első tétel a következőket mondja ki:

2. Tétel. *Tekintsük a (4.1) egyenlettel adott rendszert. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $\omega \in \mathbb{R}^n$, hogy $A > 0$. Ekkor a (4.1) rendszer megoldásához létezik t_* időpont, az alábbi feltételek mellett:*

I. bármilyen x_0 kezdeti értékre, ha $\Delta < 0$,

II. olyan x_0 kezdeti értékre, amely eleget tesz az

$$\omega^\top x_0 > -\frac{1}{2}\omega^\top A^{-1} b + \frac{\sqrt{\Delta}\,\omega^\top \omega}{2\lambda}$$

feltételnek, ha $\Delta \geq 0$.

Az első esetben

$$t_* \leq \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2\omega^\top \left(x_0 + \frac{1}{2}A^{-1} b\right)\lambda}{\omega^\top \omega}\right)\right).$$

A $\Delta > 0$ esetben továbbá

$$t_* \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left(\frac{\omega^\top \left(x_0 + \frac{1}{2}A^{-1}b\right) 2\lambda + \sqrt{\Delta}\omega^\top \omega}{\omega^\top \left(x_0 + \frac{1}{2}A^{-1}b\right) 2\lambda - \sqrt{\Delta}\omega^\top \omega} \right).$$

Ezen módszer hátránya, – a nyilvánvaló, jobboldal kvadratikus megszorításán túl – hogy a felrobbanás bekövetkeztének időpontjára csak felső becslést ad, ami gyakorlati szempontból nem annyira jó, mint egy alsó becslés. Ezen tétel, illetve módszer egy alkalmazását lásd később, az 5.3.3 szakaszban.

2. Probléma. *Adott A_i mátrixokhoz, mikor létezik, olyan ω vektor, amivel $A = \sum \omega_i A_i > 0$ lesz.*

5. Differenciálegyenletek transzformációja

Ebben a fejezetben, olyan transzformációkról, és ahhoz kapcsolódó problémákról lesz szó, melyek nem csak a következő fejezet jobb megértéséhez adnak alapot, hanem maguk is igen értékesnek bizonyulhatnak egyes konkrét feladat megoldásában, illetve annak egyszerűsítésében.

5.1. Poincaré linearizációs elmélete

Legyen $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ és tekintsük a következő nemlineáris autonóm KDE-t:

$$\dot{x} = f \circ x, \tag{5.1}$$

és legyen ennek egyensúlyi pontja az origó, vagyis $f(0) = 0$. Mivel f differenciálható, ezért (5.1) jobb oldala közelítőleg

$$f'(0)x + O(\|x\|^2). \tag{5.2}$$

Tudjuk, hogy az $f'(0)$ Jacobi mátrix sajátértékei, pontosabban a sajátértékek valós része határozza meg az (5.1) rendszer lokális stabilitását az origó körül. Az ide vonatkozó Ljapunov-tételeket most nem ismertetjük, viszont ismerkedjünk meg a rezonancia fogalmával.

2. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f'(0)$ sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Azt mondjuk, hogy a sajátértékek **rezonáns**ak, ha $\exists m \in \mathbb{N}_0^n$ úgy, hogy $|m| := \sum_k m_k \geq 2$, továbbá:*

$$(m, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k = \lambda_s \quad \textit{valamely} \quad s \in \{1, \ldots, n\}$$

esetén. Az $|m|$ értéket a rezonancia fokának hívjuk.

Célunk, hogy más koordináta-rendszerre áttérve egyszerűbb – szerencsés esetben teljesen lineáris alakra – alakra hozzuk az egyenletet. A rendszert leíró egyenlet jobb oldalán gyűjtsük össze az azonos fokú monómokat, vagyis írjuk fel a rendszert a következő alakban:

$$\dot{x} = \lambda x + \sum_{r=2}^{k} v_r \circ x, \tag{5.3}$$

ahol

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad v_r(x) = \sum_{m \in M_r} a_m x^m,$$

$M_r := \left\{ m \in \mathbb{N}_0^n \middle| |m| = r \right\}$ és $x^m := x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$. Ha a monóm foka r, akkor az M_r halmaznak $C_{\text{ism}}(n,r)$ számú eleme van, vagyis

$$C_{\text{ism}}(n,r) = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

Például, ha $r=2$, akkor $M_2 = \{(2{,}0),(1{,}1),(0{,}2)\}$ és

$$v_2(x) = v_2(x_1,x_2) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2.$$

Most megpróbálunk olyan $(y := x + \dots)$ identitáshoz közeli transzformációt találni, amellyel csökkenthetjük a lineáris tag után álló monómok számát, vagyis amellyel ezt kapjuk:

$$\dot{y} = f'(0)y + V_{r+1} \circ y + \dots$$

Ha ezt sikerül elérnünk, akkor egy következő transzformációval az $r+1$ fokú monómot is megpróbálhatjuk eltüntetni, és így tovább, míg végül, ha ezt minden r esetén el tudjuk végezni az $\dot{y} = f'(0)y$ alakú egyenletet kapjuk. Lássuk sikerül-e ilyen transzformációt találnunk. Induljunk ki az alapegyenletből:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{m \in M_r} a_{mi} x^m + v_{r+1,i} \circ x + \dots \tag{5.4}$$

és próbáljuk meg a következő helyettesítést:

$$y_i := x_i + \sum_{m \in M_r} b_{mi} x^m, \tag{5.5}$$

amiből

$$x_i = y_i - \sum_{m \in M_r} b_{mi} y^m + O\left(|y|^{r+1}\right). \tag{5.6}$$

A későbbiekben szükségünk lesz a következő összefüggésre:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{x}_k}{x_k} m_k x^m = \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k x^m + O\left(|x|^{r+1}\right), \tag{5.7}$$

így az (5.5) egyenlet mind két oldalát deriválva kapjuk, hogy

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + \sum_{m \in M_r} b_{mi}(m,\lambda)x^m + O(|x|^{r+1}),$$

ehhez pedig felhasználva az (5.4) összefüggést a következőt kapjuk:

$$\dot{y}_i = \lambda_i x_i + \sum_{m \in M_r} a_{mi}x^m + \sum_{m \in M_r} b_{mi}(m,\lambda)x^m + O\left(|x|^{r+1}\right).$$

Következő lépésként végezzük el az (5.6) helyettesítést, így

$$\dot{y}_i = \lambda_i \left(y_i - \sum_{m \in M_r} b_{mi}y^m \right) + \sum_{m \in M_r} a_{mi}y^m + \sum_{m \in M_r} b_{mi}(m,\lambda)y^m + O\left(|y|^{r+1}\right),$$

amiből végül azt kapjuk, hogy

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum_{m \in M_r} a_{mi}y^m + \sum_{m \in M_r} b_{mi}y^m\left((m,\lambda) - \lambda_i\right) + O\left(|y|^{r+1}\right).$$

Ha

$$b_{mi} = \frac{a_{mi}}{\lambda_i - (m,\lambda)} \qquad m \in M_r,$$

akkor

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + O\left(|y|^{r+1}\right).$$

Tehát elértük a célunk, hiszen az r fokú monóm eltűnt az egyenlet jobb oldaláról. Természetesen a b_{mi} együttható értéke r fokú rezonancia esetén nincs értelmezve. Azon monómokat, amelyekre az $f'(0)$ mátrix sajátértékei rezonánsak, a Poincaré-transzformációval nem lehet eltüntetni, így ezek új együtthatói – ha a rezonancia foka r – a transzformáció után

$$c_{mi} = a_{mi} + b_{mi}((m,\lambda) - \lambda_i) \qquad m \in M_r.$$

Az

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{m \in M_r} c_{mi}x^m$$

alakú egyenletet **normál formának** hívjuk, ahol

$$c_{mi} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n \neq \lambda_i \\ a_{mi} + b_{mi}((m,\lambda) - \lambda_i) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Példa: Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

ahol $k \in \mathbb{N}, k > 1$ ekkor a rezonancia feltételt megvalósító egyenlet

$$k\lambda_1 + 0\lambda_2 = \lambda_2,$$

amiből a rezonancia foka $r = k$, s így a rendszer normál formája:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= kx_2 + ax_1^k, \end{aligned}$$

ahol $a \in \mathbb{R}$. Bár szorosan nem tartozik ide, de a gondolatmenetet folytatva bevezethetjük az $x_3 := x_1^k$, helyettesítést amiből

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= kx_2 + ax_3 \\ \dot{x}_3 &= x_3, \end{aligned}$$

amely lineáris rendszert az eredeti változókra felírva:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= kx_2(t) + ac_3e^t. \end{aligned}$$

5.2. Kvázimonomiális transzformáció

Az általánosság elvesztése nélkül megtehetjük, hogy egyenletünket az

$$\dot{x}_i = x_i \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{jk}} \right) \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.8}$$

formában írjuk fel, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, illetve $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vektor. Továbbá tegyük fel, hogy a fenti egyenletben minden monóm csak egyszer szerepel, azaz a B mátrixnak nincs két azonos sora. A dinamikai rendszerek – főként fizikai, kémiai és biológiai – igen nagy osztálya felírható a fenti alakban.

Példa: A

$$\sum_{m=1}^{M} \alpha(m,r) X_m \xrightarrow{k_r} \sum_{m=1}^{M} \beta(m,r) X_m \quad r = 1, \ldots, R$$

kémiai reakció tömeghatás kinetikájú indukált kinetikai differenciálegyenlete:

$$\dot{c}_m = \sum_{r=1}^{R} \left(\beta(m,r) - \alpha(m,r)\right) k_r \prod_{p=1}^{M} c_p^{\alpha(p,r)} \quad m = 1, \ldots, M.$$

Végezzünk el egy kis átalakítást, hogy az (5.8) alakú egyenlethez jussunk, tehát:

$$\dot{c}_m = c_m \sum_{r=1}^{R} \left(\beta(m,r) - \alpha(m,r)\right) k_r \prod_{p=1}^{M} c_p^{\alpha(p,r) - \delta_{pm}} \quad m = 1, \ldots, M.$$

Ez az egyenlet (5.8) alakú, ha az ottani paramétereket a következőképpen választjuk meg. Egyértelmű, hogy $n := M$,

$$\lambda_i := \sum_r \left(\beta(i,r) - \alpha(i,r)\right) k_r, \text{ minden olyan } r \text{ esetén, amikor } \prod_{p=1}^{M} c_p^{\alpha(p,r)-\delta_{pi}} \equiv 0,$$

viszont azon r esetén, amikor ez nem teljesül, akkor $(j := r)$

$$A_{ij} := \left(\beta(i,j) - \alpha(i,j)\right) k_j \quad \text{és} \quad B_{jk} := \alpha(k,j) - \delta_{ki}.$$

Most térjünk vissza a transzformációra és végezzük el az

$$x_i = \prod_{j=1}^{n} y_j^{C_{ij}} = y^{C_{i\cdot}},$$

helyettesítést, ahol $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix. A fenti helyettesítés mind két oldalának idő szerinti deriváltját véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \left(C_{11}\frac{\dot{y}_1}{y_1} + C_{12}\frac{\dot{y}_2}{y_2} + \cdots + C_{1n}\frac{\dot{y}_n}{y_n}\right) y^{C_{1\cdot}} \\
\dot{x}_2 &= \left(C_{21}\frac{\dot{y}_1}{y_1} + C_{22}\frac{\dot{y}_2}{y_2} + \cdots + C_{2n}\frac{\dot{y}_n}{y_n}\right) y^{C_{2\cdot}} \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \left(C_{n1}\frac{\dot{y}_1}{y_1} + C_{n2}\frac{\dot{y}_2}{y_2} + \cdots + C_{nn}\frac{\dot{y}_n}{y_n}\right) y^{C_{n\cdot}},
\end{aligned}$$

illetve tömörebb formában:

$$\dot{x}_i = y^{C_{i\cdot}} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\frac{\dot{y}_j}{y_j} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ehhez felhasználva az (5.8) összefüggést, illetve elvégezve a helyettesítést kapjuk, hogy

$$y^{C_{i\cdot}} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\frac{\dot{y}_j}{y_j} = y^{C_{i\cdot}} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{l=1}^{n} y_l^{C_{kl}}\right)^{B_{jk}}\right).$$

Vezessük be az u változót a következő képpen:

$$u_j := \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{l=1}^{n} y_l^{C_{kl}}\right)^{B_{jk}} = \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{n} y_l^{B_{jk}C_{kl}} = \prod_{l=1}^{n}\prod_{k=1}^{n} y_l^{B_{jk}C_{kl}} = \prod_{l=1}^{n} y_l^{\sum_k B_{jk}C_{kl}},$$

vagyis

$$u_j = \prod_{l=1}^{n} y_l^{(BC)_{jl}}.$$

Így végül a helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$C\begin{pmatrix} \dot{y}_1/y_1 \\ \dot{y}_2/y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n/y_n \end{pmatrix} = \lambda + Au,$$

amiből a végeredmény

$$\dot{y} = y \otimes \left(C^{-1}\lambda + C^{-1}Au\right).$$

A fenti egyenletet átírva az (5.8) egyenlethez hasonló formára

$$\dot{y}_i = y_i \left(\lambda'_i + \sum_{j=1}^{m} A'_{ij} \prod_{k=1}^{n} y_k^{B'_{jk}}\right) \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.9}$$

ahol

$$\lambda' = C^{-1}\lambda, \quad A' = C^{-1}A, \quad B' = BC. \tag{5.10}$$

Ezzel a transzformációval az egyenletet a transzformáció előttihez hasonló alakban írhatjuk fel, ám közben azt várjuk, hogy valamilyen módon egyszerűsödik, illetve olyan alakú lesz, ami számunkra valamilyen szempontból előnyösebb. A transzformáció több lehetséges módját mutatja be a [2] cikk. A kvázimonomiális transzformáció az egyenleteket bizonyos feltételek mellett, bizonyos értelemben szétcsatolja, hogy ez mit is jelent pontosan, lássuk!

Tegyük fel, hogy a B mátrix rangja $r < n$, ekkor nyilván létezik $(n-r)$ számú $\varphi_k \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre fennáll, hogy

$$B\varphi_k = 0 \quad k = r+1, \ldots, n,$$

ezért legyen

$$C := \begin{pmatrix} I^{r\times r} & & & \\ & \varphi_{r+1} & \cdots & \varphi_n \\ O^{(n-r)\times r} & & & \end{pmatrix},$$

ahol $I^{r\times r}$ egy $r \times r$ méretű egységmátrix, a $O^{(n-r)\times r}$ pedig nullmátrix. Az így értelmezett C mátrixszal végrehajtott transzformáció után

$$B' = BC = \begin{pmatrix} B^{m\times r} & O^{m\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy az egyenletrendszert szétcsatoltuk két részre úgy, hogy az első r egyenletben csak az első r változó szerepel. A megmaradt $(n-r)$ számú egyenlet pedig az előzőek megoldásával, és azok behelyettesítésével egy függvényegyütthatós lineáris egyenletté alakul. Tehát a rendszerünket sikerült szétcsatolnunk egy r dimenziós nemlineáris, és egy $(n-r)$ dimenziós lineáris rendszerré.

A transzformáció után az A mátrix – a már fentebb írottak szerint – a következőképpen alakul:

$$A' = C^{-1}A.$$

Most vizsgáljuk meg, hogy a B mátrix egyszerűsítéséhez konstruált C mátrix invertálható-e? Írjuk fel most

$$C = \begin{pmatrix} I^{r\times r} & F^{r\times(n-r)} \\ O^{(n-r)\times r} & G^{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

blokkosított alakban. Ekkor a blokkok méretének változatlansága mellett:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} I & -FG^{-1} \\ O & G^{-1} \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk, hogy a C mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a benne lévő G blokk invertálható, vagyis akkor és csak akkor, ha $\det(G) \neq 0$. Összegzésül írjuk fel, hogyan egyszerűsödött, illetve bomlott szét az (5.8) egyenlet a kvázi monomiális transzformáció végrehajtásával. Tehát a nemlineáris és a lineáris rész:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_i\left(\lambda'_i + \sum_{j=1}^{m} A'_{ij}\prod_{k=1}^{r} y_k^{B'_{jk}}\right) \quad i = 1,\ldots,r, \\ \dot{y}_i &= y_i\left(\lambda'_i + \sum_{j=1}^{m} A'_{ij}\prod_{k=1}^{r} y_k^{B'_{jk}}\right) \quad i = r+1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Megjegyzés: a kvázi-monomiális transzformáció hasonló, mint a lineáris rendszereknél alkalmazott szokásos transzformációk, amik különféle módon egyszerűsítik az eredetileg felírt egyenletet, illetve olyan alakra hozzák a benne szereplő paramétereket, amiből fontos gyakorlati következtetések vonhatók le (pl. megfigyelhetőség, irányíthatóság). Ahogy a lineáris esetben is vannak a transzformációra invariáns paraméterek, így a kvázi monomiális transzformációnál is megfigyelhetünk ilyeneket, mégpedig az (5.10) összefüggésből a $B\lambda$, illetve BA paraméterek ilyenek.

5.3. Lotka–Volterra-féle univerzális alak

Továbbiakban LV-alak. Az ilyen alakú egyenleteknek van a legalacsonyabb fokú nemlinearitása (kvadratikus).

5.3.1. Transzformáció LV-alakra

A kvázimonomiális transzformáció egy speciális esete, amikor $m = n$. Ekkor ugyanis ha az (5.10) helyettesítésben a $C = B^{-1}$, – ami persze csakis akkor lehetséges, ha $\det(B) \neq 0$ – így

$$\lambda' = B\lambda \quad A' = BA \quad B' = I.$$

Az ilyen értékekkel rendelkező (5.9) alakú egyenletet nevezzük Lotka–Volterra alakúnak. Ebből már látszik, hogy a nemlinearitás a transzformáció után legfeljebb kvadratikus lehet.

PÉLDA:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2^3 x_3 && = x_1\left(1 - x_2^3 x_3\right)\\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^2 - 3x_2^4 x_3 && = x_2\left(-1 + x_2 - 3x_2^3 x_3\right)\\
\dot{x}_3 &= 2x_3 + 5x_1 x_2^3 x_3 + x_2 x_3 && = x_3\left(2 + 5x_1 x_2^3 x_3 + x_2\right).
\end{aligned}$$

Ebből könnyen kiolvasható, hogy

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

A transzformáció elvégeztével az egyenletek LV-alakját kapjuk, ami tehát:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_1\left(-1 - 9y_1 + 4y_2 + 5y_3\right)\\
\dot{y}_2 &= y_2\left(-1 - 3y_1 + y_2\right)\\
\dot{y}_3 &= y_3\left(-10y_1 + 4y_2 + 5y_3\right).
\end{aligned}$$

5.3.2. Alkalmazás: az (5.8) egyenlet Taylor-sor alakú megoldása

Amint azt majd alább látni fogjuk a Taylor-sor együtthatóinak meghatározása igen nehéz és időigényes lehet, így általában inkább a Runga–Kutta módszer az alkalmazott metódus. Viszont a Taylor-sor egy nagy előnye az utóbbival szemben, hogy két paraméteren keresztül – a lépésköz és a „csonkítás" fokszámának megválasztásával – képesek vagyunk kontrollálni a pontosságot. Amint azt az [1] cikkben olvashatjuk, egy adott pontosság eléréséhez létezik olyan (h, p) optimális pár, amelyre a számítási idő minimális. Viszont mi nem erre helyezzük a hangsúlyt, hanem a megoldás előállítására. Tekintsük tehát az (5.8) egyenletet és végezzük el az

$$x_i(t) = y_i(t)e^{\lambda_i t}$$

helyettesítést, ekkor

$$\dot{y}_i(t)e^{\lambda_i t} + \lambda_i y_i(t)e^{\lambda_i t} = \lambda_i y_i(t)e^{\lambda_i t} + y_i(t)e^{\lambda_i t}\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\prod_{k=1}^{n}\left(y_k(t)e^{\lambda_k t}\right)^{B_{jk}},$$

amiből:

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t)\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\prod_{k=1}^{n} y_k^{B_{jk}}(t)e^{\gamma_j t} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.11}$$

ahol

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}\lambda_k.$$

Most vezessünk be egy új független változót:

$$y_{n+1}(t) := e^t.$$

Ekkor könnyű belátni, hogy az (5.11) egyenlet felírható az:

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{j=1}^{m+1} \widetilde{A}_{ij} \prod_{k=1}^{n+1} y_k^{\widetilde{B}_{jk}},$$

formában, ahol

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A_{n\times m} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} & & & \gamma_1 \\ & B_{m\times n} & & \vdots \\ & & & \gamma_m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Végezzük el a

$$z_i := \prod_{j=1}^{n+1} y_j^{\widetilde{B}_{ij}}$$

helyettesítést, így a következő alakra jutunk:

$$\dot{z}_i = z_i \sum_{j=1}^{m+1} (\widetilde{B}\widetilde{A})_{ij} z_j.$$

Most normáljuk le a $t \mapsto z_i(t)$ függvényeket a nullában felvett értékükkel, vagyis legyen

$$u_i(t) := \frac{z_i(t)}{z_i(0)},$$

ekkor

$$\dot{u}_i = u_i \sum_{j=1}^{m+1} M_{ij} u_j,$$

ahol

$$M_{ij} = (\widetilde{B}\widetilde{A})_{ij} z_j(0).$$

Állítsuk elő az u_i függvényt Taylor-sor alakjában, vagyis

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ik},$$

ahol

$$c_{ik} = \left. \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} u_i(t) \right|_{t=0}.$$

Határozzuk most meg a c_{ik} együtthatókat. A fentebb elvégzett normalizálás miatt az $u_i(0){=}1$ bármely $i{=}1,\dots,m{+}1$ esetén. Teljes indukcióval belátható, hogy:

$$
\begin{aligned}
c_{i0} &= u_i(0)=1,\\
c_{i1} &= \dot u_i(0)=u_i(0)\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1}u_{j_1}(0)=\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1},\\
c_{i2} &= \ddot u_i(0)=\dot u_i(0)\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2}u_{j_2}(0)+u_i(0)\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2}\dot u_{j_2}(0)=\\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1}\right)\left(\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2}\right)+\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2}\left(\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{j_2j_1}\right)=\\
&= \sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1}\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2}+\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1}\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{j_1j_2}=\\
&= \sum_{j_1}^{m+1}\sum_{j_2}^{m+1} M_{ij_1}(M_{ij_2}+M_{j_1j_2}),\\
&\vdots\\
c_{ik} &= \sum_{j_1}^{m+1}\cdots\sum_{j_k}^{m+1} M_{ij_1}(M_{ij_2}+M_{j_1j_2})(M_{ij_3}+M_{j_1j_3}+M_{j_2j_3})+\cdots+\\
&+ (M_{ij_k}+M_{j_1j_k}+M_{j_2j_k}+\cdots+M_{j_{k-1}j_k}).
\end{aligned}
$$

5.3.3. Alkalmazás: LV-alak, mint hiányos kvadratikus egyenlet

Tegyük fel, hogy az egyenletünk már LV-alakú, ekkor így is írhatjuk:

$$\dot x_i = x_i\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j + x_i\beta_i \quad i=1,\dots,n$$

ebből könnyen leolvasható, hogy a (4.1) egyenletben szereplő paramétereket, hogyan kell megválasztanunk, hogy alkalmazhassuk az ott bemutatott módszert. Tehát:

$$A_i := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i(i-1)} & 2\alpha_{ii} & \alpha_{i(i+1)} & \cdots & \alpha_{i(n-1)} & \alpha_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i(i+1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i(n-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{in} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_i^\top := (0,\dots,0,\beta_i,0,\dots,0)\,, \quad c_i := 0.$$

Most végezzük el az ω-val való beszorzást, ekkor:

$$a_{ij}=\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_j)(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})=(\omega_i+\omega_j)\alpha_{ij}, \quad b^\top=(\omega_1\beta_1,\omega_2\beta_2,\dots,\omega_n\beta_n)\,, \quad c=0.$$

Így már alkalmazható a 4. fejezetben tárgyalt módszer, azzal az egyszerűsítéssel, hogy a $c = 0$.

6. Painlevé-analízis

Ebben a fejezetben a felrobbanás egzisztenciájának és lokalizálásának kérdését, a megoldás időbeli szingularitásának, illetve az eredeti rendszer egy transzformáltjának fix pontjainak vizsgálatára vezetjük vissza. Ezért rövid áttekintést adunk a fix pont körüli lokális analízisről, melynek analógiájára fogjuk bevezetni az időbeli szingularitások analízisét, azaz a Painlevé analízist. Az analógia egyszerű, ahogy a megoldások a fix ponthoz közelednek, úgy lokálisan különbözőképpen viselkedhetnek, amit a lokális analízis segítségével tudunk vizsgálni. Ennek megfelelően a megoldások az időbeli szingularitások közelében is különbözőképpen viselkedhetnek, amihez pedig a Painlevé analízis ad megfelelő apparátust.

6.1. Fix pont körüli lokális analízis

Igen régről és jól ismert, jól kidolgozott elmélet, a közönséges differenciálegyenletek elméletében a fix pont körüli lokális analízis. Erről adunk most egy rövid áttekintést, részletes tárgyalása a [4] könyvben található. Tekintsük az

$$\dot{x} = f \circ x$$

differenciálegyenletet, ahol $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Az egyenlet fix pontjának[2] azokat a pontokat hívjuk, melyekre $x_i \in \mathbb{R}^n$, $f(x_i) = 0$ teljesül. A továbbiakban elég,

[2] Szokásos elnevezések még az egyensúlyi, vagy stacionárius pont.

ha az origót tekintjük fix pontnak, hiszen az $y := x - x_k$ transzformációval, az $x_k \in \mathbb{R}^n$ fix pont az origóba tolható el, azaz

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y + x_k) = f \circ (y + x_k) = f \circ x.$$

Az egyenlet jobb oldalát felbonthatjuk két – egy lineáris, és egy nemlineáris – részre, vagyis

$$f = f_{\mathrm{lin}} + f_{\mathrm{nlin}} = f'(0)x + O\left(\|x\|^2\right),$$

melyből a lineáris részt megtartva, az egyensúlyi pont valamely környezetében jó közelítéssel helyettesíthetjük az eredeti egyenletünket, vagyis az

$$\dot{x} = f'(0)x$$

lineáris egyenlet megoldása az origó valamely környezetében jó közelítéssel írja le az eredeti egyenlet megoldását. Az $f'(0)$ spektrumát vizsgálva következtethetünk az origó stabilitására, illetve a megoldás viselkedésére az origóhoz közeledve. Legyen

$$\sigma\left(f'(0)\right) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}, \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n,$$

ahol a $\leq$ rendezési reláció a komplex számok körében, azok valós részein értelmezett szokásos reláció. A megoldás felírható az origó körül, lokálisan a következő alakban:

$$x(t) = P\left(C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, C_n e^{\lambda_n t}\right), \tag{6.1}$$

ahol P egy hatványsor, melynek argumentumában t-beli polinomiális együtthatók szerepelnek, és $C_1, C_2, \ldots, C_n$ állandók. Írjuk fel az origó körüli $W_u(0)$ instabil sokaságot, amit úgy kaphatunk meg, hogy a (6.1) sorban $C_i := 0$, minden olyan i esetén, amelyre $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) \leq 0$, $i = 1, \ldots, k \leq n$, ekkor tehát

$$\begin{aligned} x_u(t) &= P_u\left(C_k e^{\lambda_k t}, \ldots, C_n e^{\lambda_n t}\right) = \\ &= \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(t)\left(C^u\right)^i e^{(\lambda^u, i)t}, \quad (\lambda^u, i) = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j i_j, \end{aligned}$$

ahol $i \in \mathbb{R}^k$, továbbá az indexekben lévő u az angol unstable szó rövidítése, így az instabil sokasághoz tartozó megfelelő értékeket jelzi.

6.2. Szinguláris hely körüli lokális analízis

Az előző alfejezetben tárgyalt lokális analízis analógiájára bevezetjük a szinguláris hely körüli analízist. Tekintsük ismét a következő differenciálegyenletet:

$$\dot{x} = f \circ x,$$

ahol $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Bontsuk fel a jobb oldalt

$$f = g + h$$

részekre úgy, hogy az $x(t) := \alpha(t - t_*)^p$ helyettesítéssel, ahol az $\alpha(t - t_*)^p$ vektor i-edik komponense $\alpha_i(t - t_*)^{p_i}$, teljesüljön a g függvényre, hogy

$$\dot{x} = g \circ x, \quad \text{vagyis} \quad p\alpha\tau^{p-1} = g(\alpha\tau^p),$$

ahol $\tau := t - t_*$ és $\alpha, p \in \mathbb{C}^n$, $|\alpha| \neq 0$, és természetesen itt a vektorok közötti szorzás komponensenként értendő. Továbbá, h legyen olyan, hogy

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{h(\tau^p)}{\tau^{p-1}} = 0.$$

Vezessük be a továbbiakban fontos szerepet játszó **Kovalevszkaja exponenseket** meghatározó mátrixot, ami a következőképpen definiálható:

$$K = g'(\alpha) - \operatorname{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

6.3. Painlevé tulajdonság és teszt

Egy t_* szingularitáshoz megfelel egy (α, p) pár, ekkor lokálisan létezik a megoldást leíró sor, a következő formában

$$x(t) = \tau^p P\left(C_1\tau^{\rho_1}, C_2\tau^{\rho_2}, \ldots, C_{n+1}\tau^{\rho_{n+1}}\right), \tag{6.2}$$

ahol P egy olyan hatványsor, melynek argumentumában $\log(\tau)$-beli polinomiális együtthatók állnak, illetve a ρ_i kitevők a megfelelő (α, p) párhoz tartozó Kovalevszkaja exponensek $i = 1, \ldots n$, kiegészítve a $\rho_{n+1} := q$ értékkel, ami a h nem domináns részre jellemző érték, (amit a 6.4. fejezetben értelmezünk). Egy rendszer, akkor rendelkezik Painlevé tulajdonsággal, ha az általános megoldása egyértékű, azaz a szingularitásai körül Laurent-sorba fejthető.

Ha az előző alfejezetben tárgyalt instabil sokasághoz hasonlóan a (6.2) sorban csak a pozitív valós részű kitevőket vesszük, vagyis minden olyan $C_i := 0$, melyre $\operatorname{Re}(\rho_i) \leq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_u(t) &= \tau^p P_u\left(C_k\tau^{\rho_k}, \ldots, C_{n+1}\tau^{\rho_{n+1}}\right) = \\ &= \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(\log(\tau))\left(C^u\right)^i \tau^{(\rho^u, i)}\right), \quad (\rho^u, i) = \sum_{j=k}^{n+1} \rho_j i_j, \end{aligned} \tag{6.3}$$

ahol $i \in \mathbb{R}^k$ és az indexben szereplő u szintén azt jelenti, mint ezelőtt.

A Painlevé teszt egy olyan eljárás, amely szükséges feltételt ad a Painlevé tulajdonság meglétére, ami a további vizsgálatokban jelentős tulajdonság lesz. Három lehetséges eset áll fenn:

◇ Painlevé teszt: minden i esetén c_i konstans függvény, valamint $p_j \in \mathbb{Z}$ és $\rho_j \in \mathbb{N}$, $j = k, \dots, n+1$, ekkor a (6.3) sor **Laurent-sor**.

◇ Gyenge Painlevé teszt: minden i esetén c_i konstans függvény, valamint $p_i, \rho_i \in \mathbb{Q}$, $j = k, \dots, n+1$, ekkor a (6.3) sor **Puiseux-sor**.

◇ **Pszi-sor**: a (6.3) sor akkor Pszi-sor, ha a c_i függvény $\log(\tau)$-beli polinom, továbbá $p_i, \rho_i \in \mathbb{C}$, ekkor a rendszer nem rendelkezik Painlevé tulajdonsággal.

6.4. Transzformált rendszer

Most bevezetünk egy olyan transzformációt, amellyel az eredeti egyenletet egy új egyenletté transzformálva, annak fix pontjai lesznek az eredeti egyenlet szinguláris helyei, vagyis ezáltal a transzformáció által fogjuk visszavezetni a szinguláris hely körüli vizsgálatot, fix pont körüli analízisre. Tehát, tekintsük a

$$T\colon (x(t), t) \to (X(s), s)$$

transzformációt, ahol $s := \log(t - t_*) = \log(\tau)$, amit a következő formális helyettesítéssel hajtunk végre:

$$\begin{aligned} x(t) &:= \alpha \tau^p X(\log(\tau)) \\ \tau &:= e^s, \end{aligned}$$

ekkor a transzformált rendszer az

$$X' = F \circ X \begin{cases} X_i' = F_i \circ (X_1, \dots, X_{n+1}), & i = 1, \dots, n \\ X_{n+1}' = q X_{n+1}, & \text{mivel } X_{n+1}(s) := e^{qs}. \end{cases}$$

Az X_{n+1} bevezetése nem minden esetben szükséges. Lássunk két egyszerű példát, hogyan is működik ez a transzformáció. Először tekintsük az

$$\dot{x} = x^2$$

egyenletet. Ebben az esetben $g := x^2$, illetve $h := 0$, amiből $p = -1, \alpha = -1$ így az $x(t) := -\tau^{-1} X(\log(\tau))$ transzformációt alkalmazva

$$\dot{x}(t) = \tau^{-2} X(\log(\tau)) - \tau^{-2} \dot{X}(\log(\tau)) = \tau^{-2} X^2(\log(\tau)),$$

amiből a transzformált egyenlet:

$$X' = X\,(1 - X)\,.$$

A második példa legyen az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + 3x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 x_2 - x_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. A jobb oldal két részre bontásával, így

$$g := \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 9x_2 \end{pmatrix}.$$

Amiből az (α, p) párra a

$$\begin{aligned} p_1 - 1 &= 2p_1 \\ p_2 - 1 &= p_1 + p_2 \\ p_1\alpha_1 &= \alpha_1^2 \\ p_2\alpha_2 &= 2\alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

egyenletek írhatóak fel, amiből az egyik lehetséges megoldás:

$$\alpha = (-1,1), \quad p = (-1,-2).$$

Továbbá nézzük meg, hogy a h függvényre is teljesül-e a megfelelő feltétel:

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{h(\tau^p)}{\tau^{p-1}} = \lim_{\tau\to 0} \begin{pmatrix} \dfrac{h(\tau^{p_1})}{\tau^{p_1-1}} \\ \\ \dfrac{h(\tau^{p_2})}{\tau^{p_2-1}} \end{pmatrix} = \lim_{\tau\to 0} \begin{pmatrix} 3\tau \\ 9\tau \end{pmatrix} = 0,$$

vagyis a h valóban nem domináns rész, legalább is az (α, p) pár által meghatározott szingularitás megfelelő környezetében. Most hajtsuk végre az

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= -\tau^{-1}X_1(\log(\tau)) \\ x_2(t) &:= \tau^{-2}X_2(\log(\tau)), \end{aligned}$$

ebből

$$\begin{aligned} X_1' &= X_1 - X_1^2 + 3X_3X_1 \\ X_2' &= 2X_2 + 2X_1X_2 - X_3^2X_1 \\ X_3' &= X_3. \end{aligned}$$

6.5. Painlevé teszt és az instabil sokaság

Most, hogy megkonstruáltuk a transzformált rendszert, ezen elvégezhetjük a lokális fix pont körüli vizsgálatot. A transzformált rendszernek legalább két (triviális) fix pontja van, mégpedig $X_0 = 0$ és $X_* = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0)$. Az első fix ponthoz tartozó

$$\sigma\left(F'(X_0)\right) = \{-p_1, -p_2, \ldots, -p_n, q\}$$

sajátértékek megadják a p vektor komponenseinek ellentettjének és a q értékét, amik egyszerűen az (α, p) pár által meghatározott szinguláris megoldás exponensei, illetve a (szingularitás valamely környezetében) nem domináns tagot jellemző q. A másik, azaz az X_* fix ponthoz tartozó

$$\sigma\left(F'(X_*)\right) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, q\}$$

sajátértékek, – amik már sokkal érdekesebbek – megadják az eredeti egyenlet Kovalevszkaja exponenseit, illetve ezt kiegészítve a nem domináns részt jellemző q állandót. Írjuk fel a transzformált egyenlet X_* fix pontjához tartozó $W_u(X_*)$ instabil sokaságot, tehát

$$\begin{aligned} X_u(s) &= P_u\left(C_k e^{s\rho_k}, \dots, C_n e^{s\rho_{n+1}}\right) = \\ &= X_* + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(s) e^{(\rho^u, i)s}, \quad \mathrm{Re}\,(\rho_i) > 0,\ i \in \{k, \dots, n+1\}. \end{aligned}$$

Térjünk át az eredeti változókra:

$$x_u(t) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(\log(\tau))\tau^{(p^u, i)}\right). \tag{6.4}$$

Ez a lokális sora a transzformált rendszer X_* fix pont körüli instabil sokaságának, ami az eredeti rendszer (α, p) párja által meghatározott megoldásának Pszi-sora. A (6.4) sor annyi tetszőleges állandót tartalmaz, amennyi pozitív Kovalevszkaja exponens van az X_* fix ponthoz tartozó sajátértékek között, plusz még egyet, ami a t_* szingularitás helyének feleltethető meg, a kezdeti értéktől függően. Ha a rendszernek $n-1$ pozitív Kovalevszkaja exponense van, akkor a (6.4) sor az eredeti egyenlet formális, általános megoldását adja, természetesen csak megfelelő konvergencia tartományon.

A Painlevé tulajdonsággal rendelkező rendszereket integrálható rendszereknek nevezzük, amely másképpen azt jelenti, hogy a rendszer megoldásának időbeli szingularitásai körül, az Laurent-sorba fejthető. A Painlevé teszt, mely szükséges feltételt ad ennek a tulajdonság meglétére, az alábbiakban foglalható össze:

1. Állítás. *Ha az $\dot{x} = f(x)$ rendszer rendelkezik Painlevé tulajdonsággal, akkor ennek a rendszernek az összes transzformáltjára teljesül, hogy*

- ◇ *Az X_* és X_0 fix pontokhoz tartozó sajátérték egész.*
- ◇ *Az X_* ponthoz tartozó Jacobi mátrix SEMI-SIMPLE*
- ◇ *A transzformált rednszer formálisan linearizálható az X_* fix pont körül.*

Most foglaljuk össze, hogy milyen lépéseket is kell elvégeznünk egy rendszeren, hogy meg tudjuk rendelkezik-e a Painlevé tulajdonsággal (szükséges feltételek):

I. Először is keressük meg az összes lehetséges (α, p) párt, majd ellenőrizzük, hogy $p \in \mathbb{Z}^n$ teljesül-e, minden párra.

II. Végezzük el a $T\colon (x(t), t) \to (X(s), s)$ transzformációt.

III. Végül a transzformált rendszernél ellenőrizzük, hogy minden nem nulla fix pontja körül formálisan linearizálható-e, azaz a lokális normál formája lineáris-e.

6.6. A Pszi-sor konvergenciája

Tehát tekintsük ismét az

$$\dot{x} = f(x)$$

rendszert, ahol $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, tegyük fel, hogy az (α, p) pár hiperbolikus vagyis, az ehhez a párhoz tartozó Kovalevszkaja exponensekre fennáll, hogy $\mathrm{Re}\,(\rho_i) \neq 0$, bármely $i = 1, \ldots, n$ esetén. Továbbá tekintsük a

$$\Psi(\tau) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(\log(\tau))\tau^{(\rho^u, i)} \right)$$

Pszi-sort. Ha a transzformált rendszer instabil sokaságának sorba fejtését tekintjük, vagyis a

$$X_u(s) = X_* + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(s)e^{(\rho^u, i)s},$$

összefüggést, akkor a Pszi-sor konvergenciájának kérdését egy exponenciális hatványsor konvergenciájára vezettük vissza, amikor $s \to -\infty$.

3. Tétel. *Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ rendszert, és az ehhez tartozó (α, p) hiperbolikus párt, továbbá legyen a t_* szingularitás körüli lokális $\Psi(t, C^u)$ Pszi-sor, C^u tetszőleges állandókkal. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, és $\alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $0 < \alpha <$ $< \mathrm{Re}\,(\rho_i)$, minden $i = k, \ldots, n+1$ esetén, továbbá $\delta > 0$, hogy $|a| < \delta$, $|t - t_*| < \varepsilon$ és $M \in \mathbb{R}$, hogy*

$$|\Psi(t, a)| < M|a|\tau^\alpha.$$

6.7. A felrobbanás vizsgálata

A dolgozat bevezető szakaszában már ismertettük a felrobbanás fogalmát, azonban még egy apróságot – noha triviális – nem árt megemlítenünk. Mégpedig a felrobbanás bekövetkezhet előre tartó időben és hátra-felé haladó időben is, bár az utóbbinak nem sok gyakorlati jelentősége van, ezért a továbbiakban előre haladó (azaz pozitív) időben vizsgálódunk, de zárójelben a negatív időre vonatkozó állítást is közöljük.

A következő tétel előtti eszmefuttatás nem túl hosszú, és nehéz hiszen minket általában a valós idejű események érdekelnek, így jó okunk van feltételezni, hogy $t_* \in \mathbb{R}$ szingularitáshoz $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméterek tartoznak, tehát

4. Tétel. *Tekintsük ismét az $\dot{x} = f(x)$ rednszert, és tegyük fel, hogy a rendszerhez tartozik (α, p) pár $(k-1)$ pozitív Kovalevszkaja exponenssel (úgy, hogy a $\rho_{n+1} = q$ értéket nem vesszük ezek közé) és legyen $\beta = \alpha(-1)^p$. Ekkor, ha $\beta \in \mathbb{R}^n$ $(\alpha \in \mathbb{R}^n)$ létezik a kezdeti értékeknek egy k dimenziós S_0^k sokasága, amely előre (hátra) haladó időben felrobbanáshoz vezet.*

Abban a speciális esetben, amikor a rendszernek az (α, p) párhoz $(n-1)$ pozitív Kovalevszkaja exponense van, akkor létezik a kezdeti értékek egy nyílt halmaza melyből a megoldást indítva véges idejű felrobbanás következik be. Ha vannak olyan Kovalevszkaja exponensek, melyek valós része nulla, akkor ez azt jelenti, hogy a transzformált rendszer fix pontja nem hiperbolikus, tehát a vizsgálathoz nem elég csupán a lineáris analízis. Azonban megvizsgálható a felrobbanás bekövetkezése a rendszer egy részén, mégpedig tegyük fel, hogy van l nulla és $(k-1)$ pozitív valós részű sajátérték, ekkor létezik $m \geq k + l$ dimenziójú S_0^m sokaság, melyből a megoldást indítva, felrobbanás következik be. Sőt a kezdeti értékeknek azon halmazának helyét is meg tudjuk határozni, amelyből a megoldást indítva felrobbanás következik be. A helyét itt úgy értve, hogy melyik ortáns, melyet az alábbiakban $\mathcal{O}$ jellel fogunk jelölni.

5. Tétel. *Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ rendszert, és legyen S_0^k az a sokaság melyből indítva a megoldást felrobbanás következik be, továbbá legyen $\mathcal{O}_{\mathrm{sign}(\beta)}$ $(\mathcal{O}_{\mathrm{sign}(\alpha)})$ az az ortánsa a térnek melyet a β (α) vektor komponenseinek előjele határoz meg. Ekkor az az ortáns, ahonnan a megoldást indítva előre (hátra) haladó időben felrobbanás következik be az, amelyre $\mathcal{O}_{\mathrm{sign}(\beta)} \cap S_0^k \neq \emptyset$, illetve $\mathcal{O}_{\mathrm{sign}(\alpha)} \cap S_0^k \neq \emptyset$.*

7. Ljapunov-függvény

$$\vdots$$

A. Függelék

A dolgozatban előforduló számítási példákat, általában saját kezűleg írt *Mathematica* program segítségével dolgoztam ki. Az alábbiakban ezen programok kódja áll.

Kvázi-monomiális transzformáció

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`

B = {{2, 2, 0, 2}, {1, 3, 1, 2}, {1, 2, 1, 3}};
A = {{1, 2, 5}, {1, 4, -1}, {0, 0, -3}, {2, -1, 0}};
\[Lambda] = {1, 2, 1, -1};

{m = Dimensions[B][[1]],
 n = Dimensions[B][[2]],
 r = MatrixRank[B]};

If[
 MatrixRank[B] == n, Cm = IdentityMatrix[r], Cm = AppendRows[
  AppendColumns[
   IdentityMatrix[MatrixRank[B]], Table[0, {i, 1, n - r}, {j, 1, r}]
  ], Transpose[NullSpace[B]]
 ]
]

At = Inverse[Cm].A;
Bt = B.Cm;
\[Lambda]t = Inverse[Cm].\[Lambda];
```

Hivatkozások

[1] L. Brenig – M. Codutti – A. Figueiredo: Numerical integration of dynamical systems using taylor expansion. In *Posters of ISSAC'96 (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)* (konferenciaanyag). 1996.

[2] L. Brenig – A. Goriely: Universal canonical forms for time-continuous dynamical systems. 40. évf. (1989. Oct) 7. sz., *Phys. Rev. A*, 4119–4122. p. 3 p.

[3] W. M. Getz – D. H. Jacobson: Sufficiency conditions for finite escape times in systems of quadratic differential equations. 19. évf. (1997), *J. Inst. Maths. Applics*, 377–383. p.

[4] Tóth János – Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek*. Budapest, 2005, Typotex.