Mátrixmultiplikátorok robusztussági problémák vizsgálatában

GyÉ – TT

1. Előzmények

- B. Açikmeşe, M. Corless: Systems & Control Letters 57 (2008) 78-94

$$
(1)\qquad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bp, \\ q &= Cx + Dp, \\ (q, p) &\in \Omega. \end{aligned}\right\}
$$

itt $x(t) \in \mathbb{R}^n$

$p(t) \in \mathbb{R}^{l_p}$ – összes bizonytalan és nemlin. elem

$\Omega \subset \mathbb{R}^{l_q} \times \mathbb{R}^{l_p}$ – adott halmaz

D1| Az (1) rsz. kvadratikusan stabilis $\alpha > 0$ csökkenési rátával és $P = P^T > 0$ Ljapunov mátrixszal, ha

$$
(2)\qquad \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} PA + A^TP + 2\alpha P & PB \\ B^TP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \leqq 0
$$

$\forall (x, p)$-re, amire

$$
(3)\qquad (Cx + Dp, p) \in \Omega.
$$

M| (2) erősen implicit a (3) miatt!

Cél| Egy további (megválasztandó) mátrix segítségével szétválasztani a problémában

- egy mátrix-egyenlőtlenség
- és bizonytalanság/nemlinearitás

vizsgálatát.

Ezután: mátrixmultiplikátor bevezetése

D2| Egy szim. M mátrixot az Ω-ra vonatkozóan multiplikátor mátrixnak nevezünk, ha

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \geqq 0 \qquad \forall (q,p) \in \Omega$$

D3| Az Ω-ra vonatkozó multiplikátor mátrixok egy $\mathcal{M}$ halmazát elegendően gazdagnak nevezzük, ha $\forall \bar{M}$ multiplikátor mátrixhoz $\exists M \in \mathcal{M}$, hogy $M \leqq \bar{M}$.

T| Tfh (1) Σ-nél C teljes sor-rangú;
$\mathcal{M}$ multiplikátor halmaz elegendően gazdag.
Ekkor 2 állítás ekvivalens:
1.) Az (1) Σ kvadratikusan stabilis $(\bar{\alpha}, P)$ jellemzőkkel.
A–C
2.) $\forall \alpha \in (0, \bar{\alpha})$-hoz $\exists M \in \mathcal{M}$, hogy

$$\begin{pmatrix} PA + A^T P + 2\alpha P & PB \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \leqq 0 . \qquad (4)$$

M.| Szigorú egyenlőtlenségek mellett érvényes az ekvivalencia, ha Ω-ra telj.:
$\exists \gamma$:

$$\|p\| \leqq \gamma \|z\| \quad , \quad \forall (z + Dp, p) \in \Omega\text{-ra}$$

Újdonság: nem a mátrixmultiplikátor, hanem – az "általános" Ω korlátozó halmaz
– "elegendően gazdag" $\mathcal{M}$.

Korábban:

- Scherer eredményei 90'-évek 2. fele – 2000' eleje:

"Abstract full-block S-procedure"
(Automatica 37 (2001) 361–375.):

$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ – altér

$U \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{p\times p}$,

$\Delta \in \mathbf{\Delta}$

kompakt, vonalasan összefüggő

$\mathcal{S}(\Delta) \subset \mathbb{R}^q$ – altér, "folyt." függ Δ-tól

$\mathcal{B}(\Delta) := \{x \in \mathcal{B} \mid Vx \in \mathcal{S}(\Delta)\}$.

(a.) $U^T Q U < 0$ a $\mathcal{B}(\Delta)$-n $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$-ra

$\Updownarrow$

(b.) $\exists M = M^T$ multiplikátor, ami

$M > 0$ az $\mathcal{S}(\Delta)$-n $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$

amelyre

$U^T Q U + V^T M V < 0$ a $\mathcal{B}$-n.

Előny: közvetlenül alkalmazható mind folyt. mind diszkrét idejű rendszerekre garantált költségű irányítási, játék (így H_∞) problémákra

De: a korlátozó halmaz: $\mathcal{S}(\Delta)$ – alterek
$\mathbf{\Delta}$ – kompakt

Kérdés: 1.) "Absztrakt" multiplikátor módszer "általános" korlátozó halmazzal?
2.) Milyen korlátozó halmazt érdemes megengedni?
3.) Nem korlátos paraméterezés?

2. Absztrakt multiplikátor módszer

$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ – altér

$V \in \mathbb{R}^{\ell \times N}$ – teljes sor-rangú

$U \in \mathbb{R}^{d' \times N'}$

$\Psi(\alpha) \in \mathbb{R}^{d' \times d'}$ – szim., α paraméter

Θ – zárt paraméter halmaz

$$\mathcal{Q}: \theta \in \Theta \longrightarrow \mathcal{Q}(\theta) \subset \mathbb{R}^{\ell}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{Q}(\theta)} = \{ y \in \mathcal{B} : Vy \in \mathcal{Q}(\theta) \}.$$

2.1 Nem szigorú egyenlőtlenség

Vizsgálandó:

(5) $$y^T U^T \Psi(\alpha) U y \leq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{B}_{\mathcal{Q}(\theta)},\ \forall \theta \in \Theta.$$

M| A–C feladatok vizsgálatához

$\mathcal{B} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\ell p}$ $\quad (N = n + \ell p)$

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix}; \quad \Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha P & P \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{Q}(\theta) \equiv \Omega$ szerepotlással

M| • (5) telj. $\Longleftrightarrow$ (5) telj. $\forall y \in \operatorname{cone} \mathcal{B}_{\mathcal{Q}(\theta)}$-ra

• $$\operatorname{cone} \mathcal{B}_{\mathcal{Q}(\theta)} = \mathcal{B}_{\operatorname{cone} \mathcal{Q}(\theta)}$$

• $q^T M q \geq 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}(\theta) \Longleftrightarrow$

– " – $\quad \forall q \in \operatorname{cone} \mathcal{Q}(\theta)$.

$\Longrightarrow$ F1| $\mathcal{Q}(\theta)$ – origó csúcspontú kúp $\forall \theta \in \Theta$-ra.

T1 Tfh • $U^T \Psi(\alpha) U$ szig. mon. növ. α-ben a $\ker V \cap \mathcal{B}$-n;

• $\Theta(\theta)$ teljesíti az F1 feltételt;

• $\mathcal{M}$ multiplikátor halmaz elegendően gazdag.

Ekkor 2 állítás ekvivalens:

1.) (5) teljesül $\forall y \in \mathcal{B}_{\Theta(\theta)}$, $\forall \theta \in \Theta(\theta)$.

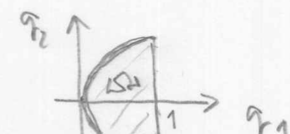
2.) $\forall \alpha' \in (0, \alpha)$ $\exists M(\alpha') \in \mathcal{M}$:

(6) $$y^T \left(U^T \Psi(\alpha') U + V^T M(\alpha') V \right) y \leqq 0, \quad \forall y \in \mathcal{B}\text{-re}$$

2.2 Szigorú egyenlőtlenséggel

Példa. Legyen $U = V = I_2$

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$



és $\Theta(\theta) \equiv \Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} : \ 0 \leq q_1 \leqq 1, \ |q_2| \leqq \sqrt{q_1} \right\}$$

$\Rightarrow$ $x^T \Psi x < 0$, ha $\forall x \in \Omega$, $x \neq 0$

((5) szig. egy-tlenséggel telj.)

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$ multiplikátor Ω-ra

$\Rightarrow$ $m_1 \geqq 0$ és $m_3 \geqq 0$

(6) szig. egy-tlenséggel:

$$\begin{pmatrix} -1+m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} < 0 \quad \Rightarrow \quad m_3 < 0$$

ellentmondás

Ok: $\underbrace{\overline{\operatorname{cone} \Omega}}_{\mathcal{B}_\Omega} \supset \mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix} : q_2 \in \mathbb{R} \right\}$ és itt $\Psi(\alpha)$ nem neg!

"Ésszerű" feltételek $\Theta(\cdot)$-re a szigorú egyenlőtlenséghez

Legyen $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ max. dimenziójú altér, amire

$$U^T \Psi(\alpha) U \geqq 0 .$$

(Ha $\mathcal{B}_0 = \{0\}$, akkor $y^T U^T \Psi(\alpha) U y < 0$, $\forall y \in \mathcal{B}$, $y \neq 0$-ra $\Rightarrow$ $M = 0$ mellett (6) szig. egyenlőtlenséggel telj.)

$\underline{\text{Á}'1}$ Ha $\dim \mathcal{B}_0 \geqq 1$ és $\exists\, \theta_0 \in \Theta$, hogy

$$V\mathcal{B}_0 \cap \overline{\operatorname{cone} \Theta(\theta_0)} \neq \{0\}$$

semmilyen multiplikátorra sem telj. (6) szigorú egyenlőtlenséggel $\forall\, 0 \neq y \in \mathcal{B}$-re.

$\underline{\text{Á}'2}$ Tetsz. $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ halmazra

$$\overline{\operatorname{cone} \mathcal{B}_\Omega} = \mathcal{B}_{\overline{\operatorname{cone} \Omega}}$$

$\Rightarrow$

$\underline{F2}$ $\forall\, \theta \in \Theta$-ra $\Theta(\theta)$ – zárt origó középpontú kúp és

$$V\mathcal{B}_0 \cap \Theta(\theta) = \{0\} .$$

$\underline{F3}$ A Θ paraméter halmaz szekvenciálisan kompakt és a $\Theta(\cdot)$ halmazértékű leképezés gráfja zárt.

T2 Tfh F2 és F3 teljesül
Ekkor 2 állítás ekvivalens:

1.)

(7) $$y^T U^T \Psi(\alpha) U y < 0 \qquad \forall y \in \mathcal{B}_{\Theta(\theta)},\ y \neq 0$$
$$\forall \theta \in \Theta \text{ -ra.}$$

2.) $\exists\, M(\alpha)$ multiplikátor, hogy

$$q^T M(\alpha) q > 0 \qquad \forall q \in \Theta(\theta),\ q \neq 0,\ \forall \theta \in \Theta$$

és

(8) $$y^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + V^T M(\alpha) V \right) y < 0 \qquad \forall y \in \mathcal{B},\ y \neq 0.$$

A Θ paraméter halmaz kompaktságáról:

Á3 Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ zárt origó középpontú kúp.
Tfh • $\dim \mathcal{B}_0 \geq 1$;
• $M(\alpha)$ multiplikátor Ω-ra, amelyre (8) telj.
Ekkor $\exists\, \gamma > 0$ konst.,
$\exists\, \tilde{\Theta}(.)$ zárt gráfú halmazértékű leképezés
$$\tilde{\Theta} : \vartheta \in [0, \gamma] \to \tilde{\Theta}(\vartheta) \subset \mathbb{R}^l$$

úgy, hogy
• $M(\alpha)$ multiplikátor $\tilde{\Theta}(\vartheta)$-ra $\forall \vartheta \in [0,\gamma]$
• $\Omega = \bigcup_{\vartheta \in [0,\gamma]} \tilde{\Theta}(\vartheta)$.

$\Rightarrow$ Ha szigorú egyenlőtlenségek ekvivalenciáját vizsgáljuk, akkor a "bizonytalanságok" kompakt paraméterezése nem kell szigorú követelmény.

3. Nem kompakt paraméterezésű Ω

Tek (1) rh-t és tfh $\Omega \subset \mathbb{R}^{lq} \times \mathbb{R}^{lp}$ olyan, hogy

$$p = \Theta q \,, \quad \text{ahol} \quad \Theta \in \underset{\uparrow}{\text{cone}\{\Theta_1, \dots, \Theta_s\}}$$

$\boxed{\text{nem korlátos paraméter halmaz}}$

Szigorú egyenlőtlenségek között nem tudunk ekvivalenciát bizonyítani.

Kérdés: (1) Bár (8) nem teljesül, fennállhat-e a (7)?

Igen! Pl:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,\ C = (0, -1) ,\ D = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\Theta \end{pmatrix} x \quad , \ \Theta \geq 0$$

Vál $P = I$, pl $\alpha = \frac{1}{2}$ biztosan telj.

$\Rightarrow$ (8) valóban csak elégséges feltételt jelent

(2) Mennyire "gazdag" azon (1) típusú rendszerek köre, amelyre (7) teljesül, de (8) nem?

Legyen

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad C = \mathbb{R}^{1\times n}, \quad D = 0, \quad \Theta \text{ skalár}$$

$$\dot{x} = (A + \Theta B \cdot C)x$$

$? \; P = P^T > 0 \; ? :$

$$A^T P + PA + \Theta \left[C^T B^T P + PBC \right] < 0$$

Ha $\Theta \in \mathbb{R}$ megengedett, akkor ez nem teljesíthető csak $PBC = 0 \Rightarrow BC = 0$ $\Rightarrow$ nincs bizonytalanság/nemli a rendszerben

Ha $\Theta \geqq 0$, akkor

$$C^T B^T P + PBC = Q \leqq 0 \quad \text{kell legyen!}$$

Megmutatható, hogy ilyen P csak akkor létezhet, ha

(*) $\qquad CB < 0$

és

$$\frac{B^T P C^T}{B^T P B} = \frac{CC^T}{B^T C^T}$$

(ld. pl. fenti példát)

(és $\quad A^T P + PA < 0$!)

Vegyük

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ a_0 & \cdots & & & a_{n-1} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (c_0, \dots, c_{n-1})$$

$\Rightarrow c_{n-1} < 0 \quad$ (*) miatt

$A+\Theta BC$ kar. pol-ja:

$$\lambda^n - (a_{n-1}+\Theta c_{n-1})\lambda^{n-1} - \ldots - (a_1+\Theta c_1)\lambda - (a_0+\Theta c_0)$$

Routh-Hurwitz kritérium-ból a szüks. felt:

$$a_i + \Theta c_i < 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{c_i \leqq 0}$

$\Rightarrow$ A kérdéses halmaz nem túl gazdag, lényegében csak olyan bizonytalanság/nemlinearitás megengedett, ami "javít" a stabilitáson.