Absztrakt multiplikátor módszer: alkalmazások, bizonyítások

Jelölések:

$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ – altér

$V \in \mathbb{R}^{l \times N}$ – teljes sor-rangú

$U \in \mathbb{R}^{j \times N}$

$\Psi(\alpha) \in \mathbb{R}^{j \times j}$ – szim., α paraméter

Θ – zárt paraméter halmaz

$$\mathcal{Q}: \theta \in \Theta \longmapsto \mathcal{Q}(\theta) \subset \mathbb{R}^l$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{Q}(\theta)} = \{ y \in \mathcal{B} : Vy \in \mathcal{Q}(\theta) \}$$

Vizsgálandó:

(1) $$\boxed{y^T U^T \Psi(\alpha) U y < 0 \qquad \forall y \in \mathcal{B}_{\mathcal{Q}(\theta)}, y \neq 0, \forall \theta \in \Theta}$$

$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ max. dim. altér, amire

$$U^T \Psi U \geqq 0.$$

1. Alkalmazás: (folyt. idejű rsz.)

$$\dot{x} = Ax + Bp \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p(t) \in \mathbb{R}^{l_p}, \quad q(t) \in \mathbb{R}^{l_q}$$

$$q = Cx + Dp \qquad (q, p) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{l_p} \times \mathbb{R}^{l_q}$$

Kvadr. stab. (α, P)-vel:

(KS) $$x^T P (Ax + Bp) < -\alpha x^T P x$$

$$\forall (q, p) \in \Omega\text{-ra.}$$

Legyen

$N = n + l_p$, $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{l_p}$; $P = P^T > 0$, $l = l_q + l_p$

$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & I \end{pmatrix}$; $\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha P & P \\ P & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_0 = \{ y : y = \binom{x}{p} ,\ x = 0 \}$; $\Theta(\theta) \equiv \Omega \subset \mathbb{R}^{l_q} \times \mathbb{R}^{l_p}$

$\mathcal{B}_0 \cap \overline{\mathrm{cone}\, \Theta(\theta)} = \{0\}$

Ekkor (KS) $\Longleftrightarrow$ (1).

2. Alkalmazás: (diszkrét-idejű rendszer)

(2) $$\begin{cases} x^+ = A_0 x + B_0 u + E_0 w + H_0 p \\ q = A_q x + B_q u + G p \\ p = \Delta(t) q \qquad\qquad \Delta(t)^T \Delta(t) \leqq I_{l_q} \end{cases}$$

$$J(x_0, \underline{u}, \underline{w}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k - w_k^T S w_k \right]$$

(Q, R, S - szim. poz. def.)

Ha $I - G^T G > 0$ ($\Longleftrightarrow I - G G^T > 0$), akkor
$(I - \Delta G)$ inv-ható $\forall\, \Delta^T \Delta \leqq I$ - re
(2) úgy átírható

(3) $$x^+ = (A_0 + \delta A) x + (B_0 + \delta B) u + E_0 w$$

alakba, ahol

$$\delta A = H_0 (I - \Delta G)^{-1} \Delta A_q$$
$$\delta B = H_0 (I - \Delta G)^{-1} \Delta B_q$$

D Legyen $P = P^T > 0$, $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$,
$V(x) = x^T P x$.

$u = Kx$ <u>garantált költségű minimax stratégia $V(x_0)$ garantált költséggel</u>, ha

$$(*)\qquad \max_{w} \Big\{ V\big(\big[(A_0+\delta A) + (B_0+\delta B)K\big]x + E_0 w\big) - V(x) + \big[x^T \underbrace{(Q + K^T R K)}_{=:\tilde{Q}} x - w^T S w\big] \Big\} < 0,$$

$\forall\ \Delta^T \Delta \leq I$ esetén. ■

Vezessük be a köv. jelölést:

$$\mathcal{A}_\Delta = \underbrace{(A_0 + B_0 K)}_{=:\mathcal{A}} + H_0 (I - \Delta G)^{-1} \Delta \underbrace{(A_q + B_q K)}_{\mathcal{A}_q}$$

Ezzel:

$$x^+ = \mathcal{A}_\Delta x + E_0 w$$

$(*) \iff$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_\Delta & E_0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} n_x & n_x & n_x & n_w \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_\Delta & E_0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \qquad \forall\ \Delta^T \Delta \leq I$$

Legyen $N = 3n_x + n_w + l_p + l_q$

$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ köv: $\qquad y \in \mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \operatorname{im}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ C & E_0 & H_0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_q & 0 & G \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B}_0 = \operatorname{im}\begin{pmatrix} 0 \\ H_0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ G_q \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x \\ x^+ \\ x \\ w \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, l_p \\ \}\, l_q \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} n_x & n_x & n_x & n_w & l_p & l_q \end{array} \end{array}$$

$$\Theta = \left\{ \Delta \in \mathbb{R}^{l_q \times l_p} : \Delta^T \Delta \leqq I \right\}$$ mx-ek kompakt halmaza

$$\Delta \longmapsto Q(\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} I & -\Delta \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{l_p} \times \mathbb{R}^{l_q}$$

<u>altér</u>!

$$\Psi = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{\\ l_p \ \ l_q}} \right\}$$

$$U = I$$

$$\mathcal{B}_{Q(\Delta)} = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : Vy \in Q(\Delta) \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad p = \Delta C_q x + \Delta G p$$

$$V\mathcal{B}_0 \cap Q(\Delta) = \{0\} \quad \forall \Delta^T \Delta \leqq I \Longleftrightarrow$$

$$(I - \Delta G)p = 0 \Longleftrightarrow (I - \Delta G) \text{ inv-ható}$$

(*) $\Longleftrightarrow$

$$y^T \Psi y < 0 \qquad \forall y \neq 0,\ y \in \mathcal{B}_{\Theta(\Delta)}$$

2T. m. ez $\Longleftrightarrow$ $\exists M = M^T$ multiplikátor, hogy

(**) $$\Psi + V^T M V < 0 \qquad \mathcal{B}\text{-n és}$$

$\binom{**}{*}$ $$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} > 0, \qquad \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \in \Theta(\Delta),\ \forall \Delta\text{-ra}$$

SH $\binom{**}{*}$

$$\boxed{(\Delta^T\ \ I)\begin{pmatrix}M_1 & M_2\\ M_2^T & M_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\\ I\end{pmatrix} > 0 \qquad \forall\ \Delta^T\Delta \leqq 0.}$$

Másrészt (**) $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{0 > \begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ \mathcal{A} & E_0 & H_0\\ I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ \mathcal{A}_q & 0 & G \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -P & 0 & & & & \\ 0 & P & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \tilde{Q} & 0 & & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -S & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & & & M_1 & M_2\\ \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & M_2^T & M_4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ \mathcal{A} & E_0 & H_0\\ I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ \mathcal{A}_q & 0 & G \end{pmatrix}}$$

Innen standard eszközökkel lineáris mátrix egyenlőtlenséghez juthatunk, amiből

P, K, M

meghatározhatók

! Előzetesen meghatározandó

M $\binom{**}{*}$-nak megfelelő

struktúrája !

Bizonyítások

Volt:

Á'2| Tetsz. $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ halmazra, amelyre $0 \in \Omega$

$$\overline{\operatorname{cone} B_\Omega} = B_{\overline{\operatorname{cone} \Omega}} .$$

B.| • $\operatorname{cone} B_\Omega = B_{\operatorname{cone} \Omega}$ (könnyű)

$$\overline{\operatorname{cone} B_\Omega} = \overline{B_{\operatorname{cone} \Omega}}$$

$$\overline{\operatorname{cone} \Omega} \supset \operatorname{cone} \Omega \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zárt}}}{B_{\overline{\operatorname{cone} \Omega}}} \supset B_{\operatorname{cone} \Omega}$$

$$\Rightarrow B_{\overline{\operatorname{cone} \Omega}} \supset \overline{B_{\operatorname{cone} \Omega}} = \overline{\operatorname{cone} B_\Omega}$$

• Ford: $y \in B_{\overline{\operatorname{cone} \Omega}} \iff Vy = q \in \overline{\operatorname{cone} \Omega}$

a.) $q = 0$ $Vy \in \operatorname{cone} \Omega \Rightarrow y \in \operatorname{cone} B_\Omega$

b.) $q \neq 0$?

Legyen B_1 a $\ker V \cap B$ bázisvektoraiból álló mx

B_2 a B-beli kieg. bázisvektoraiból álló mx

$\Rightarrow VB_1 = 0$, VB_2 teljes oszloprangú.

Bontsuk fel y-t:

$$y = y^1 + y^2 = B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2$$

$$\Rightarrow Vy = Vy^1 + Vy^2 = VB_2 \xi_2 \quad ; \quad (B_2^T V^T V B_2)^{-1} B_2^T V^T =: VB_2^+$$

$$\Rightarrow VB_2^+ q = \xi_2$$

Mivel $q \in \overline{\operatorname{cone} \Omega} \Rightarrow \exists \{q_n\} \subset \operatorname{cone} \Omega$, hogy $q_n \to q$

Tek $\xi_2^n := VB_2^+ q_n \longrightarrow \xi_2 \Rightarrow y_n^2 = B_2 \xi_2^n \longrightarrow y^2$

Tek $y_n = y_n^2 + y^1$-t: $y_n^2 + y^1 \in B_{\operatorname{cone} \Omega} \Rightarrow y \in \overline{B_{\operatorname{cone} \Omega}}$

F2. $\forall \theta \in \Theta$-ra $Q(\theta)$ zárt 0 csúcspontú kúp és

$$V\mathcal{B}_0 \cap Q(\theta) = \{0\} \quad , \forall \theta \in \Theta.$$

F3. Θ szekvenciálisan kompakt, és $\theta \mapsto Q(\theta) \subset \mathbb{R}^l$ gráfja zárt.

T2 Tfh F2 és F3 teljesül.
Ekkor a köv. 2 állítás ekvivalens:

(1) 1.) $y^T U^T \Psi(\alpha) U y < 0 \quad , \forall y \in \mathcal{B}_{Q(\theta)}, y \neq 0, \forall \theta \in \Theta.$

2.) $\exists M(\alpha)$ multiplikátor, hogy

(2) $$q^T M(\alpha) q > 0 \quad , \forall q \in Q(\theta), q \neq 0, \theta \in \Theta.$$

és

(3) $$y^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + V^T M(\alpha) V\right) y < 0 \quad , \forall y \in \mathcal{B}, y \neq 0.$$

B. 2.) $\Rightarrow$ 1.)

Tfh (3) és (2) telj. Ha $y \in \mathcal{B}_{Q(\theta)}$, vagyis $Vy \in Q(\theta)$, akkor $y^T V^T M(\alpha) V y \geq 0 \Rightarrow$ (1) is telj.

1.) $\Rightarrow$ 2.)

1. lépés. Megmutatjuk, hogy $\exists \delta_0 > 0$, hogy

(4) $$y^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \delta_0 I\right) y < 0 \quad , \forall\, 0 \neq y \in \mathcal{B}_{Q(\theta)}, \forall \theta \in \Theta.$$

F2 $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_{Q(\theta)}$ zárt 0 csúcsp kúp $\Rightarrow$

$$\mathcal{B}^1_{Q(\theta)} := \mathcal{B}_{Q(\theta)} \cap S_1$$

kompakt

egységgömb felület

Tfh (4) nem teljesül:

$\forall\ \nu = 1, 2, \dots$ -re $\exists\ \theta_\nu \in \Theta,\ y_\nu \in B^1_{Q(\theta)}$,

(5) $$y_\nu^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \tfrac{1}{\nu} I \right) y_\nu \geqq 0$$

Kompaktság miatt $\{\theta_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ -ből kiválasztható olyan részsorozat, hogy

$$\theta_{\nu_j} \to \theta^*, \quad y_{\nu_j} \to y^*$$

Mivel $Q(\cdot)$ gráfja zárt $\Rightarrow\ \forall y^* \in Q(\theta^*)$ vagyis $y^* \in B_{Q(\theta^*)}$ és $\|y^*\| = 1$.

(5) -ből határátmenettel:

$$y^* \left(U^T \Psi(\alpha) U \right) y^* \geqq 0$$ ami ellentm.

2. lépés. Legyen

B_1 a $\ker V \cap B$ bázisvekt-ből álló mx

B_2 a B-re kompl. -"-

$0 \in Q(\theta)\ \forall \theta$-ra $\Rightarrow$ B_1 $\forall$ oszlopa $\in B_{Q(\theta)}$-val

$\Rightarrow (4) \Rightarrow$

$$\hat{Q}(\alpha) := B_1^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \delta_0 I \right) B_1 < 0$$

Vegyük $B = (B_1\ B_2)$; $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ - megf. part.

$$\xi^T B^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \delta_0 I \right) B \xi = \xi_1^T \hat{Q}(\alpha) \xi_1 + 2 \xi_1^T \hat{v}(\alpha, \xi_2) + \hat{r}(\alpha, \xi_2)$$

ahol

$$\hat{v}(\alpha, \xi_2) = B_1^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \delta_0 I \right) B_2 \xi_2$$

$$\hat{r}(\alpha, \xi_2) = \xi_2^T B_2^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \delta_0 I \right) B_2 \xi_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ha}\quad Q=Q^T<0\ ,\ v\in\mathbb{R}^{j'}\ ,\ (Q_{j'\times j'})\ \text{és} \\ \qquad \mu=\sup\{y^TQy+2v^Ty : y\in\mathbb{R}^{j'}\} \\ \text{akkor}\quad \mu\ \text{véges és}\quad \mu=-v^TQ^{-1}v.\end{array}}$$

(teljes négyzetté kiegészítéssel!)

Vegyük a fenti függvényben sup-t ξ_1-ben:

$\exists\, \hat{M}(\alpha)$ hogy

$$\hat{v}^T\hat{M}(\alpha)\hat{v} = \max_{\xi_1}\left[\xi_1^T\hat{Q}(\alpha)\xi_1 + 2\xi_1^T\hat{v}\right].$$

$\left.\begin{array}{l}\hat{v}\ \text{lin}\ \xi_2\text{-ben} \\ \hat{r}\ \text{kvadr}\ \xi_2\text{-ben}\end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists\, \bar{M}(\alpha)$ szim. mx, hogy

$$\xi_2^T\bar{M}(\alpha)\xi_2 = \max_{\xi_1}\left[\binom{\xi_1}{\xi_2}^T B^T\left(U^T\Psi(\alpha)U+\delta_0 I\right)B\binom{\xi_1}{\xi_2}\right].$$

Vegyük VB_2 pszeudoinverzét:

$$VB_2^+ = \left(B_2^TV^TVB_2\right)^{-1}B_2^TV^T$$

és legyen

$$\bar{\bar{M}}(\alpha) = -\left(VB_2^+\right)^T\bar{M}(\alpha)\,VB_2^+$$

$\Rightarrow$

$$\xi^TB^TV^T\bar{\bar{M}}(\alpha)VB\xi = -\xi_2^T\bar{M}(\alpha)\xi_2 \le -\xi^TB^T\left(U^T\Psi(\alpha)U+\delta_0 I\right)B\xi$$

Átrend.:

$$\xi^TB^T\left(U^T\Psi(\alpha)U + V^T\bar{\bar{M}}(\alpha)V\right)B\xi \le -\delta_0\xi^TB^TB\xi < 0\ ,\ \text{ha}\ \xi\neq 0$$

$\Rightarrow$

(6) $$\boxed{U^T\Psi(\alpha)U + V^T\bar{\bar{M}}(\alpha)V < 0\quad \text{a}\ B\text{-n.}}$$

3. lépés.

Tek $Q(\theta) \cap VB \ni q \neq 0$, és legyen ξ_2 olyan, hogy

$$q = VB_2\xi_2 .$$

Rögz. ezt a ξ_2-t és vegyük mellé azt a ξ_1^*-t, amire a max felvétetik.

$$q^T \bar{\bar{M}}(\alpha) q = \xi^T (VB)^T \bar{\bar{M}}(\alpha)(VB)\xi = -\xi_2^T \bar{M}(\alpha)\xi_2 =$$

$$= -\xi^T B^T \left(U^T \Psi(\alpha) U + \delta_0 I\right) B\xi$$

q vál $\Rightarrow \quad 0 \neq y = B\xi \in B_{Q(\theta)}$

1. l. u az utolsó kif. ξ-meg $\Rightarrow$

$$\boxed{q^T \bar{\bar{M}}(\alpha) q > 0 \quad , \quad q \in Q(\theta) \cap VB,\ q \neq 0.}$$

4. lépés.

Egészítsük ki $\bar{M}(\alpha)$-t úgy, hogy poz def legyen az egész $Q(\theta)$-n ($\forall \theta$-ra) és a mig. egy-tlenség is érvényes maradjon!

Legyen L teljes sor-rangú mátrix, amire $\ker L = VB$

Ekkor $\exists\ r_1 > 0$ skalár, hogy $\forall \theta$-ra

$$\boxed{M(\alpha) = \bar{\bar{M}}(\alpha) + r_1 L^T L > 0 \qquad Q(\theta)\text{-n}}$$

Tfh nem így van:

$\forall\ \nu = 1, 2, \dots$ -hoz $\exists\ \theta_\nu$ és $q_\nu \in Q(\theta_\nu)$, $\|q_\nu\| = 1$

$$q_\nu^T\left(\bar{\bar{M}}(\alpha) + \nu L^T L\right) q_\nu \leqq 0$$

Kompaktság miatt $\exists\{\Theta_{\nu_j}\}, \{q_{\nu_j}\}$ részsorozatok, hogy $\Theta_{\nu_j} \to \Theta^*$, $q_{\nu_j} \to q^*$, $\|q^*\| = 1$.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{\nu_j} q_{\nu_j}^T \bar{\bar{M}}(\alpha) q_{\nu_j}}_{\downarrow\, j\to\infty \atop 0} + \underbrace{q_{\nu_j}^T L^T L q_{\nu_j}}_{\downarrow \atop \|Lq^*\|^2} \leqq 0$$

$$\Rightarrow Lq^* = 0 \quad \Rightarrow q^* \in \ker L = V\mathcal{B}$$

$$q^* \in Q(q^*)$$

$$q_\nu^T \bar{\bar{M}}(\alpha) q_\nu \leqq -\nu\, q_\nu^T L^T L q_\nu \leqq 0$$

$$\Rightarrow \quad q^* \bar{\bar{M}}(\alpha) q^* \leqq 0$$

, ami ellentmond a 3. lépésnek, ami a megfelelő ν_1 lét-t mutatja:

$$M(\alpha) > 0 \qquad Q(\theta)\text{-n} \ \forall\, \theta\text{-ra}$$

Csak azt kell megmutatni, hogy (6) érv. marad, ha $\bar{\bar{M}}(\alpha)$ helyett $M(\alpha)$-t vesszük:

$$\ker L = V\mathcal{B}, \quad y \in \mathcal{B} \Rightarrow LVy = 0$$

$$\Rightarrow (VB)^T M(\alpha)(VB) = (VB)^T\left(\bar{\bar{M}}(\alpha) + \nu_1 L^T L\right)(VB) =$$

$$= (VB)^T \bar{\bar{M}}(\alpha)(VB)$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall\, y \in \mathcal{B}: \quad y^T\left(U^T \Psi(\alpha) U + V^T M(\alpha) V\right) y < 0.}$$