

A variációszámítás kialakulása

Tóth János

Simonovits A. könyvének 7. fejezete és TJ-SLP 10. fejezete alapján

2012. február 8.

Ami ismerős

- Egyváltozós függvények
- Feltételes szélsőérték
- Többváltozós függvények
- LP: lineáris függvények, lineáris feltételek, de: simaság!
- Konvex, vegyes, egészértékű
- Kombinatorikus optimalizálás

Lásd a `ConstrainedOptimization` részt a *Mathematica* súgójában.

Ami új

- Végtelen dimenziós (függvény)térben
- Nemlineáris funkcionál



Egy izoperimetrikus probléma

Didó (Karthágó első királynője) problémája:

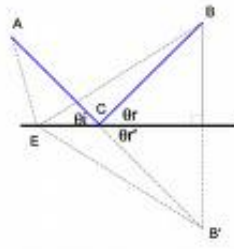
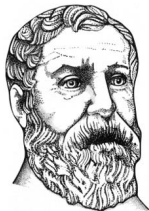
(Vergilius) D. bármekkora területen várost alakíthat, amit egy ökörbőrrel körül tud keríteni.

Szíj, kör: mivel...

(Aineiasz)

Alexandriai Hérón (10–70)

- labda
- háromszög területe
- automata (bábszínház)
- A tárgy és a képpont között a tükröt érintő fény útjának hossza minimális.



Willebrod van Royen Snell (1580–1626)



kb. 1620, fénytörés $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ állandó

René Descartes (1596–1650)



1649-ben Krisztina svéd királynő Descartes-ot Stockholmba hívta. A királynő rendszerint hajnali 5 órakor akarta őt látni, így Descartes-nak szakítania kellett 11 órai felkelésével. A zord hidegben reggelenként 5 órakor menvén a palotába tüdőgyulladást kapott, és ebbe belehalt. $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2}$ hibásan!

Pierre de Fermat (1601–1665)



(a lawyer by vocation a mathematician by avocation, D. R. Hofstadter [GEB-könyv])

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_2}{c_1}$$

A fény a legrövidebb idejű pályán terjed

A Fermat-elv

$$T(x) := \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2(s)}}{c/n(s, x(s))} ds$$

c : fénysebesség

$n(t, p)$: törésmutató

Levezetés: [4, 374–375. oldal]

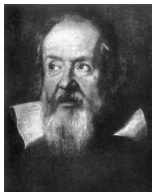
A leggyorsabb leereszkedés

$$T(x) := \int_0^b \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2(s)}}{2gx(s)} ds$$

g : nehézségi gyorsulás

Levezetés: [4, 371. oldal]

Galileo Galilei (1564–1642)



A tudományban ezer tekintély szava nem ér annyit, mint egyetlen egyén szerény érvei.

Brachisztochron, 1638, körív

Sir Isaac Newton (1643–1727)

1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*,
alkalmazás hajóépítésnél (Vekerdi életrajza.)



Egy másik Newton ☺



Cambridge-ben született, s nem Newton rokona, anyai nagyapja a Nobel-díjas Max Born volt. Apja a II. vhban részt vett a Enigma-tervben (A. M. Turing!), s a háború elején ő tartóztatta le az Angliába repült Rudolf Hesst.

Newton népszerűsítője

Voltaire (François-Marie Arouet) (1694–1778) Candide, pillangó



Frank Plumpton Ramsey (1903–1930)



Ramsey-elmélet (skatulyaelv), variációszámítás a
közgazdaságtanban, témavezető, fordító: *Tractatus
Logico-Philosophicus*

Erdős-idézet

Minden $a, b \in \mathbb{N}$ számpárhoz van olyan (legkisebb) $R(a, b) \in \mathbb{N}$, hogy ha egy $R(a, b)$ pontból álló teljes gráf éleit kékkel és zölddel színezzük, akkor vagy van teljes a -as kék színben vagy teljes b -es zöld színben.

Képzeljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és az $R(5, 5)$ értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fognunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett az $R(6, 6)$ értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erőnkkel meg kéne próbálnunk legyőzni őket.

Legtöbb felhasznált termék

$$Y(t) = g(K(t))$$

$$C(t)$$

$$K'(t) = Y(t) - C(t)$$

$$g(u) := bu$$

$$N(C) := -a(C - c)^2$$

termék és tőke

pill. fogyasztás

maradék növeli

empirikus formulák

összes felhasználáshoz

$$\begin{aligned} I(K) &:= \int_0^T N(C(t)) \\ &= \int_0^T N(g(K(t)) - K'(t)) \\ &= -a \int_0^T (bK(t) - K'(t) - c)^2. \end{aligned}$$

„A” levezetés

$$\omega(\varepsilon) := J(y + \varepsilon\eta) \quad \delta J := \omega'(0)$$

$$\omega'(0) = \int_a^b \partial_2 f(x, y(x), y'(x)) \eta(x) + \partial_3 f(x, y(x), y'(x)) \eta'(x) \, dx$$

parciális integrálás, peremfeltételek

$$= \int_a^b \left(\partial_2 f(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \partial_3 f(x, y(x), y'(x)) \right) \eta(x) \, dx.$$

Lemma 1. (Lagrange, Du Bois Reymond, Haar)

$$\forall \eta \int_a^b m \eta = 0 \implies m = 0.$$

Kifejtve. Speciális esetek

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

$$\partial_2 f \circ (\text{id}, y, y') - (\partial_3 f \circ (\text{id}, y, y'))' = 0$$

$$\begin{aligned} & \partial_2 f \circ (\text{id}, y, y') - \partial_{13} f \circ (\text{id}, y, y') \\ & - y' \partial_{23} f \circ (\text{id}, y, y') - y'' \partial_{33} f \circ (\text{id}, y, y') = 0 \end{aligned}$$

- 1 x hiányzik $f(x, p, q) = g(p, q) \implies$ elsőrendű implicit de:
 $g(y(x), y'(x)) - y'(x) \partial_2 g(y(x), y'(x)) = \alpha,$
- 2 $y(x)$ hiányzik: $f(x, p, q) = h(x, q) \implies$ elsőrendű implicit
de: $\partial_2 h(x, y'(x)) = \alpha,$
- 3 $y'(x)$ hiányzik $f(x, p, q) = k(x, p) \implies$ implicit (algebrai)
egyenlet: $\partial_2 k(x, y(x)) = 0.$

A fő kezdeményező: Johann Bernoulli (1667–1748)



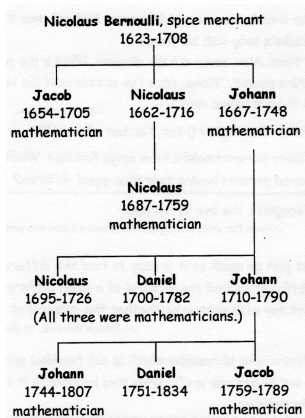
fénytörés és visszaverődés, görbesereg ortogonális trajektóriái, területszámítás sorokkal, brachisztochron, 1696 (Newton, Jakob B., Leibniz, l'Hopital is)
Ötletei: mechanikára is Fermat-elv, diszkretizálás, osztópontokra Snellius-Descartes határérték: ciklois.

Jakob (Jacques) Bernoulli (1654–1705)



integrál, láncgörbe, polárkoordináták, izochron

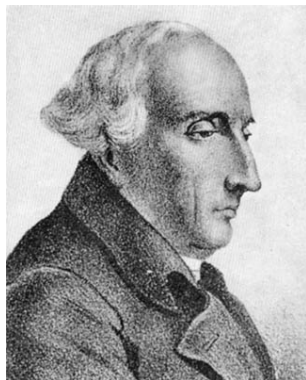
A Bernoulli-család



Az alapító atyák



Leonhard Euler (1707–1783)
(1736–1813)



Joseph-Louis Lagrange

Megoldandó, érdekes, nyílt probléma

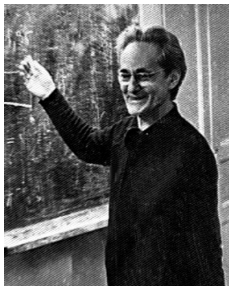
(Bródy András, Leontief)

A szokásos *elegendő* feltételek közg. tartalma?

Egy inverz feladat

Adott differenciálegyenlet EL-egyenlete-e vmely variációs feladatnak?

- KS: egzisztencia, unicitás, előállítás
- Fizika: kauzális vs. teleologikus leírás
- A funkcionál fizikai tartalma: Fényes Imre (ELTE), Gyarmati István (BME)



Általánosítások

- Magasabb deriváltak
- Mozgó végpont
- Mellékfeltételek:
 - integrál (izoperimetrikus)
 - algebrai egyenlet (holonom mellékfeltétel)
 - (implicit) differenciálegyenlet (anholonom mellékfeltétel)
- Több változó
- Irányítás (Pontrjagin, Bellmann, Gyurkovits É.)

-  Kósa A.: *Variációszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
-  Kósa A. (szerk.): *Optimumszámítási modellek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
-  Simonovits A.: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből*, TYPOTEX, Budapest, 2009.
-  Tóth J.; Simon L. P.: *Differenciálegyenletek. Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, TYPOTEX, Budapest, 2005, 2009.