Differenciálegyenletek.
Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba

Differenciálegyenletek

Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba

Tóth János[1]
BME TTK Matematika Intézet Analízis Tanszék

Simon L. Péter[2]
ELTE TTK Alkalmazott Analízis Tanszék

TYPOTEX Kiadó
Budapest, 2004

A mű megjelenését támogatta a Felsőoktatási ******** akármi valamint az Országos Tudományos Kutatási Alapprogram (T 037491).

© Tóth János és Simon Péter, 2004

ISBN 963 0000 00 0

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft., az 1795-ben alapított
Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesületének tagja
http://www.typotex.hu
Felelős kiadó Votisky Zsuzsa
Felelős szerkesztő ...
Lektor Garay Barnabás
Műszaki szerkesztő ...
A borítót tervezte ...
Terjedelem ... (A/5) ív
Nyomtatta és kötötte ...
Felelős vezető ...

Tartalom

Előszó

A jelen könyv egyrészt azokon az előadásokon alapul, amelyeket az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tartottunk egymást követően matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók számára, másrészt pedig amelyeket Tóth János tartott a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Vegyészmérnöki Karának hallgatói számára. Ennek megfelelően elsősorban vegyész- és biomérnök, valamint alkalmazott matematikus hallgatókat céloztunk meg vele, de nagyon reméljük, hogy más egyetemek matematikus és differenciálegyenleteket alkalmazó nem matematikus hallgatói is haszonnal forgatják majd.

A könyv létrejöttének körülményei indokolják, hogy mindenekelőtt az ELTE-n és a BME-n velünk együtt tanító kollégáknak mondjunk köszönetet, így Frits Erika Ritának, G. Horváth Ágotának, Hári Józsefnek, Kollárné Hunek Klárának, Lángné Lázi Mártának, Mátrai Tamásnak, Rácz Andrásnak és Sánta Zsuzsának.

Nagyon sokat köszönhetünk Garay Barnabásnak, a könyv lektorának, aki mindenre kiterjedő figyelemmel igyekezett kigyomlálni a hibákat, és javítani az érthetőséget, és a konzisztenciát.

Korábbi változatok, illetve egyes fejezetek elolvasásával segített bennünket Andai Attila, Gelencsér Tímea, Halmschlager Andrea, Horváth Miklós, Karátson János, Kánnai Zoltán, Lóczi Lajos, Papp Dávid, Pfeil Tamás, Simon László, Szili László és Ván Péter. Sok technikai segítséget kaptunk Tikk Domonkostól és Wettl Ferenctől. Végül, de nem utolsó sorban hálásak

vagyunk munkahelyi vezetőinknek a BME-n és az ELTE-n, hogy támogatták a könyv megírását.

2004. augusztus **Tóth János és Simon L. Péter**

I

Alapismeretek

1

Bevezetés

A differenciálegyenletek elmélete önmagában is érdekes kutatási terület. Sokkal fontosabb azonban az, hogy ez az elmélet számos helyen alkalmazható.

A matematikán belül gyakran használják más egyenlettípusok (algebrai, differencia-, funkcionálegyenletek) megoldására és más diszciplínák (variációszámítás, a sztochasztikus folyamatok elmélete, differenciálgeometria stb.) segédeszközeként.

A matematikán kívül a természet-, a műszaki és a társadalomtudományokban [**?**, **?**, **?**, **?**] olyan területeken fordul elő, ahol **folytonos idejű, folytonos állapotterű, determinisztikus** folyamatok vizsgálata a cél. Ezek közül tipikusan a térben homogén (vagy – mérnöki szóhasználattal – **koncentrált paraméterű**) folyamatok vizsgálatára közönséges, a térbeli inhomogenitások figyelembevételére pedig parciális differenciálegyenleteket szokás használni.

Az alkalmazásoknál a hagyományoknak megfelelően a természettudományos és műszaki példák dominálnak, olyan érdekességektől, mint például Laura és Petrarca szerelmének dinamikai modellje [**?**] el kellett tekintenünk.

Igyekeztünk minden részt példákkal és feladatokkal is illusztrálni, de aki alaposan el akarja sajátítani a tárgyat, annak számára nélkülözhetetlen egy alkalmas példatár, ilyen például [**?**].

A közönséges differenciálegyenletek témaköréből igen sok jegyzet és példatár jelent meg magyar nyelven: [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**], és megjelent néhány alapvető könyv fordítása is: [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**]. Kevés magyar szerző írt magyar nyelvű tankönyvet, tudomásunk csak ezekről van: [**?**, **?**].

Az elsőből az általunk alig érintett közgazaságtudományi modellekről lehet értékes információkat szerezni, míg a másodiknak (ugyanezen felül) az erős matematikai alapozás, és az irányításelmélet, valamint a differenciálegyenlőtlenségek irányába mutató kitekintés a sajátossága.

Magyar szerzők idegen nyelvű könyvei közül történeti okokból érdemes megemlíteni Petzvál József könyvét: [**?**], valamint Schlesinger Lajos művét: [**?**], Farkas Miklós műveit pedig fontosságuk és időszerűségük miatt: [**?**, **?**].

A könyvben tárgyalt többi téma, például a parciális differenciálegyenletek, vagy a variációszámítás irodalmát nem tekintjük át hasonló részletességgel, itt arra törekedtünk néhány fontos hivatkozás megadásával, hogy az Olvasó el tudjon indulni.

Melyek azok a specialitások, amelyek jellemzik ezt a könyvet, amelyek miatt érdemesnek tartottuk, hogy vállalkozzunk a megírására?

Fogalmazásmód Következetesen törekedtünk arra, hogy minden előkerülő matematikai objektumról megmondjuk, micsoda (milyen halmaz, vagy milyen halmaznak az eleme). Igyekeztünk azonos dolgokat azonos módon, különbözőket pedig külöbözőképpen jelölni. Különös hangsúlyt fektettünk a függvény és a függvényérték közötti különbségtételre. (Ha ez utóbbi mellett még mindig érvelni kell, említsük meg, hogy egyetlen matematikus sem téveszt össze egy mátrixot egy vektorral, vagy hivatkozhatunk arra, hogy a matematikai programcsomagok megkövetelik ezt a különbségtételt.) Ezeket a szempontokat részben vagy teljesen a [**?**, **?**, **?**, **?**] írások megvalósítják; kiindulópontjuk a [**?**] dolgozat és Kósa András hetvenes évek végén, nyolcvanas évek elején tartott előadásai az ELTE TTK-n. Az általunk ismert idegennyelvű irodalomban a helyzet rosszabb, néhány szépen megírt könyvet tudunk csak említeni: [**?**, **?**], s ezek nem éppen az általánosan használt, népszerű művek.

Alkalmazások Mivel az alkalmazásokat magunk is fontosnak tartjuk, és mivel az elsősorban megcélzott olvasóink vegyész- és biomérnök, valamint alkalmazott matematikus hallgatók, a differenciálegyenletek tárgyalásakor a megszokottnál is több alkalmazási példát és a feladatot mutatunk. Már itt is felhívjuk a figyelmet Ponomarjov [**?**] könyvecskéjére, amely azt a célt tűzte ki, hogy megtanítja olvasóját differenciálegyenletek felállítására. Ezt átfogóan és rendszeresen sehol sem szokás tanítani, a tipikus (legkedvezőbb) eset az, hogy egy területen (például Newton[1]-egyenletek, kémiai kinetikai differenciálegyenletek, populációbiológiai modellek) megtanulnak a hallgatók modelleket megfogalmazni. A modellezés elsajátításához egy másik hasznos jegyzet: [**?**]. Az alkalmazásokkal kapcsolatban igen tanulságos az a tény is, hogy P. W. Atkins sok kiadásban megjelent, az egész világon használt *Fizikai kémia* című könyve [**?**] mindhárom kötetének címlapját egy-egy differenciálegyenlet díszíti, nemcsak a III. Változás címűét (a legegyszerűbb konszekutív reakció kinetikai differenciálegyenlete), hanem a II. Szerkezet címűét (a Schrödinger-egyenlet), sőt még az I. Egyensúly címűét is (a van't Hoff-egyenlet).

Mathematica A fejezeteket rendre olyan szakasz zárja, amelyből kiderül, hogyan lehet a felmerült számolások megkönnyítésére vagy illusztrációra használni a *Mathematica* matematikai programcsomagot. Ez azoknak szól, akik a programra vonatkozó legalapvetőbb ismeretekkel már rendelkeznek. Célja semmiképpen nem a tárgykör kimerítése, csupán ötleteket kívánunk ezeken a helyeken nyújtani az Olvasónak. A legalapvetőbb ismeretek elsajátításához pedig a program súgóján kívül ajánljuk a program megtervezőjének az ismertetését [**?**] a kiegészítő programcsomagok [**?**] leírásával együtt. A céltudatos és gyors haladás megkönnyítésére készült a [**?**] könyv.

Ami a szükséges előismereteket illeti: a jelen könyv olvasásához az egyetemeken az első két félévben oktatott bevezető matematikatárgyak anyaga elegendő. Általában is jellemző a differenciálegyenletek elméletének elemi fejezeteire, hogy nem alkalmaznak különleges matematikai eszközöket, de erősen támaszkodnak a korábbi előismeretekre.

[1] Newton, Isaac (1643–1727): angol matematikus, fizikus és csillagász; a matematikai analízis és alkalmazásainak kezdeményezője számos területen, röviden: a teremtés másik fele.

1.1. Jelölések

$]a,b[$	$a,b\in\mathbb{R}, a<b$ esetén az $\{x\in\mathbb{R}; a<x<b\}$ nyílt intervallum
$\rrbracket a,b\llbracket$	$:=]\min\{a,b\},\max\{a,b\}[$
A	Az A halmaz lezártja
A^B	A B halmazon értelmezett, A-beli értékeket fölvevő függvények halmaza
$c(\cdot)$	tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ valós szám esetén az $\mathbb{R}\ni x\mapsto c(x)\in\mathbb{R}$ állandó függvény
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\mathbb{C}^N$	az N-dimenziós komplex vektorok halmaza
$\mathbb{C}^{N\times N}$	az $N\times N$-es komplex elemű mátrixok halmaza
$\mathcal{C}(A,B)$	az A halmazon értelmezett, B halmazba képező folytonos függvények halmaza
$\mathcal{C}^N(A,B)$	az A halmazon értelmezett B halmazba képező, N-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{C}^N(A)$	az A halmazon értelmezett, valós értékű, N-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{D}_f$	az f függvény értelmezési tartománya
∂T	a T tartomány határa
$\partial_i f$	az f függvény i-edik változó szerinti parciálisderivált-függvénye
e_n	a standard bázis n-edik eleme
$\mathcal{F}(A\times B)$	az $A\times B$ halmaz olyan f részhalmazai, amelyek függvények, azaz $(x,y_1),(x,y_2)\in f \Longrightarrow y_1=y_2$.
$f\|_A$	az f függvény leszűkítése az A halmazra; $\mathcal{D}_{f\|_A}:=\mathcal{D}_f\cap A$
$(f,g)(x):=$	$(f(x),g(x)),$ ha $x\in\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g$
id	a valós számok identitásfüggvénye
$\mathrm{Im}(z)$	a z komplex szám képzetes része
$\mathrm{int}(\Sigma)$	a Σ halmaz belső pontjainak halmaza
$J-\{\tau\}$	a $J\subset\mathbb{R}$ valós számhalmaz és a $\tau\in\mathbb{R}$ valós szám elemenkénti különbsége: $:=\{x\in\mathbb{R}; x+\tau\in J\}$
$\mathbb{K}$	a valós vagy a komplex számok teste
$\mathrm{Ker}(A)$	az A lineáris leképezés magtere
$\mathcal{K}_\rho(a)$	az a pont ρ sugarú (nyílt) környezete
$\lim\limits_a f$	vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ az f függvény határértéke az a helyen
$\mathbb{N}$	a természetes (itt: pozitív egész) számok halmaza
$\mathbb{N}_0$	a nemnegatív egész számok halmaza
pr_1	vetítés az első tengelyre
pr_2	vetítés a második tengelyre
pr_i	vetítés az i-edik tengelyre
$\mathbb{Q}$	a racionális számok halmaza

$\mathrm{rank}(A)$	az A mátrix rangja
$\mathrm{Re}(z)$	a z komplex szám valós része
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^N$	az N-dimenziós valós vektorok halmaza
$\mathbb{R}^{N\times N}$	az $N\times N$-es valós elemű mátrixok halmaza
$\mathbb{R}^-$	a negatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$	a pozitív valós számok halmaza
$\overline{\mathbb{R}^+}$	$:= \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$
$\mathbb{R}_0^+$	a nemnegatív valós számok halmaza
$\mathcal{R}_f$	az f függvény értékkészlete
$\mathcal{R}(J)$	a J intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza
$\mathrm{Span}(A)$	az A vektorhalmaz elemei által kifeszített lineáris tér
$\langle u,v\rangle$	az u és a v vektor skaláris szorzata
$\mathrm{Val}(A)$	az A állítás igazságértéke
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
χ_Q	a Q halmaz karakterisztikus, vagy indikátorfüggvénye

2

Alapfogalmak

A fejezet célja, hogy

- az alkalmazásokon keresztül vezesse be a differenciálegyenlet fogalmát,
- a fogalmat összekösse az elemi analízis ismert fogalmaival,
- megadja a további legalapvetőbb fogalmak pontos definícióját,
- kimondjon és bizonyítson néhány ezen fogalmak között fennálló központi fontosságú tételt, és végül
- megmutassa, hogy a felmerült fogalmak illusztrálására és feladatok megoldására, vagy megoldásának segítésére miként használható a *Mathematica*.

2.1. Motiváció, példák

Néhány fizikai, kémiai és biológiai példán keresztül megmutatjuk, hogyan vezet valamely jelenség, – gyakran: időben lezajló **folyamat** – a legkülönbözőbb alakú differenciálegyenletekre. Majd elemi eszközökkel meg is vizsgáljuk ezeket az egyenleteket.

2.1.1. A rádioaktív bomlás egy modellje

Jelölje valamely rádioaktív anyag mennyiségét a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban $x(t) \in \mathbb{R}$, és vizsgáljuk meg, hogyan változik ez a mennyiség a $[t, t+\delta]$ intervallumban, ahol δ (az alábbiakban meghatározandó módon) „rövid” időtartam. (Pozitivitását nem fogjuk kihasználni, csak annyiban, hogy az intervallumot nem ebben a pontosabb formában adtuk meg: $]\!]t, t+\delta[\![$. Ettől a – túlzottnak is nevezhető – pontosságtól a továbbiakban is el fogunk tekinteni.). A rádioaktív anyag mennyisége δ idő elteltével olyan adaggal csökken, amely mindentől, ami szóba jöhet, a legegyszerűbb módon (lineárisan) függ, vagyis egyenesen arányos a jelenlévő anyag mennyiségével (ha tehát több volt belőle, gyorsabban is bomlik) és az eltelt időtartammal. Ezt így írhatjuk le:

$$x(t+\delta) = x(t) - kx(t)\delta + \varepsilon(\delta)\delta,$$

ahol a $-k$ arányossági tényezőről feltehető, hogy negatív szám (itt fizikai feltevést viszünk be a modellbe), így $k \in \mathbb{R}^+$. Feltételezzük, hogy a csökkenésen túlmenően az intervallum hosszához képest csak kicsiny változás következik be abban az értelemben, hogy $\lim_0 \varepsilon = 0$. Átrendezés után ezt kapjuk: $\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta} = -kx(t) + \varepsilon(\delta)$. Innen látható, hogy az intervallum δ hosszával nullához tartva a jobb oldalnak létezik határértéke, így a balnak is, ami éppen azt jelenti, hogy az anyagmennyiséget leíró függvény deriváltfüggvénye az értelmezési tartományának minden pontjában létezik: az anyagmennyiséget leíró függvény minden időpillanatban deriválható. Így tehát:

$$\dot{x}(t) = -kx(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+). \tag{2.1}$$

A deriváltat ponttal is szokás jelölni, nemcsak vesszővel, különösen olyan függvények esetében, melyeknél az értelmezési tartomány pontjait **idő**ként interpretáljuk. Ez a szokás Newtontól ered, lásd még alább is.

Kérdés ezek után, hogy mely függvények a (2.1) egyenlet megoldásai. Eszünkbe juthat, hogy az exponenciális függvény deriváltja önmaga, esetleg még azt is kitalálhatjuk, hogy az $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto C\exp(-kt)$ alakú függvények deriváltja tetszőleges $C \in \mathbb{R}$ esetén a függvény $-k$-szorosával egyezik meg.

2.1. feladat. Be tudnánk-e bizonyítani, hogy más függvény nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal? Lássuk be azt, hogy ha y megoldása a (2.1) egyenletnek, akkor a $t \mapsto y(t)\exp(kt)$ függvény állandó. (Megoldás: **??**. oldal.)

Ezután próbáljuk azt meghatározni, hogy amennyiben kezdetben (a 0 időpontban) x_0 mennyiség volt jelen a rádioaktív anyagból, akkor melyik függvény írja le az anyag mennyiségét? Ehhez egyszerűen össze kell vetnünk a „modell”-ből kapott mennyiséget a kezdeti mérés eredményével: $x_0 =$

$x(0) = C$, s a válasz: $x_0 \exp(-kt) \quad (t \in \mathbb{R}^+)$. Tehát a rádioaktív anyag mennyisége a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban $x(t) = x_0 \exp(-kt)$.

Foglaljuk össze, hogy milyen szempontokból jó ez a modell.

- A modell pozitív kezdeti értékek esetén **pozitív értékek**et szolgáltat minden későbbi (és korábbi!) időpontra.
- A modellben szereplő mennyiség szigorúan **monoton csökkenőleg** tart nullához összhangban azzal, amit elvárunk tőle.

Végül említsük meg a modell néhány hiányosságát és hibáját is.

- A modell **determinisztikus**, nem veszi figyelembe, hogy a rádioaktív atomok közül véletlenszerűen bomlik el egy-egy.
- A modell **folytonos állapotterű**, nem veszi figyelembe, hogy az atomok száma csak egyesével változhat. (Lehetséges, hogy a **szigorúan** monoton csökkenést mégsem kellene elvárnunk?)

2.1.2. A barometrikus nyomásformula

Legyen $p(h)$ a(z ismeretlen) légnyomás, $\rho(h)$ pedig a levegő (ismert) sűrűsége a Föld felszínétől mért $h \in \mathbb{R}^+$ magasságban. Felhasználva a nyomás értelmezését, miszerint az az erő és a felület hányadosa, egy állandó A keresztmetszetet véve az arra ható erőt kétféleképpen is fölírhatjuk:

$$p(h)A = Ag \int_h^{+\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

ahol a jobb oldalon a végtelen magas levegőoszlop súlyából származó erő szerepel (g a gravitációs gyorsulás). (Szükség esetén fölírható a jobboldali integrál egy közelítő összege, amiből még jobban látható ennek jelentése.) Ebből (a ρ függvényre vonatkozó enyhe – fizikai megfontolások miatt teljesülő – feltételek miatt) deriválással a $p'(h) = -\rho(h)g$ egyenletet kapjuk, amelynek a megoldásához szükségünk van még a sűrűségre, mint a magasság függvényére. A sűrűség a $v(h)$ fajlagos térfogat reciproka: $\rho(h) = \frac{1}{v(h)}$. Ha a levegőt ideális gáznak tekintjük, akkor $p(h)v(h) = \frac{1}{M}RT$, ahol M a levegő látszólagos mólsúlya, R a gázállandó, T pedig a levegő hőmérséklete. Mindezeket felhasználva kapjuk:

$$p'(h) = -p(h)\frac{Mg}{RT}, \tag{2.3}$$

ahonnan – a Föld felszínén mért nyomást p_0-lal jelölve – a fentiekhez hasonlóan adódik:

$$p(h) = p_0 \exp(-h\frac{Mg}{RT}) \quad (h \in \mathbb{R}^+). \tag{2.4}$$

A szereplő állandók értéke SI-rendszerben:

$$g = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad M = 28.98\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}, \quad R = 8.314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}};$$

míg T és p_0 tipikus értéke 300 K, illetve 101325 Pa.

2.2. feladat. Ábrázoljuk a kiszámolt p függvényt a $[0,1000]$ és a $[0,100000]$ intervallumon. (Megoldás: **??**. oldal.)

A (2.3) differenciálegyenlet megoldásaként kapott (2.4) függvény ugyan minden pozitív magasságra értelmezve van, pontosnak azonban csak addig mondhatjuk, amíg a levegő hőmérséklete és a nehézségi gyorsulás állandónak tekinthető. Ezt azonban, különösen az elsőről, csak kis szakaszon belül lehet feltételezni.

2.1.3. Baktériumok szaporodásáról

Vizsgáljuk most egy edényben (kémcső, lombik) tartott baktériumtenyészetben a baktériumok mennyiségét. Ezt a baktériumok össztömegével jellemezhetjük, melyet a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban $m(t) \in \mathbb{R}$ fog jelölni. A fentiekhez hasonló megfontolásokkal most az $\dot{m}(t) = \lambda m(t)$ egyenlethez jutunk, amelynek az $m(0) = m_0$ feltétel (az úgynevezett **kezdeti feltétel**) mellett a megoldása $m_0 \exp(\lambda t) \quad (t \in \mathbb{R}^+)$. A konkrétság kedvéért foglalkozzunk az *Escherichia coli* baktériummal. Egyetlen sejtjének a tömege 2×10^{-12} g. Ismeretes, hogy az életciklusának hossza mintegy harminc perc, tehát ennyi a kétszereződési ideje. Ez modellünk számára azt jelenti, hogy (amennyiben az időt percben mérjük)

$$\frac{m(t+30)}{m(t)} = \exp(30\lambda) = 2, \text{ ahonnan } \lambda = \frac{\ln(2)}{30} = 0.0231049. \tag{2.5}$$

Három nap, azaz 72 óra, vagyis $72 \cdot 60 = 4320$ perc múlva a baktériumok össztömege $2.10^{-12} 2^{\frac{4320}{30}} = 2.10^{-12} 2^{144} = 4.4601510^{31}$, amit a Föld tömegével ($5.9742 \cdot 10^{27}$ g) összevetve kapjuk, hogy három nap múltán a kiindulási baktérium utódainak tömege meghaladja a Földét.

Mit jelent ez az eredmény? Azt, hogy ilyen hosszú időtartamon keresztül már nem áll korlátlanul a baktériumok rendelkezésére – az exponenciális szaporodáshoz szükséges, és a korábbiakban hallgatólagosan feltételezett mennyiségű – táplálék, tehát ilyen hosszú időtartamra már nem érvényes a modell. Ha pontosabb modellt akarunk készíteni, akkor például azt mondhatjuk, hogy létezik a baktériumpopulációnak olyan L értéke, amelyhez az össztömeggel közelítve a szaporodási sebesség egyre inkább lelassul (a táplálék korlátos volta miatt). Ezt a modellben úgy vehetjük figyelembe, hogy még egy tényezőt hozzáírunk a jobb oldalhoz:

$$\dot{m}(t) = \lambda m(t)(L - m(t)). \tag{2.6}$$

Ettől a tényezőtől azt várjuk, hogy hatására az össztömeg nem nő korlátlanul. Az egyenlet (amelynek jobb oldala most már $m(t)$-nek nem lineáris függvénye!) megoldására és a megoldás vizsgálatára többször vissza fogunk térni.

Felhívjuk még arra is a figyelmet, hogy – amint ez a (2.5) levezetésből látható – a λ paraméter éppúgy, mint a kétszereződési idő független a kezdeti tömegtől is, és attól is, hogy melyik időponttól kezdjük mérni a tömegnövekedést.

2.1.4. Egy egyszerű kémiai reakció

Tekintsünk egy edényt, amelyben vizes oldatban valamilyen, S-sel jelölt **szubsztrát** (átalakítandó anyag) van jelen. Átalakítását az E-vel jelölt **enzim** (katalizátorfehérje) végzi. Az átalakítás első lépéseként egy C-vel jelölt **komplex** keletkezik, a másodikban pedig létrejön a **termék**, jele (a produktum szóból) P. Mindezt a következőképpen szokás felírni:

$$E + S \rightleftharpoons C \rightleftharpoons E + P, \tag{2.7}$$

Amennyiben csak az $E + S \longrightarrow C$ részfolyamat (reakciólépés) menne végbe, akkor a fenti – természetesnek nevezhető – megfontolásokkal a következő egyenlethez jutnánk:

$$\dot{e} = -k_1 es \quad \dot{s} = -k_1 es \quad \dot{c} = +k_1 es,$$

melyben a k_1 pozitív szám a reakciólépés úgynevezett **sebességi együttható**ját (régebbi elnevezéssel: **állandó**ját) jelöli; e, s, c (és alább p) pedig az E,S,C,P anyagfajta koncentrációját. (Ebben a reakciókinetikai példában az eddigiektől eltérően az egyenleteket nem függvény**érték**ekkel írtuk fel, hanem függvényekkel.) Ha az összes reakciólépést figyelembe vesszük, akkor meglehetősen bonyolult **differenciálegyenletrendszer**t (más néven a $t \mapsto (e(t),s(t),c(t),p(t))$ vektorértékű függvényre vonatkozó differenciálegyenletet) kapunk:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= -k_1es+k_{-1}c+k_2c-k_{-2}ep \\
\dot{s} &= -k_1es+k_{-1}c \\
\dot{c} &= +k_1es-k_{-1}c-k_2c+k_{-2}ep \\
\dot{p} &= +k_2c-k_{-2}ep.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(Ebben k_1,k_2 az előre menő, k_{-1},k_{-2} pedig a hátrafelé menő reakciólépések sebességi együtthatóját jelöli.) Ez az egyenlet már elemi eszközökkel nem vizsgálható, ami azt mutatja, hogy egy viszonylag egyszerűnek látszó folyamat modellezése is nehéz matematikai feladathoz vezethet.

2.1.5. Newton II. törvénye

Most pedig tulajdonképpen jól ismert dolgokat fogunk átírni a differenciálegyenletek nyelvére. Ha egy m tömegű szabadon eső test a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban $v(t)$ sebességgel mozog, akkor rá az $m\dot{v}(t) = mg$ egyenlet vonatkozik. Ha v_0 kezdősebességgel indítottuk, akkor

$$v(t) = v_0 + gt \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

Figyelembe véve, hogy a sebesség az elmozdulás deriváltja, egyenletünket így is írhatjuk: $m\ddot{s}(t) = mg$, s ekkor még azt is meg kell adnunk a teljes leíráshoz, hogy honnan indult a test, nemcsak a kezdeti sebességét: $\dot{s}(0) = v_0, \quad s(0) = s_0$. A – jól ismert – megoldás:

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

Végül egy tanulságos megjegyzés. Newton a II. törvénynek nevezett állítást (mai jelölésekkel) az alábbi formában írta föl:

$$(mv)^{\cdot} = F. \tag{2.9}$$

Amennyiben a tömeg időben állandó, ez a fölírás egyenértékű az elterjedtebb $ma = F$ alakkal, ha a szokásnak megfelelően $a := \dot{v}$ jelöli a gyorsulást.

A relativitáselmélettel foglalkozók Newton zsenialitását dicsérik, hogy öntudatlanul is gondolt a változó tömeg esetére. Egészen földhöz (röghöz) ragadt példát is tudunk azonban mutatni, ahol a Newton-féle alakra szükség van. Tekintsünk egy hosszú teherautót, amelyre kizárólag a súrlódási erő hat, és amelyre folyamatosan (egyenletes sebességgel) valamilyen terményt szórnak. Hasonló esettel találkozunk akkor is, ha például zápor miatt nagy mennyiségű víz esik a teherautó platójára, de az üzemanyagukat elfogyasztó rakéták mozgása is hasonló módon írható le.

2.3. feladat. Kérdés: mi történik hosszú idő után az autóval? (Megoldás: **??**. oldal.)

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben a pontban **másodrendű** egyenletekkel is találkoztunk. Ugyanis, ha Newton II. törvényét $m\ddot{s}(t) = F(t, s(t), \dot{s}(t))$ alakban írjuk fel, akkor az egyenletben az ismeretlen függvény második deriváltja szerepel. Az előző pontok példáiban minden differenciálegyenlet elsőrendű volt.

2.1.6. Diffúzió, hővezetés

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum (magasabb dimenzióban: összefüggő nyílt halmaz, vagyis **tartomány**, esetleg tartomány lezártja). Jelölje $\rho(t,x) \in \mathbb{R}^+$ valamely anyag tömegsűrűségét a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban, az $x \in \Omega$ pontban. Megmutatható, hogy alkalmas feltételek mellett erre a tömegsűrűségre a következő összefüggés áll fenn [**?**, 87. oldal] (lásd még alább a **??** pontot is):

$$\partial_0 \rho(t,x) = D\partial_1^2 \rho(t,x) \quad ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega). \tag{2.10}$$

Ebben a **diffúziós** egyenletben $D \in \mathbb{R}^+$ a diffúziós állandó. (Ha $\rho(t,x)$ a belső energia sűrűsége, akkor az egyenletet **hővezetési** egyenletnek, ha pedig $\rho(t,\cdot)$ valószínűségi sűrűségfüggvény, akkor **Fokker–Planck-féle** egyenletnek szokás hívni.) A deriváltakat nem első és második, hanem nulladik és első változó szerinti deriváltnak szokás nevezni, amikor jelen van kitüntetett, időként interpretált változó is. (Régebben – terjengősebb írásmódot használva – az egyenletet szokás volt $\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \rho(t,x)}{\partial x^2}$ alakban fölírni.)

Itt vektorváltozós valós értékű függvények parciális deriváltjai szerepelnek, ezért a kapott egyenlet (másodrendű) **parciális** differenciálegyenlet.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az egyenletek besorolását intuitív alapon végeztük; ahhoz, hogy ez matematikai eljárás legyen, pontosan definiálni kellett volna az egyes egyenlettípusokat. Ezt néhány esetre a későbbiekben meg is fogjuk tenni. Itt is hangsúlyozzuk azonban, hogy nem fogunk általános definíciót adni a differenciálegyenlet fogalmára. Nem tekinthetők matematikai definíciónak az ilyesféle mondatok: „A differenciálegyenlet valamely ismeretlen függvény és a deriváltjai között fennálló összefüggés.”

2.2. Elemi kvalitatív módszerek

Az alábbiakból ki fog derülni, hogy analízisbeli ismereteink fölhasználásával elég sokat megtudhatunk differenciálegyenletek megoldásairól.

2.2.1. A függvényvizsgálat módszereinek kiterjesztése

Először megmutatjuk, hogy a függvényvizsgálat módszerei jelentősen kiterjeszthetők.

Bevezetésként vázlatosan elvégezzük egy **explicit képlettel adott függvény** vizsgálatát. Legyen tehát $y(x) := 2(x-1)+e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$. Mivel a függvény az egész számegyenesen akárhányszor deriválható, könnyen kiszámíthatók lokális szélsőértékhelyei. Az $y'(x) = 2-e^{-x} = 0$ egyenletből egy gyököt kapunk, ez: $x_0 = -\ln(2)$, s mivel $y''(x_0) = 2 > 0$, ezért az x_0 pont lokális minimumhely. A második deriváltból, amely az x helyen e^{-x}, kitűnik, hogy a függvény mindenütt (alulról) konvex, inflexiós pontja nincs.

Képzeljünk most el egy olyan helyzetet, amelyben annyit tudunk az ismeretlen $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényről, hogy differenciálható, és

$$z'(x) = 2-e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Ha most figyelmesen végigolvassuk az előző bekezdést, kiderül, hogy érvelésünk továbbra is megállja a helyét, így a végkövetkeztetés is: a z függvény a $]-\infty, x_0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, az x_0 pontban minimuma van, az $[x_0, +\infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekedő. A függvény az egész értelmezési tartományán konvex. A leírt tulajdonságok azonban nem határozzák meg egyértelműen a z függvényt, ha ugyanis a z' függvényt (2.11) adja meg, akkor tetszőleges $C \in \mathbb{R}$ esetén ugyanez igaz a $(z+C)'$ függvényre is. Elemzésünk tehát – amely z **explicit módon megadott deriváltjából** indult ki – függvények egy (egymástól állandóban eltérő) seregére vonatkozik.

Tekintsünk egy olyan példát, ahol a **derivált implicit összefüggéssel** van megadva, sőt azt, mint az ismeretlen függvény értékének és független változójának függvényét ismerjük. Legyen tehát

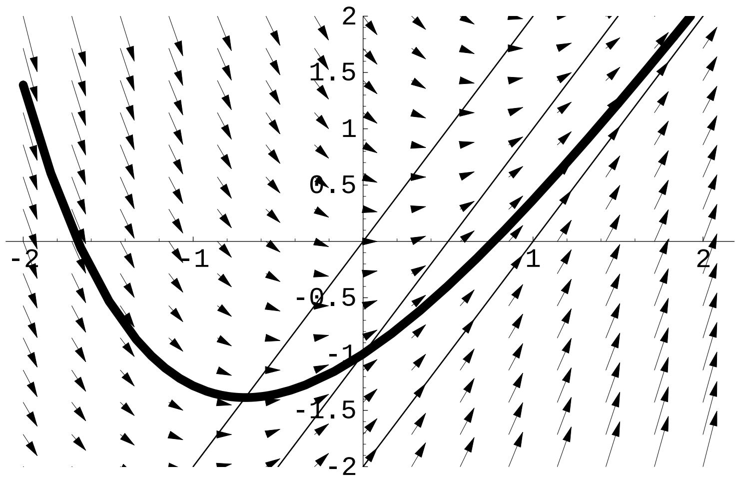
$$y'(x) = 2x - y(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.12}$$

A fenti összefüggésnek eleget tevő függvényekről több megállapítást is tehetünk.

- A függvények az $l_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x = y\}$ egyenest vízszintesen metszik.
- Az l_0 egyenes alatt a függvényeknek szigorúan monoton növekedő, fölötte pedig szigorúan monoton csökkenő szakasza halad.
- A függvények deriváltja az $l_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x - y = k\}$ egyenes pontjaiban pontosan $k(\in \mathbb{R})$.
- Mivel ezeknek a függvényeknek a második deriváltjára (2.12) miatt

  $$y''(x) = 2 - y'(x) = 2 - 2x + y(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

  teljesül, ezért az l_2 egyenes fölött a függvények (alulról) konvexek, alatta pedig (alulról) konkávak.
- Vegyük észre (verifikáljuk), hogy az l_2 függvényre értelmezési tartományának minden pontjában szintén fönnáll a (2.12) összefüggés.



2.1.. ábra. Iránymező, megoldás, irányvonalak

A fenti elemzés alapján készített vázlatos képet az ábra mutatja.

2.4. feladat. Hol lehetnek szélsőértékhelyei és inflexiós pontjai az

$$\text{(a) } y'(x) = \sin(x + y(x)) \text{ és a (b) } y'(x) = y(x) - x^2 + 2x - 2$$

differenciálegyenlet megoldásainak? (Megoldás: **??**. oldal.)

2.2.2. Iránymező

Érdemes még megismerkednünk egy geometriai jellegű fogalommal, amely segít majd az összefüggések szemléletes jelentésének felismerésében. Az alábbiakban szereplő (2.16) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ összefüggésből látható, hogy az Ω halmazon értelmezett f jobboldal-függvény a sík Ω tartományának minden egyes pontjában megadja, hogy mekkora az ismeretlen (keresett) függvény deriváltjának az értéke az adott pontban. Ha egyszerűen ábrázoljuk a háromdimenziós térben az f függvényt, arról még nem könnyű leolvasni a megoldások menetét. Ha viszont a sík Ω tartományának minden egyes (p,q) pontjához húzunk egy olyan „kicsiny” $s(p,q)$ szakaszt, amelynek a meredeksége éppen $f(p,q)$, akkor közelítőleg éppen azt ábrázoltuk, hogy hogyan halad a megoldás az adott ponton keresztül. Ebből esetenként meg is sejthető, hogy milyen függvények a differenciálegyenlet megoldásai. Ki fog derülni, hogy semmi bizonytalanság nem származik abból: a szakaszról mindössze annyit mondtunk, hogy kicsiny. A formális definícióban kicsiny szakasz helyett egy irányt rendelünk hozzá a jobb oldal értelmezési tartományának pontjaihoz. Azt is mondhatjuk, hogy az iránymező a jobb oldalnak, mint függvénynek másik elnevezése.

2.1. definíció. Iránymezőnek a $\{(p,q,f(p,q)) \in \mathbb{R}^3; (p,q) \in \Omega\}$ halmazt nevezzük.

A jobb oldal értelmezési tartományának azon pontjait, amelyekben a megoldás azonos irányban halad, érdemes egy-egy halmazba összefognunk.

2.2. definíció. Irányvonalnaknak (vagy izoklínának) nevezzük az

$$l_k := \{f(p,q) = k;\ (p,q) \in \Omega\}$$

halmazt $(k \in \mathcal{R}_f)$. Az l_0 halmaz neve: **nullavonal** vagy nullklína.

Első példaként tekintsük az előző ábrát, ahol két megoldás és néhány irányvonal mellett fölvázoltuk az iránymezőt is. Jól látható, hogy a megoldás miként illeszkedik az iránymező kis szakaszaihoz.

2.5. feladat. Rajzoljuk meg az

$$\text{(a) } y'(x) = \sin(x + y(x)) \text{ és a (b) } y'(x) = y(x) - x^2 + 2x - 2 \tag{2.13}$$

differenciálegyenlet iránymezőjét! (Megoldás: **??**. oldal.)

2.3. Amit már tudunk: elemi kvantitatív módszerek

2.3.1. Verifikálás

2.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda, L, m_0 \in \mathbb{R}^+$, akkor az

$$m(t) := \frac{L}{\frac{L-m_0}{m_0} e^{-L\lambda t} + 1} \quad (t \in \mathbb{R})$$

összefüggéssel definiált függvény megoldása a **logisztikus** vagy Verhulst[1]-féle (2.6) differenciálegyenletnek az $m(0) = m_0$ kezdeti feltétel mellett. (Megoldás: **??**. oldal.)

Ha hajlamosak lennénk a fenti egyszerű verifikálás lebecsülésére, ne tegyük. Az alkalmazások szempontjából ugyanis az a fontos, hogy mérési adatokhoz modelleket szerkesszünk, mert ezek rendszerezett, tömör, a fizika, kémia, biológia, stb. alapelveinek megfelelő formában tartalmazzák az adott jelenségre vonatkozó tudásunkat.

2.7. feladat. Gyakorlásként mutassuk meg, hogy a 2.1. táblázatban szereplő függvények alkalmas leszűkítései eleget tesznek a megadott differenciálegyenleteknek. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.3.2. Közvetlenül integrálható egyenletek

Legyen $J \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, f_1 pedig ezen az intervallumon folytonos, valós értékeket felvevő függvény. Legyen továbbá $\xi \in J, \eta \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Akkor az f_1 függvény a J intervallum minden korlátos részintervallumán Riemann-féle értelemben integrálható, így egy primitív függvénye (például a ξ pontban eltűnő) éppen a (ξ pontban eltűnő, sic!) integrálfüggvénye: $J \ni x \mapsto \int_\xi^x f_1 \in \mathbb{R}$. Az összes többi primitív függvényét ebből

[1] Verhulst, Pierre François (1804–1849): belga matematikus.

2.1.. táblázat. Megadott megoldások verifikálása

$x(f) := \arcsin(f)$ $(f \in [-1,1])$	$x'(f) = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$ $(f \in]-1,1[)$
$x(t) := 3e^{-2t}$ $(t \in \mathbb{R})$	$\dot{x}(t) = -2x(t)$ $(t \in \mathbb{R})$
$K \in \mathbb{R}$ tetszőleges $u(z) := Ke^{-z} + 2z - 2$ $(z \in \mathbb{R})$	$u'(z) = 2z - u(z)$ $(z \in \mathbb{R})$
$b \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges $u(t,x) := \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4Dt}}$ $((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$	$\partial_0 u(t,x) = D\partial_1^2 u(t,x)$ $((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

állandó hozzáadásával kapjuk, tehát az az integrálfüggvénye, amely a ξ pontban éppen η értéket vesz fel: $J \ni x \mapsto \eta + \int_\xi^x f_1 \in \mathbb{R}$. Így tehát például, ha azt a függvényt keressük, amelyik definiálva van az egész számegyenesen, deriváltfüggvénye a szinuszfüggvény, és értéke a 0 pontban 1, akkor a következőket követeljük meg az ismeretlen függvényre: $y'(x) = \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad y(0) = 1$. Innen adódik, hogy egyrészt szükségszerűen valamilyen C valós számmal $y(x) = C - \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$, másrészt erre a C számra teljesülnie kell, hogy $1 = y(0) = C - \cos(0) = C - 1$, vagyis $C = 2$, tehát a feltételeket kielégítő függvény csak ez lehet: $2 - \cos$, és ez valóban teljesíti is az összes feltételt.

Az integrálszámítás tanulmányozása közben szerzett fenti ismereteinket jelenlegi céljainknak megfelelően szeretnénk úgy fogalmazni, hogy az

$$y'(x) = f_1(x) \quad (x \in J) \quad y(\xi) = \eta \tag{2.14}$$

kezdetiérték-problémának létezik egyetlen megoldása, és ez $x \mapsto \eta + \int_\xi^x f_1$. Ehhez azonban meg kell adnunk a differenciálegyenlet, a megoldás és az egyértelműség definícióját. Ezt fogjuk megtenni a következőkben.

2.4. Definíciók, egzisztencia- és unicitási tételek

Mielőtt valóságos feladatunkhoz hozzákezdenénk, először arra emlékeztetünk, hogy mit is jelentenek az **algebrai egyenlet**ek. Példaként tekintsünk egy rögzített P_2 másodfokú polinomot. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetében értelmes a következő állítás: a P_2 polinom az x számnál a nulla értéket veszi fel, azaz tömörebben $P_2(x) = 0$, továbbá ez az állítás vagy igaz (legfeljebb két valós szám esetében), vagy pedig hamis. Megoldásnak azokat a valós számokat neveztük, amelyeknél az állítás igaz. Azt is mondhatjuk, hogy az x valós számhoz a $P_2(x) = 0$ állítás igazságértékét rendelő $x \mapsto \mathrm{Val}(P_2(x) = 0)$ függvény az egyenlet, a megoldások halmaza pedig az $\{\text{igaz}\}$ halmaz ősképe, ahol $\mathrm{Val}(A)$ az A állítás igazságértékét jelöli, ez tehát lehet igaz vagy hamis.

A **lineáris algebrai egyenletrendszer**eket is teljesen hasonlóan foghatjuk fel. Ezeknél adott az $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, az $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ valós komponensekből álló mátrix, a $b \in \mathbb{R}^N$ valós komponensekből álló vektor, és minden $x \in \mathbb{R}^N$ valós komponensekből álló vektor esetén az $Ax = b$ állítás vagy igaz, vagy hamis. Megoldásnak azokat a valós szám N-eseket nevezzük, amelyeknél az állítás igaz. Azt is mondhatjuk, hogy az x valós komponensekből álló vektorhoz az $Ax = b$ állítás igazságértékét rendelő $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \mathrm{Val}(Ax = b)$ függvény az egyenlet, a megoldások halmaza pedig az $\{\text{igaz}\}$ halmaz ősképe ennél a függvénynél.

Ezt a felépítést fogjuk követni az alábbiakban. Kiemeljük, hogy a megoldások és ahol ezeket egyáltalán kereshetjük (vagyis a fenti függvények értelmezési tartománya), jól definiált **szám**halmazok, illetve **vektor**okból álló halmazok voltak.

2.4.1. Explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet

Legyen $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tetszőleges összefüggő nyílt halmaz (**tartomány**), f pedig ezen a halmazon folytonos, $\mathbb{R}^N$-beli értékeket fölvevő függvény: $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Vezessük be a következő jelölést:

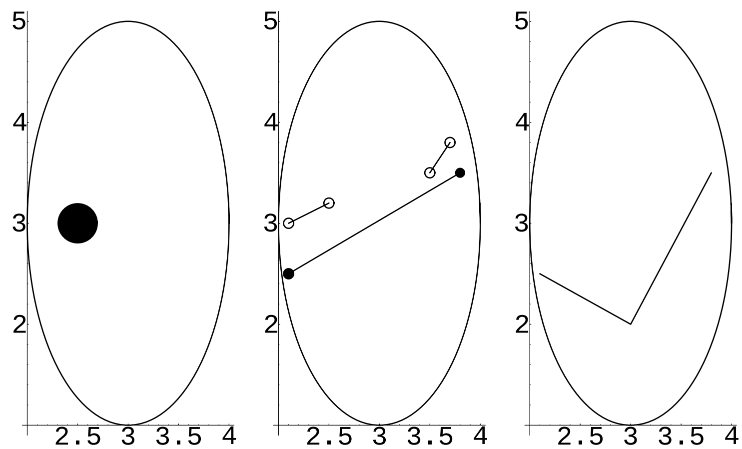
$$I_f := \{x \subset \Omega, x \text{ függvény, } \mathcal{D}_x \text{ nyílt intervallum, } x \text{ differenciálható}\}. \quad (2.15)$$

(Az $x \subset \Omega$ jelölés arra utal, hogy az x függvényt relációként fogjuk föl, ez tehát azt jelenti, hogy minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén $(t, x(t)) \in \Omega$.)

Könnyű mutatni Ω-nek olyan részhalmazát, amely vagy nem függvény, vagy nem nyílt intervallum az értelmezési tartománya, vagy nem differenciálható. Ilyenekre nem is fogjuk értelmezni az alábbiakban differenciálegyenletünket. Ilyenek láthatók a 2.2. ábrán az $N = 1$ esetben.

Legyen x az I_f halmaz tetszőleges eleme. Akkor minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén

- képezhető az $f(t, x(t))$ vektor, hiszen $(t, x(t)) \in \Omega$;



2.2.. ábra. Ellenpéldák

- a $t \mapsto f(t,x(t))$ hozzárendelés (az $f \circ (\mathrm{id},x)$ függvénypár) folytonos függvény.

Így tehát fölvethető az a kérdés, hogy vajon az x függvény deriváltfüggvénye megegyezik-e a fenti függvénnyel, vagyis teljesül-e minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t))? \tag{2.16}$$

A fentieket függvényekkel megfogalmazva ezt kapjuk: vajon az x függvényre fennáll-e az

$$\dot{x} = f \circ (\mathrm{id},x) \tag{2.17}$$

összefüggés? Ezek után a fent bevezetett jelöléseket megtartva megadhatjuk a formális definíciót.

2.3. definíció. f **jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet**nek nevezzük az

$$I_f \ni x \mapsto \mathrm{Val}(\dot{x} = f \circ (\mathrm{id},x)) \in \{\text{igaz, hamis}\} \tag{2.18}$$

hozzárendelést. **Megoldás**oknak I_f azon elemeit hívjuk, amelyekre a (2.18) leképezés igaz értéket vesz föl . Az f függvény a fenti (2.18) explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet **jobb oldal**a.

Gyakran használjuk az **általános megoldás** fogalmát is: ez olyan függvényhalmazt jelent, amelynek csak megoldások az elemei, és az adott egyenlet minden (adott függvényosztályba tartozó) megoldását tartalmazza.

A szó **hétköznapi** értelmében kézenfekvőnek tűnik, hogy miért nem explicit egyenlet a következő:

$$t^2 + (x(t))^2 + (\dot{x}(t))^2 = -1 \quad (t \in \mathcal{D}_x), \tag{2.19}$$

vagy az alábbi:

$$P(t, x(t)) + Q(t, x(t))\dot{x}(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{2.20}$$

Ha parciális deriváltak is szerepelnek, akkor az egyenlet nem nevezhető közönségesnek:

$$\partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathcal{D}_u). \tag{2.21}$$

Végül pedig nyilván nem hívhatjuk sem explicit, sem elsőrendű egyenletnek ezt:

$$t^2\ddot{x}(t) + 3t\dot{x}(t) - x(t) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{2.22}$$

Ahhoz viszont, hogy a (2.21) egyenletet implicit másodrendű parciális differenciálegyenletnek nevezhessük, be kellene vezetnünk az ilyenfajta egyenletek definícióját is. Ennek most biztosan nincs itt az ideje, viszont talán már érthető, miért nem lehet differenciálegyenletekről általában beszélni, miért csak nagyon pontosan meghatározott differenciálegyenlet-osztályokat szoktak definiálni.

Érdekes egyenlet például a következő is: $\dot{x} = x \circ x$. Az ismeretlen függvény benne szereplő legmagasabb rendű deriváltja elsőrendű, ez a derivált ki is van fejezve az ismeretlen függvénnyel, mégsem esik az általunk bevezetett definíció hatálya alá: definícióinkat nem lehet úgy specializálni, hogy ez az egyenlet explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet legyen.

2.8. feladat. Határozzuk meg (pontos értelmezés nélkül) az $(\dot{x})^4 = x \circ x$ „egyenlet” polinom alakú „megoldás”ait. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.4.2. Kezdetiérték-probléma avagy Cauchy-feladat

Már a legegyszerűbb esetben is láttuk, hogy valamely (2.18) alakú differenciálegyenletnek általában nem csak egyetlen megoldása van. Ha viszont megszabjuk (illetve a vizsgált feladat feltételei meghatározzák) a megoldás értékét egy adott pontban, akkor lehet reményünk arra, hogy pontosan egy megoldást kapjunk.

Legyen $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tetszőleges tartomány, f pedig ezen a halmazon folytonos, $\mathbb{R}^N$-beli értékeket fölvevő függvény:

$$f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^N);$$

$(\tau, \xi) \in \Omega$ pedig tetszőleges pont. Legyen továbbá I_f a (2.15) képlettel értelmezett halmaz. Akkor fölvethető az a kérdés, hogy valamely $x \in I_f$ függvényre igaz-e, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_x, \quad x(\tau) = \xi, \tag{2.23}$$

és teljesül-e minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))? \tag{2.24}$$

A fentieket függvényekkel megfogalmazva (és figyelembe véve, hogy az $x(\tau) = \xi$ egyenlőség annak a ténynek a másik megfogalmazása, hogy az x reláció tartalmazza a (τ, ξ) pontot, azaz $(\tau, \xi) \in x$) ezt kapjuk: vajon az x függvényre fennáll-e az

$$\dot{x} = f \circ (\mathrm{id}, x) \quad (\tau, \xi) \in x \tag{2.25}$$

összefüggés? Ezek után a fent bevezetett jelöléseket megtartva megadhatjuk a formális definíciót.

2.4. definíció. Az f **jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy**[2]**-feladat**nak (vagy **kezdetiérték-problémá**nak) nevezzük az

$$I_f \ni x \mapsto \mathrm{Val}(\dot{x} = f \circ (\mathrm{id}, x) \wedge (\tau, \xi) \in x) \in \{\text{igaz, hamis}\} \tag{2.26}$$

hozzárendelést. **Megoldás**oknak I_f azon elemeit hívjuk, amelyekre a (2.26) leképezés igaz értéket vesz föl. Ezek halmazát $\mathcal{M}_{f,\tau,\xi}$ jelöli.

[2] Cauchy, Augustin Louis (1789–1857): francia matematikus és fizikus. Az analízisbeli szigor megalapozója, a kompex függvénytan létrehozója, a differenciálegyenletek, az optika, a mechanika és a rugalmasságtan elméletének kutatója.

Nyilvánvaló, hogy a $2x^2+3x-5=0$ és a $2\lambda^2+3\lambda-5=0$ algebrai egyenlet teljesen azonos, hiszen csak az ismeretlen szám jelölésében különböznek egymástól, de az egyenletet meghatározó együtthatókban nem.

Hasonlóképpen nyilvánvalóan pontosan ugyanarról az egyenletről van akkor is szó, ha akár $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$, akár $t'(z) = f(z,t(z))$, akár $u' = f \circ (\mathrm{id},u)$, alakban írjuk föl, hiszen az egyenletet meghatározó f jobb oldalt nem változtattuk meg. Azt mondjuk továbbá, hogy a megfelelő differenciálegyenletnek, illetve kezdetiérték-problémának (2.16) és (2.23)–(2.24) a **lokális**, (2.17), illetve (2.25) a **globális** alakja.

2.4.3. Egy ellenpélda

A formális definíció birtokában visszatérhetünk az egyértelműség kérdésére. Ahhoz, hogy ezt a fogalmat is pontosan definiálhassuk, tekintsünk először egy példát.

2.1. példa. Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \quad x(\tau) = \xi \tag{2.27}$$

Cauchy-feladatot.

- A $\xi \in \mathbb{R}^+$ esetben legyen $\Omega_1 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ezen az összefüggő nyílt halmazon a jobb oldal így választható: $f(p,q) := \sqrt{q} \quad ((p,q) \in \Omega_1)$. Egyenletünk pedig a következőképpen rendezhető át: $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1$, figyelembe véve azt, hogy amivel osztottunk, az az Ω_1 halmazon nem tűnik el. Számítsuk ki mindkét oldal τ-ban eltűnő integrálfüggvényét a t helyen: $\int_\tau^t \frac{\dot{x}(s)}{\sqrt{x(s)}} \mathrm{d}s = t-\tau$. A bal oldal a helyettesítéses integrálás tétele szerint átalakítható: $\int_{x(\tau)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathrm{d}s = t-\tau$. Végül a Newton–Leibniz[3]-féle tétel alkalmazásával ezt kapjuk: $2\sqrt{x(t)} - 2\sqrt{x(\tau)} = t-\tau$, ahonnan

$$x(t) = \left(\sqrt{x(\tau)} + \frac{t-\tau}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\xi} + \frac{t-\tau}{2}\right)^2. \tag{2.28}$$

A levezetés minden lépése érvényes az összes olyan t pontban, amely a megoldás értelmezési tartományának eleme. A (2.28) összefüggésnek

[3] Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716): német filozófus és matematikus. Az analízis alapjainak lerakásában Newton (vetély)társa. A szimbolikus logika és a számítástechnika előfutára.

eleget tevő x függvény minden $t \in \mathbb{R}$ pontban értelmezve van, kérdés, benne marad-e az x függvény az Ω_1 tartományban. Nyilvánvalóan igen, ha $t > \tau$, viszont $t \leq \tau$ esetén csak akkor, ha $x(t) > 0$. Ez pedig mindaddig fennáll, amíg $\sqrt{\xi} + \frac{t-\tau}{2} > 0$, vagyis amíg $\tau - 2\sqrt{\xi} < t$. Megoldás tehát a

$$\left]\tau - 2\sqrt{\xi}, +\infty\right[\ni t \mapsto \left(\sqrt{\xi} + \frac{t-\tau}{2}\right)^2 \tag{2.29}$$

függvény, és ennek minden olyan intervallumra vett leszűkítése, amelynek értelmezési tartományában τ benne van.

- Ha $\xi \in \mathbb{R}^-$, akkor legyen $\Omega_2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$, ezen a halmazon a jobb oldal így választható: $f(p,q) := \sqrt{-q}$, $(p,q) \in \Omega_2$. A levezetés végeredménye most az, hogy az alsó félsíkon megoldás a

$$\left]-\infty, \tau + 2\sqrt{-\xi}\right[\ni t \mapsto -\left(\sqrt{-\xi} - \frac{t-\tau}{2}\right)^2 \tag{2.30}$$

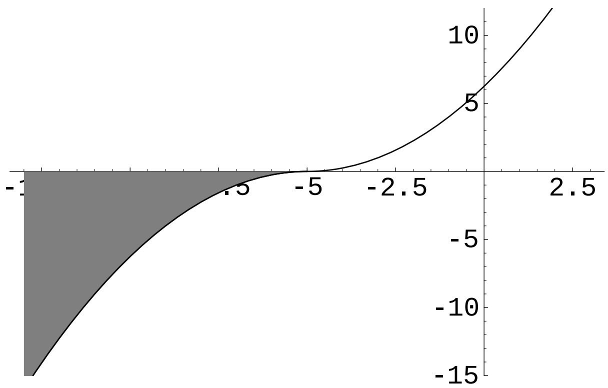
függvény, és ennek minden, intervallumra vett leszűkítése, amelynek értelmezési tartományában τ benne van.

- Ha pedig $\xi = 0$, és a jobb oldal értelmezési tartományát az egész síknak vesszük, akkor megállapíthatjuk, hogy a (2.27) feladatnak megoldása a nulla függvény, és ennek minden olyan intervallumra vett leszűkítése, amelynek értelmezési tartományában τ benne van.

  A jobb oldal ilyen értelmezési tartománya mellett viszont tetszőleges ξ esetén számos további megoldás is megadható: minden olyan függvény megfelel ugyanis, amelynek értelmezési tartományában τ benne van, és amely (legfeljebb) három részből tevődik össze: két félparabolából és az abszcissza egy szakaszából. Ahhoz, hogy belássuk, a (legföljebb) három részből összerakott függvény megoldás, be kell látnunk, hogy eleme az I_f függvényhalmaznak (tehát függvény, értelmezési tartománya nyílt intervallum, ő maga része a jobb oldal értelmezési tartományának, differenciálható), és hogy értelmezési tartományának minden pontjában fennáll a (2.27) összefüggés. Mindössze a t_1 és t_2 „érintkezési pontok”-ban vett differenciálhatóság az, aminek belátása nem teljesen triviális, de ezt az Olvasóra hagyjuk.

  Világos, hogy most (a szó köznapi értelmében) nem egyértelmű a megoldás.

2.9. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a fent definiált függvények folytonosan differenciálhatóak. (Megoldás: **??**. oldal.)



2.3.. ábra. Nem egyértelmű a megoldás

Az egyértelműség hiánya úgy ragadható meg, hogy ha egyesítjük az adott ponton átmenő összes megoldást, akkor a sík kapott részhalmaza nem függvény [**?**].

2.5. definíció. A (2.25) Cauchy-feladat megoldásáról azt mondjuk, hogy **globálisan egyértelmű**, ha a (τ, ξ) ponton átmenő megoldások (mint halmazok) egyesítése függvény. Ebben az esetben ezt a függvényt **teljes megoldás**nak nevezzük, értelmezési tartományát $I(\tau, \xi)$-vel, magát a függvényt pedig Φ-vel jelöljük: $I(\tau, \xi) \ni t \mapsto \Phi(t, \tau, \xi)$.

2.1. tétel. A teljes megoldás

1. megoldása a (2.25) Cauchy-feladatnak,
2. másrészt a (2.25) Cauchy-feladat összes megoldása ennek leszűkítéseként áll elő.

Bizonyítás.

1. A teljes megoldás nyilván része a jobb oldal értelmezési tartományának, mivel ilyen halmazok egyesítése. A (τ, ξ) ponton átmenő megoldások mindegyikének értelmezési tartománya olyan nyílt intervallum, amely

tartalmazza a τ pontot. Ilyen intervallumok egyesítése – jelölje ezt $I(\tau,\xi)$ – szintén τ-t tartalmazó nyílt intervallum. A teljes megoldás tehát τ-t tartalmazó nyílt intervallumon értelmezett függvény; így kiderült az is, hogy kielégíti a kezdeti feltételt. A teljes megoldás az $I(\tau,\xi)$ intervallum minden pontjának valamely környezetében megegyezik valamely megoldással, így differenciálható, és kielégíti a differenciálegyenletet ebben a környezetben, tehát mindenütt, ahol értelmezve van.

2. Ha φ megoldása a (2.25) Cauchy-feladatnak, akkor szerepel azon függvények között, amelyek (mint halmazok) egyesítéseként a teljes megoldás előáll. A teljes megoldást leszűkítve a $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartományra ezért éppen a φ függvénynek mint relációnak a pontjait kapjuk meg; mivel a teljes megoldás függvény, más pontot viszont nem kapunk.

■

2.1. megjegyzés. Alternatív megközelítéshez jutunk, ha bevezetjük a **maximális megoldás** fogalmát: ez olyan megoldás, amelynek nincs olyan kiterjesztése, amely megoldás lenne. Ez a fogalom akkor is használható, ha a megoldás nem egyértelmű. Ha a Cauchy-feladat megoldása globálisan egyértelmű, akkor teljes megoldás és a maximális megoldás egybeesik.

2.6. definíció. Az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű **differenciálegyenlet leszűkítése** az F jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletnek, ha $f \subset F$.

Nyilvánvaló, hogy egy explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet leszűkítésének megoldása egyben megoldása az eredeti egyenletnek is.

2.7. definíció. Az $\dot{x} = f \circ (\mathrm{id}, x) \quad x(\tau) = \xi$ Cauchy-feladat **leszűkítése** az $\dot{x} = F \circ (\mathrm{id}, x) \quad x(\tau) = \xi$ Cauchy-feladatnak, ha $f \subset F$, és $(\tau,\xi) \in \mathcal{D}_f$.

2.8. definíció. Ha egy Cauchy-feladatnak létezik globálisan egyértelműen megoldható leszűkítése, akkor **lokálisan egyértelmű**en oldható meg.

2.2. megjegyzés. A fenti definíció szemléletesen azt fejezi ki, hogy a τ pontot tartalmazó kellően rövid nyílt intervallumon csak egy megoldása van a kezdetiérték-problémának.

2.2. tétel. Ha az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma lokálisan egyértelműen oldható meg, akkor minden kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg.

Bizonyítás. Indirekt módon látjuk be az állítást. Tegyük föl, hogy a $(\bar{\tau},\bar{\xi}) \in \Omega$ ponton átmenő megoldás nem globálisan egyértelmű, azaz az ezen ponton átmenő megoldások egyesítése, amit jelöljön most Ψ, nem függvény. Akkor van olyan $\tau^* > \bar{\tau}$ pont (vagy $\tau^* < \bar{\tau}$ pont, de ez az eset ugyanúgy tárgyalható, mint az, amelyet részletezni fogunk), amelyre $\Psi(\tau^*)$ nem egyelemű. Az ilyen τ^* pontok infimuma legyen τ^{**}, erről azt tudjuk, hogy $\bar{\tau} \le \tau^{**} < \tau^*$, és $\Psi(\tau^{**})$ már egyelemű. Ha már most tekintjük a $(\tau^{**},\Psi(\tau^{**}))$ ponton átmenő megoldást, akkor az, kiinduló feltevésünkkel ellentétben nem lokálisan egyértelműen oldható meg. ■

Az alábbiakban ismertetendő egzisztenciatételhez és bizonyításához célszerű átfogalmazni a differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémát integrálegyenletté. Tekintsük a (2.25) kezdetiérték-problémát. Legyen

$$\overline{I}_f := \{x \subset \Omega, x \text{ függvény, } \mathcal{D}_x \text{ nyílt intervallum, } x \text{ folytonos}\}. \tag{2.31}$$

Legyen x az $\overline{I}_f$ halmaz tetszőleges eleme. Akkor minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén

- képezhető az $f(t,x(t))$ valós szám, hiszen $(t,x(t)) \in \Omega$;
- az $x \mapsto f(t,x(t))$ hozzárendelés (az $f \circ (\mathrm{id},x)$ függvény) folytonos, tehát minden korlátos intervallumon integrálható függvény.

Így tehát fölvethető az a kérdés, hogy vajon az x függvény megegyezik-e a fenti függvény τ pontban ξ értéket felvevő integrálfüggvényével, vagyis teljesül-e minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s,x(s))\mathrm{d}s? \tag{2.32}$$

A fentieket függvényekkel megfogalmazva ezt kapjuk: vajon az x függvényre fennáll-e, hogy $\tau \in \mathcal{D}_x$, és teljesül-e rá az

$$x = \xi + \int_\tau f \circ (\mathrm{id},x)? \tag{2.33}$$

összefüggés? Ezek után a fent bevezetett jelöléseket megtartva megadhatjuk a formális definíciót.

2.9. definíció. A

$$\overline{I}_f \ni x \mapsto \mathrm{Val}(\tau \in \mathcal{D}_x \wedge x = \xi + \int_\tau f \circ (\mathrm{id}, x)) \in \{\text{igaz, hamis}\} \qquad (2.34)$$

hozzárendelést a (2.25) kezdetiérték-problémának megfelelő **integrálegyenlet**nek nevezzük. **Megoldás**oknak $\overline{I}_f$ azon elemeit hívjuk, amelyekre a (2.34) leképezés igaz értéket vesz föl. Ezek halmazát $\overline{\mathcal{M}}_{f,\tau,\xi}$ jelöli.

2.3. tétel. A (2.25) kezdetiérték-probléma és a neki megfelelő (2.33) integrálegyenlet megoldáshalmazai azonosak.

Bizonyítás. Legyen φ megoldása a (2.25) kezdetiérték-problémának. Akkor nyilván $\varphi \in \overline{I}_f$ és a $[\tau, t]$ intervallumon integrálva a differenciálegyenletet éppen a (2.32) egyenletet kapjuk, ezért $\varphi \in \overline{\mathcal{M}}_{f,\tau,\xi}$. Másrészt, ha $\psi \in \overline{\mathcal{M}}_{f,\tau,\xi}$, akkor a (2.32) jobb oldalán álló kifejezés deriválható t szerint, így az x függvény is deriválható, azaz $\psi \in I_f$, és deriválva a (2.32) egyenletet a (2.25) probléma differenciálegyenletét kapjuk. A kezdeti feltételt pedig a $t = \tau$ helyettesítés adja. Tehát ψ valóban megoldása a (2.25) kezdetiérték-problémának. ∎

A megoldás létezésének igazolásához szükségünk lesz az alábbiakban néhány fogalomra és állításra.

2.10. definíció. A $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sorozat **indexsorozat**, ha szigorúan monoton növekedő.

2.11. definíció. Legyen $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, $\Delta \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt intervallum. A $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)^\Delta$ függvénysorozatot **egyenlő mértékben egyenletesen folytonos**nak nevezzük, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $||\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)|| < \varepsilon$, valahányszor $t_1, t_2 \in \Delta$ és $|t_1 - t_2| < \delta$.

2.1. lemma. (Arzelà–Ascoli) [4] [5] Ha $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow (\mathbb{R}^N)^\Delta$ a $\Delta \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt intervallumon értelmezett egyenlő mértékben egyenletesen folytonos és korlátos függvénysorozat, akkor létezik egyenletesen konvergens részsorozata, azaz létezik olyan ν indexsorozat, hogy $\varphi \circ \nu$ egyenletesen konvergens.

[4] Arzelà, Cesare (1847–1912): olasz matematikus, valós függvénytannal foglalkozott.

[5] Ascoli, Giulio (1843–1896): olasz matematikus, szakterülete a topológia és az analízis volt.

Bizonyítás. Lásd [**?**, 107–108. oldal] ■

2.10. feladat. Mutassuk meg, hogy az Arzelà–Ascoli-lemma minden feltétele lényeges, azaz az intervallum korlátossága, a zártsága, illetve a sorozat egyenlő mértékben való egyenletes folytonossága és a korlátossága közül bármelyiket elhagyva a lemma állítása nem teljesül. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.4. tétel. (A Cauchy–Peano-féle egzisztenciatétel) [6] Folytonos jobboldalú explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-problémának létezik megoldása.

Bizonyítás. Az állításra két bizonyítást adunk.

1. Az első bizonyítás Tonellitól[7] származik. Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $H := [\tau - a, \tau + a] \times \overline{\mathcal{K}_\xi(b)} \subset \Omega$, és legyen $M := \max f|_H$. Legyen $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$ pozitív szám. Megmutatjuk, hogy a kezdetiérték-problémának létezik megoldása a $]\tau - \alpha, \tau + \alpha[$ intervallumon. Egyszerűség kedvéért csak a $t \geq \tau$ résszel foglalkozunk, a másik oldal hasonlóan kezelhető. Legyen
$$x_n(t) := \begin{cases} \xi, & \text{ha} \quad t \in [\tau, \tau + \frac{\alpha}{n}] \\ \xi + \int_\tau^{t - \frac{\alpha}{n}} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s, & \text{ha} \quad t \in [\tau + \frac{\alpha}{n}, \tau + \alpha]. \end{cases}$$
Gondoljuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmes-e x_n definíciója! A definíció második részéhez először szükségünk van $x_n|_{]\tau, \tau + \frac{\alpha}{n}[}$ ismeretére, ezt a definíció első része megadja, ezután az x_n függvényt a definíció második része az egymást követő α/n hosszúságú szakaszokon konszekutíve meghatározza. Másrészt kell, hogy képezni tudjuk az $f(s, x_n(s))$ alakú kifejezéseket, ez pedig azért lehetséges, mert
$$|x_n(s) - \xi| \leq \alpha M \leq b,$$
tehát $x_n(s) \in \mathcal{K}_\xi(b)$. Az (x_n) függvénysorozat értelmezési tartománya a $[\tau, \tau + \alpha]$ korlátos, zárt intervallum, továbbá a sorozat korlátos, hiszen

[6] Peano, Giuseppe (1858–1932): olasz matematikus. Az analízis alapjaival, a matematika logikai megalapozásával foglalkozott. A természetes számokra bevezetett axiómarendszerét általánosan használják. A Volapük Akadémia elnöke és a **latino sine flexione** nyelv megalkotója volt.

[7] Tonelli, Leonida (1885–1946): olasz matematikus.

$|x_n(s)| \le |\xi| + M\alpha$, ha $s \in [\tau, \tau+\alpha]$. A sorozat egyenlő mértékben folytonos is, ugyanis $|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = \left|\int_{t_1-\frac{\alpha}{n}}^{t_2-\frac{\alpha}{n}} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s\right| \le M|t_1 - t_2|$, ha $t_1, t_2 \in [\tau, \tau+\alpha]$. Mivel teljesül az Arzelá–Ascoli-lemma összes feltétele, ezért létezik a sorozatnak egyenletesen konvergens $z := x \circ \nu$ részsorozata. Jelölje ennek határfüggvényét φ. Akkor

$$\begin{aligned} z_n(t) &= \xi + \int_\tau^t f(s, z_n(s))\mathrm{d}s - \int_{t-\frac{\alpha}{n}}^t f(s, z_n(s))\mathrm{d}s && (2.35)\\ &\to \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\mathrm{d}s + 0 = \varphi(t), \text{ ha } n \to +\infty, && (2.36) \end{aligned}$$

ugyanis egyrészt f folytonos, másrészt $|\int_{t-\frac{\alpha}{n}}^t f(s, z_n(s))\mathrm{d}s| < M\frac{\alpha}{n}$.

2. A második bizonyítás Euler[8] ötletén alapul. Osszuk föl a $[\tau, \tau+\alpha]$ intervallumot $N \in \mathbb{N}$ egyenlő részre a $\tau + \frac{\alpha k}{N} \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$ osztópontokkal. Legyen

$$\bar{x}_1 := \xi, \quad \bar{x}_{k+1} := \bar{x}_k + \frac{\alpha}{N} f(\tau + \frac{\alpha k}{N}, \bar{x}_k) \quad (k = 1, \ldots, N-1). \qquad (2.37)$$

Összekötve a

$$(\tau + \frac{k\alpha}{N}, \bar{x}_{k+1}) \text{ és a } (\tau + \frac{(k+1)\alpha}{N}, \bar{x}_{k+2}) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \qquad (2.38)$$

pontokat szakaszokkal, az úgynevezett **Euler-féle töröttvonal**at kapjuk. Ezek a töröttvonalak korlátos, zárt intervallumon értelmezett, egyenlő mértékben egyenletesen folytonos korlátos függvénysorozatot alkotnak, így kiválasztható belőlük egyenletesen konvergens részsorozat. Belátható, hogy ennek határfüggvénye megoldása a kezdetiérték-problémának.

■

2.3. megjegyzés. Az Euler-féle töröttvonalak az úgynevezett **ε-közelítő megoldás**ok egy speciális, fontos típusát adják. Ez utóbbiakon olyan nyílt intervallumon értelmezett, folytonos, szakaszonként differenciálható függvényeket értenek, melyekre teljesül $|\dot{x}(t) - f(t, x(t))| < \varepsilon$ minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén.

Az Euler-féle töröttvonalak konstrukciója a differenciálegyenletek megoldására szolgáló legegyszerűbb numerikus módszer alapja.

[8] Euler, Leonhard (1707–1783): svájci matematikus és elméleti fizikus. Az analízis, a geometria, a számelmélet, a mechanika számos fejezetét gazdagította alapvető eredményeivel.

Az alábbiakban létezést és egyértelműséget egyszerre szeretnénk majd kimondani és bizonyítani. Ehhez teszünk most előkészületeket. (A következő szakaszban, a Peano-egyenlőtlenség következményeként pedig fogunk idézni olyan tételt, amely csak az egyértelműséget adja.)

2.12. definíció. Legyen X tetszőleges nem üres halmaz. Ha adott egy $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény az alábbi tulajdonságokkal: minden $x,y,z \in X$ esetén

1. $d(x,y) \geq 0$,
2. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (háromszög-egyenlőtlenség),

akkor azt mondjuk, hogy X **metrikus tér** a d **metriká**val vagy **távolság**gal.

2.13. definíció. Ha X olyan metrikus tér a d távolsággal, amelyben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az X tér **teljes** a d távolságra nézve. (Emlékeztetünk arra, hogy egy (x_n) sorozatot akkor nevezünk Cauchy-sorozatnak, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n, m > N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.)

2.14. definíció. Legyen X metrikus tér a d távolsággal. Ha a $T : X \longrightarrow X$ leképezéshez létezik olyan $q \in [0,1[$ szám, amellyel minden $x,y \in X$ esetén

$$d(T(x), T(y)) < qd(x,y) \tag{2.39}$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a T leképezés **kontrakció** (**összehúzás** vagy **zsugorítás**).

2.11. feladat. Mutassuk meg, hogy a $[0,1]$ téren a $d(x,y) := |x-y| \quad (x,y \in [0,1])$ metrikát véve, a koszinuszfüggvény kontrakció, a négyzetgyökfüggvény pedig nem az. Igazoljuk, hogy az $[1,+\infty[$ téren viszont ugyanezzel a metrikával a négyzetgyökfüggvény kontrakció. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.5. tétel. (Banach–Cacciopoli–Tyihonov-féle fixponttétel) [9] [10] [11] Ha X teljes metrikus tér a d távolsággal, és $T : X \longrightarrow X$ kontrakció, akkor létezik egyetlen olyan (**fix pont**nak nevezett) $x^* \in X$ pont, amelyre $T(x^*) = x^*$ teljesül. Ez az x^* pont tetszőleges $x_0 \in X$ pontból kiindulva megkapható, mint az $x_n := T(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$ sorozat határértéke.

2.12. feladat. Bizonyítsuk be a fenti állítást a megadott konstrukció felhasználásával. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.13. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, és deriváltja sehol nem veszi föl az 1 értéket, akkor az f függvénynek legfeljebb egy fix pontja van. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.14. feladat. Mutassuk meg, hogy az $f(t) := t + (1 + \mathrm{e}^t)^{-1} \quad (t \in \mathbb{R})$ képlettel értelmezett függvénynek nincs fix pontja, bár deriváltja mindenütt pozitív, és kisebb, mint 1. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.15. definíció.

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tartomány, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \xi \in \Omega$. Azt mondjuk, hogy az f függvény a ξ pontban **kielégíti a lokális Lipschitz**[12]**-féle feltétel**t, ha a ξ pontnak létezik olyan $\mathcal{K}(\xi)$ környezete, továbbá olyan $L_\xi \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x^*, x^{**} \in \mathcal{K}(\xi)$ esetén $||f(x^*) - f(x^{**})|| \leq L_\xi ||x^* - x^{**}||$. Ha az egyenlőtlenség minden $x^*, x^{**} \in \Omega$ esetén fennáll valamilyen $L \in \mathbb{R}^+$ számmal, akkor azt mondjuk, hogy f **egységes Lipschitz-féle feltétel**nek tesz eleget.
2. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tartomány, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (\tau, \xi) \in \Omega$. Azt mondjuk, hogy az f függvény a (τ, ξ) pontban **második változójában kielégíti a lokális Lipschitz-féle feltétel**t, ha a (τ, ξ) pontnak létezik olyan $\mathcal{K}(\tau, \xi)$ környezete, továbbá olyan $L_{(\tau,\xi)} \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $(t, x^*), (t, x^{**}) \in$

[9] Banach, Stefan (1892–1945): lengyel matematikus, a funkcionálanalízis egyik megalapítója.

[10] Cacciopoli, Renato (1904–1959): olasz matematikus, a funkcionálanalízis és a differenciálegyenletek kutatója; Bakunyin, Mihail unokája.

[11] Tyihonov, Andrej Nyikolajevics (1906–1993): orosz matematikus. A halmazelméleti topológia, valamint a közönséges és a parabolikus parciális differenciálegyenletek területén végzett kutatásai jelentősek.

[12] Lipschitz, Rudolph (1832–1903): német matematikus.

$K(\tau,\xi)$ esetén $||f(t,x^*)-f(t,x^{**})|| \leq L_{(\tau,\xi)}||x^*-x^{**}||$. Ha az egyenlőtlenség minden $(t,x^*),(t,x^{**})\in\Omega$ esetén fennáll valamilyen $L\in\mathbb{R}^+$ számmal, akkor azt mondjuk, hogy f második változójában **egységes Lipschitz-féle feltétel**nek tesz eleget.

Az alábbi feladatokban legyen $N\in\mathbb{N},\Omega\subset\mathbb{R}^{N+1}$ tartomány, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^N$.

2.15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy függvénysorozat tagjai közös Lipschitz-állandóval teljesítik az egységes Lipschitz-féle feltételt, akkor a függvénysorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.16. feladat. Mutassuk meg, hogy ha f első változójában folytonos, második változójában pedig kielégíti az egységes Lipschitz-féle feltételt, akkor folytonos. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.17. feladat. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ni(x,y)\mapsto\sin(x)|y|$ függvény második változójában kielégíti az egységes Lipschitz-féle feltételt. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.18. feladat. Mutassuk meg, hogy ha f második változója szerinti deriváltja létezik és lokálisan korlátos, akkor f második változójában teljesíti a lokális Lipschitz-féle feltételt. (Megoldás: **??**. oldal.)

2.6. tétel. (Picard–Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitástétel) [13] [14] Ha az f függvény a (τ,ξ) pontban a második változójában teljesíti a lokális Lipschitz-féle feltételt, akkor a (2.25) kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az lokálisan egyértelmű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a,b\in\mathbb{R}^+$ olyan, hogy $H:=[\tau-a,\tau+a]\times\overline{\mathcal{K}_\xi(b)}\subset\Omega$, és az f függvény a második változójában teljesíti a H halmazon az egységes Lipschitz-féle feltételt az $L\in\mathbb{R}^+$ konstanssal. Ezenkívül legyen $M:=\max f|_H$. Legyen $\alpha<\min\{a,\frac{b}{M},\frac{1}{L}\}$ pozitív szám. Megmutatjuk, hogy

[13] Picard, Charles Émile (1856–1941): francia matematikus, valós és komplex függvénytannal és differenciálegyenletekkel foglalkozott.

[14] Lindelöf, Ernst Leonard (1870–1946): finn matematikus, komplex függvénytannal és differenciálegyenletekkel foglalkozott.

a kezdetiérték-problémának létezik egyetlen megoldása a $]\tau-\alpha,\tau+\alpha[$ intervallumon. (Gondoljuk meg, hogy ebből a lokális egyértelműség következik.) A 2.3. tétel szerint elegendő megmutatni, hogy a (2.32) integrálegyenletnek létezik egyetlen folytonos megoldása a $[\tau-\alpha,\tau+\alpha]$ intervallumon. A bizonyítás alapgondolata az, hogy tekintsük úgy ezt megoldást, mint a $\mathcal{C}([\tau-\alpha,\tau+\alpha],\mathbb{R}^N)$ tér azon elemét, amely a (2.32) egyenlet jobb oldalán álló kifejezéssel definiált operátor fixpontja. Ezért azt kell megmutatni, hogy ez az operátor megfelelő értelmezési tartomány választásával kontrakció, így a létezés és az egyértelműség is következni fog a 2.5. fixponttételből.

Legyen tehát

$$X := \{x \in \mathcal{C}([\tau-\alpha,\tau+\alpha],\mathbb{R}^N) : x(\tau)=\xi,\ \|x-\xi(\cdot)\| \le b\},$$

ahol $\xi(\cdot)$ a ξ értékű konstans függvényt jelöli,

$$\|z\| := \max\{|z(t)| : t \in [\tau-\alpha,\tau+\alpha]\}$$

pedig a $\mathcal{C}([\tau-\alpha,\tau+\alpha],\mathbb{R}^N)$ függvénytérben szokásosan bevezetett, úgynevezett maximumnorma. Ennek segítségével definiálható az X térben a $d(x_1,x_2) := \|x_1-x_2\|$ távolság, mellyel X teljes metrikus tér. Ennek igazolása az analízis tárgykörébe tartozik, ezért itt ezzel nem foglalkozunk. Az

$$x \mapsto T(x) := \xi + \int_\tau f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

képlettel definiált függvény nyilvánvalóan értelmezhető minden $x \in X$ esetén. (Gondoljuk meg, hogy $T(x)$ maga is olyan függvény, amely a $[\tau-\alpha,\tau+\alpha]$ intervallumon van értelmezve.) A 2.5. fixponttétel alkalmazásához azt kell megmutatni, hogy T értékkészlete is az X térben van, továbbá, hogy T kontrakció. Az előbbi következik a

$$\|T(x)-\xi(\cdot)\| \le \max\{|\int_\tau^t f(s,x(s))\mathrm{d}s| : t \in [\tau-\alpha,\tau+\alpha]\} \le M\alpha \le b$$

becslésből (mivel $\alpha < b/M$), az utóbbi pedig a

$$\begin{aligned}\|T(x_1)-T(x_2)\| &\le \max\{\int_\tau^t |f(s,x_1(s))-f(s,x_2(s))|\mathrm{d}s; t \in [\tau-\alpha,\tau+\alpha]\}\\ &\le L\alpha\|x_1-x_2\| \qquad (2.40)\end{aligned}$$

becslésből, mivel $L\alpha < 1$. Tehát a 2.5. fixponttétel szerint a T függvénynek létezik pontosan egy fix pontja az X térben, azaz a (2.32) integrálegyenletnek létezik egyetlen folytonos megoldása a $[\tau-\alpha, \tau+\alpha]$ intervallumon, amit igazolni akartunk. ■

2.4. megjegyzés. A tételből a 2.2. tételt felhasználva azonnal következik, hogy a tett feltételek mellett minden kezdetiérték-problémának létezik egyetlen teljes megoldása. (Emlékeztetünk arra, hogy a (τ, ξ) ponton áthaladó teljes megoldást $t \mapsto \Phi(t, \tau, \xi)$ jelöli.)

2.2. példa. A (2.19) egyenlet példája mutatja, hogy implicit egyenletek esetében sokkal óvatosabbnak kell lennünk, ezt az egyenletet ugyanis olyan függvény definiálja, amely akárhányszor differenciálható, mégsincs megoldása. A parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos nehézségek egyik forrása is az, hogy azok igen gyakran implicit egyenletek.

A szakasz hátralevő részében a teljes megoldások egy fontos tulajdonságát mutatjuk meg.

2.16. definíció. A (2.25) kezdetiérték-probléma $\varphi \in \mathcal{M}_{f,\tau,\xi}$ megoldásáról azt mondjuk, hogy **határtól határig terjed**, ha minden $Q \subset \mathcal{D}_f$ kompakt (itt: korlátos és zárt) halmazhoz létezik olyan $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{D}_\varphi, \tau_1 < \tau < \tau_2$, amellyel

$$(\tau_1, \varphi(\tau_1)), (\tau_2, \varphi(\tau_2)) \notin Q.$$

2.7. tétel. Ha minden kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható, akkor minden teljes megoldás határtól határig terjed.

Bizonyítás. Legyen $(\tau, \xi) \in \Omega$, $x := \Phi(\cdot, \tau, \xi)$ a rajta áthaladó teljes megoldás, $I(\tau, \xi)$ ennek értelmezési tartománya, és legyen $Q \subset \mathcal{D}_f$ kompakt halmaz. Megmutatjuk, hogy létezik $\tau_2 > \tau$, melyre $(\tau_2, x(\tau_2)) \notin Q$. (A megfelelő τ_1 szám létezése hasonlóan igazolható.) Indirekt módon tegyük fel, hogy $(t, x(t)) \in Q$ minden $t \in [\tau, \beta]$ esetén, ahol $\beta := \sup I(\tau, \xi)$ nyilván véges. Az integrálegyenletet felhasználva

$$|(\xi + \int_\tau^{t_1} f(s, x(s))\mathrm{d}s) - (\xi + \int_\tau^{t_2} f(s, x(s))\mathrm{d}s)|$$

$$= |x(t_1) - x(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))|\mathrm{d}s \leq M|t_1 - t_2|,$$

ahol $M = \max\{|f(t,p)| : (t,p) \in Q\}$. Tehát az x függvény egyenletesen folytonos a $[\tau, \beta[$ intervallumon. Így folytonosan kiterjeszthető az intervallum β végpontjára, legyen $\eta := \lim_{t\to\beta^-} x(t)$. Ekkor viszont Q zártsága miatt $(\beta,\eta) \in Q \subset \mathcal{D}_f$, ezért a (β,η) ponthoz tartozó kezdetiérték-problémának is létezik megoldása. Egyszerűen igazolható, hogy ez az x megoldás egy kiterjesztését adja, ami ellentmond a megoldás teljességének. Ezzel a kívánt tulajdonságú τ_2 szám létezését igazoltuk. ■

2.5. megjegyzés. Végül megjegyezzük, hogy [**?**] tartalmaz mérhető és analitikus jobboldalú egyenletekre vonatkozó eredményeket; továbbá csak külön az egyértelműségre vonatkozó elégséges feltételeket; [**?**, Ch. II., Sec. 5] pedig mutat olyan folytonos jobb oldalt, amelynél minden kezdeti ponton át legalább két olyan megoldás halad, amelyek semmilyen leszűkítése nem egyezik meg egymással.

2.5. A Peano-féle egyenlőtlenség

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy a különböző eredetű pontatlanságok, hibák vagy perturbációk hogyan befolyásolják a megoldások menetét. Melléktermékként hozzájutunk egy egyértelműségi tételhez is.

2.5.1. Gronwall és Bihari lemmája

Előkészítésként kimondunk három, önmagában is hasznos és érdekes állítást, a Gronwall[15]-lemma gyenge és erős változatát, és a Bihari-lemmát. A Gronwall-lemma gyenge változata természetesen következik az általánosból, de érdemes külön is megfogalmazni, mert sok esetben elegendő ezt alkalmazni, és az általános eset bizonyításának alapgondolata is egyszerűbben látszik a gyenge változat esetében.

2.2. lemma. (A Gronwall-lemma gyenge változata) Legyen $\tau, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\tau < \vartheta$, $r \in \mathcal{C}^1([\tau,\vartheta])$ olyan függvény, melyre $\dot{r} \le Kr$ valamilyen $K \in \mathbb{R}$ konstanssal. Ekkor minden $t \in [\tau,\vartheta]$ esetén $r(t) \le r(\tau)\mathrm{e}^{K(t-\tau)}$.

Bizonyítás. Szorozzuk be a feltételt a $t \mapsto \mathrm{e}^{-Kt}$ függvénnyel. Ekkor a

$$(t \mapsto \mathrm{e}^{-Kt} r(t))' \le 0$$

[15] Eredetileg: Grönwall, Hakon; később: Gronwall, T. H. (1877–1932): svéd-amerikai matematikus.

egyenlőtlenséget kapjuk. Tehát a zárójelbeli függvény monoton fogyó, azaz minden $t \in [\tau, \vartheta]$ esetén $\mathrm{e}^{-Kt} r(t) \leq \mathrm{e}^{-K\tau} r(\tau)$, ami a kívánt állítást adja. ■

2.3. lemma. (Gronwall) Legyen $\tau, \vartheta \in \mathbb{R}, \tau < \vartheta$, továbbá legyen $c \in \mathcal{C}^1([\tau, \vartheta[)$, $b \in \mathcal{C}([\tau, \vartheta[)$ nemnegatív értékű függvény. Ha az $r \in \mathcal{C}([\tau, \vartheta[)$ függvény minden $t \in [\tau, \vartheta]$ esetén kielégíti az

$$r(t) \leq c(t) + \int_\tau^t b(s) r(s) \mathrm{d}s \tag{2.41}$$

egyenlőtlenséget, akkor

$$r(t) \leq c(\tau)\mathrm{e}^{\int_\tau^t b} + \int_\tau^t \dot{c}(s)\mathrm{e}^{\int_s^t b}\mathrm{d}s = c(t) + \int_\tau^t b(s)c(s)\mathrm{e}^{\int_s^t b}\mathrm{d}s \qquad (t \in [\tau, \vartheta]). \tag{2.42}$$

Bizonyítás. Legyen $g(t) := c(t) + \int_\tau^t b(s) r(s) \mathrm{d}s$, ekkor a feltétel nyilván azt jelenti, hogy $r(t) \leq g(t)$, és $\dot{g}(t) = \dot{c}(t) + b(t)r(t) \leq \dot{c}(t) + b(t)g(t)$, minden $t \in [\tau, \vartheta]$ esetén. A g függvényre vonatkozó fenti differenciálegyenlőtlenségre a gyenge változat bizonyításánál használt módszert alkalmazhatjuk. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget a $t \mapsto \mathrm{e}^{-\int_\tau^t b}$ függvénnyel. Ekkor a

$$(t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-\int_\tau^t b})'(t) \leq \dot{c}(t)\mathrm{e}^{-\int_\tau^t b}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Integráljuk ezt a $[\tau, t]$ intervallumon, majd szorozzuk be a kapott egyenlőtlenséget $\mathrm{e}^{\int_\tau^t b}$-vel. Felhasználva, hogy $g(\tau) = c(\tau)$, illetve $r(t) \leq g(t) \quad (t \in [\tau, \vartheta])$ éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. ■

Érdemes felírni a Gronwall-lemma állítását a $c(t) = \alpha + \beta(t - \tau)$, $b(t) = L$ speciális esetben, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^+$ konstansok, ugyanis a Peano-egyenlőtlenség bizonyításában erre lesz szükségünk. Ebben a speciális esetben a (2.42) jobb oldalán álló integrálok kiszámíthatók, és a következő állításhoz jutunk.

2.1. következmény. Legyen $\tau, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\tau < \vartheta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^+$. Ha az $r \in \mathcal{C}([\tau, \vartheta])$ függvény minden $t \in [\tau, \vartheta]$ esetén kielégíti az

$$r(t) \leq \alpha + \beta(t - \tau) + L \int_\tau^t r(s) \mathrm{d}s$$

egyenlőtlenséget, akkor

$$r(t) \leq \alpha e^{L(t-\tau)} + \frac{\beta}{L}(e^{L(t-\tau)} - 1) \qquad (t \in [\tau, \vartheta]). \tag{2.43}$$

2.6. megjegyzés. Megmutatható, hogy a Gronwall-lemma állítása akkor is igaz, ha a feltétel valamilyen véges $A \subset [\tau, \vartheta]$ halmaz mellett csak $t \in [\tau, \vartheta] \setminus A$ esetén áll fenn. A Gronwall-lemma általánosításának tekinthető Bihari Imrétől származó lemmát már ezzel a csekély módosítással fogalmazzuk meg.

2.4. lemma. (Bihari) Legyen $c, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+; \tau, \vartheta \in \mathbb{R}; \tau < \vartheta; L \in \mathcal{C}([\tau, \vartheta[)$ és tegyük fel, hogy a $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ monoton nemcsökkenő függvénnyel az $r \in \mathcal{C}([\tau, \vartheta[, \mathbb{R}_0^+)$ nem azonosan nulla függvény valamilyen véges $A \subset [\tau, \vartheta[$ halmaz mellett minden $t \in J^+ := [\tau, \vartheta[\setminus A$ esetén kielégíti az

$$r(t) \leq c + \int_\tau^t L\Phi \circ r \tag{2.44}$$

egyenlőtlenséget. Ekkor, ha az $F(u) := \int_\tau^u \frac{1}{\Phi} \quad (u \in \mathbb{R}_0^+)$ összefüggéssel definiált F függvénnyel $F(+0) < \int_\tau^t L < F(+\infty)$ teljesül, akkor fennáll, hogy

$$r(t) \leq F^{-1}\left(\int_\tau^t L\right) \qquad (t \in J^+). \tag{2.45}$$

2.19. feladat. Bizonyítsuk be a Bihari-lemmát. (Megoldás: **??**. oldal.)

Hasonló típusú állítások egész sorozata található a [**?**] könyvben.

2.5.2. Mérési és modellhibák hatása a megoldásokra

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogy a kezdeti feltétel, illetve a jobb oldal megadásánál fellépő pontatlanságok hogyan befolyásolják a megoldást. Be fogjuk bizonyítani, hogy kis pontatlanságok a megoldásban is kis eltérést eredményeznek, ami nyilvánvalóan alapvető fontosságú a differenciálegyenletekkel való modellezés szempontjából. Ezeket az állításokat a matematikában úgy szokták megfogalmazni, hogy a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől és a jobb oldaltól.

2.8. tétel. (Peano) Legyen $N \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ tartomány, az $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ függvényekről pedig tegyük fel, hogy második változójukban teljesítik az egységes Lipschitz-féle feltételt az $L \in \mathbb{R}^+$ állandóval, valamint legyen $\delta \in \mathbb{R}_0^+$ olyan szám, melyre $|f_1(t,p) - f_2(t,p)| \leq \delta$ minden $(t,p) \in \Omega$ esetén. Legyen $(\tau,\xi_i) \in \Omega$, $i = 1,2$. Jelölje az $\dot{x}_i = f_i \circ (\mathrm{id}, x_i)$, $x_i(\tau) = \xi_i$ kezdetiérték-probléma megoldását $t \mapsto \Phi_i(t,\tau,\xi_i)$, ennek értelmezési tartományát $I_i(\tau,\xi_i)$, $i = 1,2$ esetén. Tegyük fel, hogy a $\emptyset \neq J \subset \mathbb{R}$ intervallumra $J \subset I_1(\tau,\xi_1) \cap I_2(\tau,\xi_2)$ teljesül. Ekkor minden $t \in J$ esetén fennáll a

$$|\Phi_1(t,\tau,\xi_1) - \Phi_2(t,\tau,\xi_2)| \leq |\xi_1 - \xi_2| \mathrm{e}^{L|t-\tau|} + \frac{\delta}{L}(\mathrm{e}^{L|t-\tau|} - 1). \qquad (2.46)$$

Peano-egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Rövidség kedvéért legyen $x_i(t) = \Phi_i(t,\tau,\xi_1)$. Ekkor az ekvivalens integrálegyenletekből minden $t \in J$ esetén

$$x_i(t) = \xi_i + \int_\tau^t f_i(s, x_i(s))\mathrm{d}s \qquad (i = 1,2).$$

Egyszerűség kedvéért tekintsük csak a $t \geq \tau$ esetet, a másik eset hasonlóan tárgyalható. Ekkor

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |\xi_1 - \xi_2| + \left|\int_\tau^t f_1(s,x_1(s)) - f_2(s,x_2(s))\mathrm{d}s\right|$$

$$\leq |\xi_1 - \xi_2| + \int_\tau^t |f_1(s,x_1(s)) - f_1(s,x_2(s))|\mathrm{d}s + \int_\tau^t |f_1(s,x_2(s)) - f_2(s,x_2(s))|\mathrm{d}s$$

$$\leq |\xi_1 - \xi_2| + L\int_\tau^t |x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s + \delta(t-\tau).$$

(A második lépésben becsempésztük az $f_1(s,x_2(s))$ tagot kétféle előjellel; a harmadikban alkalmaztuk egyrészt a Lipschit-feltételt, másrészt a jobb oldalak eltérésére tett feltevést.) Az $r := |x_1 - x_2|$ függvényre alkalmazva a Gronwall-lemma 2.1. következményét éppen a kívánt állítást kapjuk. ∎

2.7. megjegyzés. A (2.46) bal oldalának első tagja jelképezi a mérési hibát, vagyis azt a tényt, hogy a kezdeti állapotot nem tudjuk pontosan mérni, második tagja pedig a modellhibát, vagyis azt a tényt, hogy a jobb oldalt csak δ pontossággal mérjük.

2.8. megjegyzés. Elegendő lett volna feltenni, hogy f_2 teljesíti a Lipschitz-féle feltételt, és f_1 és f_2 olyan, hogy a velük, mint jobb oldallal fölírt kezdetiérték-problémák megoldása létezik és egyértelmű.

2.20. feladat. Tekintsük az

$$\dot{x}_1 = Lx_1 - \varepsilon_1 \quad x_1(0) = \xi_1 \tag{2.47}$$

és az

$$\dot{x}_2 = Lx_2 + \varepsilon_2 \quad x_2(0) = \xi_1 + \delta \tag{2.48}$$

kezdetiérték-problémát [**?**]. Ezeken mutasuk be, hogy a Peano-féle egyenlőtlenség (a szokásos pontatlan kifejezéssel élve) nem javítható. (Megoldás: **??**. oldal.)

Az alábbiakban megfogalmazzuk a Peano-féle egyenlőtlenség két fontos következményét. Az első, melyet már más módon is megkaptunk, a megoldás egyértelműsége. A második pedig a megoldás folytonos függése a kezdeti feltételtől.

2.2. következmény. Legyen a Peano-féle egyenlőtlenségben $\xi_1 = \xi_2$ és $f_1 = f_2$. Ekkor az egyenlőtlenség szerint két megoldás értelmezési tartományának minden pontjában azonos értéket vesz fel. Azaz a Lipschitz-feltétel teljesülése esetén innen is következik, hogy minden kezdetiérték-probléma megoldása egyértelmű.

2.3. következmény. Legyen a Peano-féle egyenlőtlenségben $f_1 = f_2$. Ekkor $\delta := 0$ a megfelelő választás, és a (τ, ξ_1), illetve (τ, ξ_2) pontokból induló megoldásokra a

$$|\Phi(t,\tau,\xi_1) - \Phi(t,\tau,\xi_2)| \leq |\xi_1 - \xi_2| \mathrm{e}^{L|t-\tau|}$$

becslést kapjuk. Ez azt jelenti, hogy ha a kezdeti feltételek közel vannak akkor a megoldások értékei is közel maradnak egymáshoz (véges időintervallumon belül). Azaz pontosabban fogalmazva a $\xi \mapsto \Phi(t,\tau,\xi)$ függvény folytonos. Ezt a tényt szokás olyan módon megfogalmazni, hogy a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől.

2.9. megjegyzés. A 2.8. olyan általánosítása is igaz, amelyben két különböző kezdeti időpont, τ_1 és τ_2 szerepel, ebből következik, hogy a $\tau \mapsto \Phi(t,\tau,\xi)$

függvény folytonos, vagyis a megoldás folytonosan függ a kezdeti időponttól. Az alkalmazások (nem utolsó sorban a kémiaiak, lásd [**?**]) szempontjából fontos a 2.8. tétel azon következménye is, amely szerint a megoldás folytonosan függ a jobb oldalon szereplő paramétertől is.

2.5.3. A karakterisztikus függvény és a variációs egyenlet

Az eddigiekben láttuk, hogy a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől, azaz a $\xi \mapsto \Phi(t,\tau,\xi)$ függvény folytonos. (Hasonló igaz a kezdeti időponttól való függésre is.) Most megmutatjuk, hogy alkalmas további feltételek teljesülése esetén még differenciálható is.

2.9. tétel. Legyen $N \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tartomány, $(\tau,\xi) \in \Omega$, és $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Ekkor a $\xi \mapsto \Phi(t,\tau,\xi)$ függvény differenciálható, és tetszőleges $\eta \in \mathbb{R}^N$ esetén a $t \mapsto y(t) := \partial_3\Phi(t,\tau,\xi)\eta$ függvény megoldása az

$$\dot{y}(t) = \partial_2 f(t,x(t)) \cdot y(t) \tag{2.49}$$

$$y(\tau) = \eta \tag{2.50}$$

(lineáris, változó együtthatós differenciálegyenletre vonatkozó) kezdetiérték-problémának, ahol $x(t) := \Phi(t,\tau,\xi)$, $(t \in I(\tau,\xi))$.

Bizonyítás. Az $N = 1$ esetre adjuk meg a bizonyítást, mert az technikailag egyszerűbb. Az általános eset hasonlóan kezelhető. Először megmutatjuk, hogy a $\xi \mapsto \Phi(t,\tau,\xi)$ függvény differenciálható. Mivel az f függvény differenciálható, azért megadható olyan a függvény, melyre minden $(t,p),(t,q) \in \Omega$ esetén

$$f(t,q) - f(t,p) = \partial_2 f(t,p)(q-p) + a(t,p,q)(q-p) \tag{2.51}$$

és

$$\lim_{q \to p} a(t,p,q) = 0. \tag{2.52}$$

Megmutatható, hogy elegendően kis $h_0 \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan, a τ pontot belsejében tartalmazó $J \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum, melyre $I(\tau,\xi+h) \supset J$ minden $|h| < h_0$ esetén. Legyen a továbbiakban mindig $t \in J$ és $|h| < h_0$. Meg kell mutatni, hogy az

$$\omega_h(t) := \frac{1}{h}(\Phi(t,\tau,\xi+h) - \Phi(t,\tau,\xi)) \qquad (t \in J) \tag{2.53}$$

képlettel definált ω_h függvényre adott $t \in J$ esetén, létezik és véges a

$$\lim_{h\to 0} \omega_h(t) \tag{2.54}$$

határérték. Rövidség kedvéért vezessük be az $x(t) := \Phi(t,\tau,\xi)$ és $y_h(t) := \Phi(t,\tau,\xi+h)$ jelölést. Ekkor (2.51) alapján

$$\begin{aligned} \dot{y}_h(t) - \dot{x}(t) &= f(t,y_h(t)) - f(t,x(t)) = \\ &= \partial_2 f(t,x(t))(y_h(t)-x(t)) + a(t,x(t),y_h(t))(y_h(t)-x(t)). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Legyen $t \in J$ esetén $A(t) := \partial_2 f(t,x(t))$ és $\Gamma_h(t) := a(t,x(t),y_h(t))$. Ekkor $\omega_h(t) = \frac{y_h(t)-x(t)}{h}$ miatt (2.55) alapján

$$\dot{\omega}_h(t) = (A(t)+\Gamma_h(t))\omega_h(t) \qquad \omega_h(\tau) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}. \tag{2.56}$$

Alkalmazzuk a Peano-féle egyenlőtlenséget a (2.56) és az

$$\dot{\omega}(t) = A(t)\omega(t) \qquad \omega(\tau) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$$

kezdetiérték-problémára. Mivel a kezdeti feltételek azonosak, azért (2.46) szerint minden $t \in J$ esetén

$$|\omega_h(t) - \omega(t)| \le \frac{\delta(h)}{L}(e^{L|t-\tau|} - 1), \tag{2.57}$$

ahol $L := \max\{\|A(t)\| : t \in J\}$ és $\delta(h) := \max\{\|\Gamma_h(t)\| : t \in J\}$. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \delta(h) = 0. \tag{2.58}$$

Ebből következik a kívánt (2.54) állítás, sőt még az is, hogy y megoldása a (2.49)–(2.50) kezdetiérték-problémának, hiszen ω éppen a (2.49) differenciálegyenlet megoldása. A (2.58) határérték igazolásához először alkalmazzuk a megoldás kezdeti feltételtől való folytonos függését. A 2.3. következmény szerint $|x(t) - y_h(t)| \le |h| \exp(K|t-\tau|)$ alkalmas $K \in \mathbb{R}$ konstanssal. Így (2.52) miatt $h \to 0$ esetén $a(t,x(t),y_h(t)) \to 0$, ahonnan (2.58) azonnal következik.

A fenti gondolatmenet segítségével megkaptuk, hogy (az $N = 1$ dimenziós esetben) y megoldása a (2.49)–(2.50) kezdetiérték-problémának. Most belátjuk ezt közvetlenül is tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén, felhasználva a Φ függvény kétszeri differenciálhatóságát. Differenciáljuk a

$$\partial_1 \Phi(t,\tau,p) = f(t,\Phi(t,\tau,p))$$

egyenletet a p szerint, majd helyettesítsünk be $p=\xi$-t. Ekkor (a deriválások sorrendjének felcserélhetősége miatt) a

$$\partial_1\partial_3\Phi(t,\tau,p)=\partial_2 f(t,\Phi(t,\tau,p))\partial_3\Phi(t,\tau,p)$$

mátrixegyenletet kapjuk. Tetszőleges $\eta\in\mathbb{R}^N$ vektorral megszorozva a kapott egyenletet a (2.49) összefüggéshez jutunk. A (2.50) egyenlet levezetéséhez vegyük észre, hogy a ξ vektor egy környezetében tetszőleges p vektorra $\Phi(\tau,\tau,p)=p$. Ezt az egyenletet p szerint deriválva, majd $\eta-$val megszorozva éppen a (2.50) összefüggést kapjuk. ■

2.17. definíció. Legyen $(\tau,\xi)\in\Omega$, $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Az

$$\dot{y}(t)=\partial_2 f(t,\varphi(t))y(t)$$

lineáris differenciálegyenletet az $\dot{x}=f\circ(\mathrm{id},x)$ differenciálegyenlet φ megoldására vonatkozó **variációs egyenlet**ének nevezzük.

2.6. A Mathematica alkalmazása az alapfogalmak illusztrálására

Iránymező elkészítéséhez szükségünk van egy programcsomagra.

```
<<Graphics‘
```

Több függvény is rendelkezésünkre áll ezek után. Az első példában azt mutatjuk meg, hogyan készült a 2.1. ábrán szereplő iránymező. (Az $y'(x)=f(x,y(x))$ egyenlet iránymezejének felrajzolásához az $\{1,f[x,y]\}$ függvénypárt kell megadnunk.)

```
PlotVectorField[{1,2x-y},{x,-2,2},{y,-2,2},
                ScaleFactor->0.5];
```

Még háromváltozós esetben is lehet látni valamit. Rajzoljuk meg például az alábbiakban (a **??**. fejezetben) sokszor előforduló

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= \rho x-y-xz\\ \dot{z} &= -\beta z+xy\end{aligned}$$

Lorenz-egyenlet iránymezejét, ha $\sigma=10,\rho=28,\beta=8/3$.

```
PlotVectorField3D[
{\[Sigma](y-x),\[Rho]x-y-xz,-\[Beta]z+xy}/.
{\[Sigma]->10, \[Rho]->28, \[Beta]->8/3},
```

```
{x,-15,15},{y,-25,20},{z,0,40},ScaleFactor->5]
```

Ha a jobb oldal valamely skalárértékű, úgynevezett potenciálfüggvény deriváltjaként áll elő, akkor elegendő csak ezt a potenciálfüggvényt megadni. Legyen például $U(x,y) := x^2 - y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, és legyen a jobb oldal ennek a függvénynek a gradiense, azaz tekintsük az $\dot{x} = 2x \quad \dot{y} = -2y$ egyenletet. Ennek iránymezeje így készíthető el:

```
PlotGradientField[x^2-y^2, {x,-2,2},{y,-2,2}];
```

Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy ezek az ábrák különböző operációs rendszerek alatt, illetve a program különböző változatait használva különbözőképpen nézhetnek ki, tehát az itt megadott, általunk kikísérletezett paraméter- és opcióegyütteseket az Olvasónak esetleg felül kell bírálnia.

A fokozatos közelítés módszeréhez bevezetésként mutatunk néhány módot arra, hogyan lehet meghatározni $x = \cos(x)$ egyenlet $[0,1]$ intervallumban található gyökét.

```
NestList[Cos,1.,5]
{1., 0.540302, 0.857553, 0.65429, 0.79348, 0.701369}
```

Kifejezetten a fix pontok meghatározására szolgáló függvény is található a programban.

```
FixedPoint[Cos,1.]
0.739085
```

Ennek a függvénynek magunk is megmondhatjuk, mikor tekintjük elég jónak a közelítést, azaz mikor mondjuk, hogy az utolsó két közelítés már egyezőnek tekinthető.

```
FixedPoint[Cos,1.,SameTest->Abs[#1-#2]<10^-1&]
{1., 0.540302, 0.857553, 0.65429, 0.79348, 0.701369}
```

És végül: igen tanulságos, és némiképp meglepő lehet, hogy a mintaillesztés (ami tipikusan diszkrét matematikai objektumok átalakítására használatos) szintén fölhasználható a gyök meghatározására.

```
1. /. x_->Cos[x]
0.739085
```

Ha differenciálegyenletek megoldására akarjuk alkalmazni a szukcesszív approximáció módszerét, szinte csak le kell másolnunk a tételt. Értelmezzük a differenciálegyenletnek megfelelő integráloperátort, majd ezt egymás után alkalmazzuk valamilyen kiindulási függvényre. (Vektorértékű függvény esetében kis technikai kiegészítésre van szükség.) Az illusztráláshoz választott feladatunk természetesen olyan egyszerű, hogy az integrálást el lehessen végezni, legalább is az első néhány lépésben.

```
f[p_,q_]:=q^2;
tau=0; xi=1;
A[fi_]:=Simplify[(xi+Integrate[f[s,fi[s]],{s,tau,#}])&]
NestList[A,xi&,5]
kozel[x_]=#[x]&/@%
```

Határozzuk meg a pontos megoldást is:

```
pontos[x_]=
DSolve[{y'[x]==y[x]^2, y[0]==1}, y[x],x][[1,1,2]]
```

Végül egy ábrán ábrázolhatjuk az összes kapott eredményt.

```
Plot[Evaluate[Flatten[{kozel[x],pontos[x]}]],{x,0,0.8},
PlotStyle->Join[Thickness/@(0.002(7-Range[6])),
{Dashing[{0.05, 0.03}]}]];
```

3

Megoldási módszerek néhány egyszerű típus esetében

A fejezet célja, hogy

- néhány egyszerű típusú, valós-valós függvényekre vonatkozó differenciálegyenlet esetében (tehát amikor az általános 2.3. definícióban szereplő N szám értéke 1) megmutassa, miként lehet a megoldást szimbolikusan (bár esetleg implicite megadott formában) megkapni,
- a módszereket összekösse az általános elméletben szereplő fogalmakkal,
- rávilágítson a transzformációk fontosságára és egyszerűsítő hatására,
- hozzon néhány további alkalmazási példát, végül pedig
- megmutassa, hogy az előkerülő feladatok megoldására miként használható a *Mathematica*.

3.1. Közvetlenül integrálható egyenletek

Ezt a speciális esetet lényegében már tárgyaltuk, most csak a teljesség kedvéért fogalmazzuk meg újra.

3.1. definíció. Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, $\Omega := J \times \mathbb{R}$,

$$f(t, p) := g(t), \qquad (t, p) \in \Omega.$$

Ekkor az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletet **közvetlenül integrálható differenciálegyenlet**nek nevezzük.

3.1. megjegyzés. A fenti definícióban szereplő Ω halmaz nyílt intervallumok Descartes-féle szorzata lévén, összefüggő nyílt halmaz, f pedig folytonos függvény, hiszen folytonos függvényekből vetítéssel és a kompozíció műveletével áll elő: $f = g \circ \mathrm{pr}_1$. (Emlékeztetünk arra, hogy pr_1 az első koordinátára való vetítés.) Így valóban explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletek egy speciális osztályát definiáltuk. Ezek lokális alakja:

$$\dot{x}(t) = g(t) \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{3.1}$$

3.1. tétel. A (3.1) közvetlenül integrálható differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma tetszőleges

$$x(\tau) = \xi \quad (\tau \in J, \xi \in \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

kezdeti feltétel mellett globálisan egyértelműen megoldható, és a teljes megoldás értelmezési tartománya a teljes J intervallum.

Bizonyítás. Mivel g folytonos függvény, primitív függvényei éppen az integrálfüggvényei. Ezek közül tekintsük a τ pontban eltűnőt, majd adjunk ehhez ξ-t: $J \ni t \mapsto \xi + \int_\tau^t g(s)\mathrm{d}s$. Ez a függvény nyilván megoldása a (3.1)–(3.2) Cauchy-feladatnak. Másrészt a megoldások csak ennek a függvénynek a leszűkítései lehetnek, így az összes (τ, ξ)-n átmenő megoldás egyesítése éppen a fenti függvény. ■

3.2. megjegyzés. Ha φ megoldása a (3.1) differenciálegyenletnek a $J_1 \subset J$ intervallumon, akkor nyilván tetszőleges $C \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi + C$ is megoldása a (3.1) differenciálegyenletnek a J_1 intervallumon.

3.1. példa. Oldjuk meg az $y'(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\quad y(1) = 1$ kezdetiérték-problémát. A feladat megoldását azzal kezdjük, hogy megállapítjuk a jobb oldal egy alkalmas értelmezési tartományát. Legyen $J :=]0, +\infty[$, akkor $\Omega := J \times \mathbb{R}$ tartalmazza az $(1,1)$ pontot. A jobb oldal primitív függvényeinek halmaza (más néven: **határozatlan integrál**ja): $\{J \ni x \mapsto \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C; C \in \mathbb{R}\}$. Ezek közül a kezdeti feltételt is kielégítő, a teljes J intervallumon értelmezett függvény: $J \ni x \mapsto \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + \frac{7}{15}$; ez a teljes megoldás, ennek minden, az 1 számot tartalmazó nyílt intervallumra vett leszűkítése szintén megoldás.

3.1. feladat. Milyen szerkezetű a közvetlenül integrálható egyenletek iránymezője? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.2. feladat. Határozzuk meg az $f(x+y) = f(x)+f(y) \quad (x,y \in \mathbb{R})$ **Cauchy-egyenlet** differenciálható megoldásait közvetlenül integrálható differenciálegyenletre való visszavezetés útján. Hogyan enyhíthető a differenciálhatóság feltétele? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.2. Autonóm egyenletek

3.2. definíció. Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $h \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, $\Omega := \mathbb{R} \times J$,

$$f(t,p) := h(p), \qquad (t,p) \in \Omega.$$

Ekkor az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletet **autonóm differenciálegyenlet**nek nevezzük.

3.3. megjegyzés. A fenti definícióban szereplő Ω halmaz nyílt intervallumok Descartes-féle szorzata lévén, összefüggő nyílt halmaz, f pedig folytonos függvény, hiszen folytonos függvényekből vetítéssel és a kompozíció műveletével áll elő: $f = h \circ \mathrm{pr}_2$. (Itt pr_2 a második koordinátára való vetítés.) Így valóban az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletek speciális osztályát definiáltuk. Ezek lokális alakja:

$$\dot{x}(t) = h(x(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{3.3}$$

Általánosságban megfogalmazzuk a (2.27) feladat megoldásánál alkalmazott módszert.

3.2. tétel. Tegyük fel, hogy a h függvény nem veszi föl a nulla értéket. (Mivel, ha h folytonos, akkor állandó előjelű csak úgy lehet, ha vagy kizárólag pozitív, vagy kizárólag negatív értékeket vesz föl, ezért például föltehetjük, hogy $\mathcal{R}_h \subset \mathbb{R}^+$.) Legyen $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in J$ tetszőleges, és tekintsük a (3.3) differenciálegyenletet a

$$x(\tau) = \xi \tag{3.4}$$

kezdeti feltétel mellett. A (3.3)–(3.4) kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az globálisan egyértelmű. A teljes megoldás:

$$J_2 + \{\tau\} \ni t \mapsto \left(\int_\xi \frac{1}{h}\right)^{-1}(t-\tau), \tag{3.5}$$

ahol $J_2 := \mathcal{R}_{\int_\xi \frac{1}{h}}$.

Bizonyítás. A (3.3) egyenlet mindkét oldalát végigosztva $h(x(t))$-vel helyettesítéses integrálás után kapjuk az állítást:

$$\frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))} = 1, \quad \int_\tau^t \frac{\dot{x}(s)}{h(x(s))} = t - \tau, \quad \int_{x(\tau)}^{x(t)} \frac{1}{h} = t - \tau.$$

■

3.4. megjegyzés.

1. Ha φ megoldása a (3.3) differenciálegyenletnek a J intervallumon, akkor nyilván tetszőleges $C \in \mathbb{R}$ esetén $t \mapsto \varphi(t+C)$ is megoldása a (3.3) differenciálegyenletnek a $J - \{C\}$ intervallumon.
2. Vegyük észre, hogy ebben a speciális esetben az általános tételben szereplő szigorú regularitási feltétel, a Lipschitz-féle feltétel helyett enyhébb (a folytonosság) is elegendő volt az egyértelműséghez az egyenlet speciális szerkezete és a h függvény értékkészletére vonatkozó feltevés miatt.

3.3. feladat. Legyen a $t \in \mathbb{R}^+$ időpontban a vérben a glükóz koncentrációja $c(t)$ mg/ml. Tegyük fel, hogy intravénásan adagoljuk a glükózt, percenként G mg sebességgel, és legyen V l a vér térfogata (a tipikus érték felnőtteknél 5 l). Figyelembe véve, hogy a glükóz folyamatosan más molekulákká alakul át, és fölhasználva, hogy a megfogalmazásban szereplő és az SI-egységek között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{ml}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \qquad \mathrm{l} = \frac{\mathrm{m}^3}{1000}, \qquad \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{min}} = \frac{\mathrm{kg}}{60000000\mathrm{s}},$$

a glükóz koncentrációjára a következő differenciálegyenlet írható föl (elhagyva a korábbiakban részletezett lépéseket):

$$\dot{c} = \frac{G}{60000V} - kc, \tag{3.6}$$

ahol k az átalakulás sebességére jellemző állandó, mértékegysége $\frac{1}{s}$. Határozzuk meg a glükóz koncentrációjának időbeli alakulását, s a koncentráció $\lim_{+\infty} c$ egyensúlyi értékét. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.4. feladat. Milyen szerkezetű az autonóm egyenletek iránymezője? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.5. feladat. Új ismeretlen függvény bevezetésével vezessük vissza autonóm egyenletre az $\dot{x}(t) = \sin(t + x(t))$ differenciálegyenletet, majd oldjuk meg. Ellenőrizzük a korábban, az iránymező felhasználásával tett kvalitatív megállapításokat. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.3. Szétválasztható változójú egyenletek

3.3. definíció. Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\Omega := I \times J$, $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, $f(t,p) := g(t)h(p) \quad ((t,p) \in \Omega)$. Ekkor az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletet **szétválasztható változójú differenciálegyenlet**nek nevezzük.

3.5. megjegyzés. A fenti Ω halmaz – mint nyílt intervallumok Descartes-féle szorzata – összefüggő nyílt halmaz, f pedig folytonos függvény, hiszen folytonos függvényekből vetítéssel és a kompozíció műveletével áll elő:

$$f = g \circ \mathrm{pr}_1 h \circ \mathrm{pr}_2.$$

Így valóban az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletek speciális osztályát definiáltuk. Ezek lokális alakja:

$$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{3.7}$$

3.3. tétel. Legyen $\tau \in I, \xi \in J$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $0 \notin \mathcal{R}_h$. Tekintsük a (3.7) differenciálegyenletet az

$$x(\tau) = \xi \tag{3.8}$$

kezdeti feltétel mellett. A (3.7)–(3.8) kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az globálisan egyértelmű. A teljes megoldás:

$$J_2 + \{\tau\} \ni t \mapsto \left(\int_\xi \frac{1}{h}\right)^{-1} \circ \int_\tau^t g, \tag{3.9}$$

ahol $J_2 := \{t \in I; \int_\tau^t g \in \mathcal{R}_{\int_\xi \frac{1}{h}}\}$.

Bizonyítás. A (3.7) egyenlet mindkét oldalát elosztva $h(x(t))$-vel helyettesítéses integrálás után kapjuk az állítást:

$$\frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))} = g(t), \quad \int_\tau^t \frac{\dot{x}(s)}{h(x(s))} = \int_\tau^t g(s)\mathrm{d}s, \quad \int_{x(\tau)}^{x(t)} \frac{1}{h} = \int_\tau^t g(s)\mathrm{d}s.$$

$\blacksquare$

3.6. megjegyzés. Vegyük észre, hogy ebben a speciális esetben is az általános tételben szereplő szigorú regularitási feltétel, a Lipschitz-féle feltétel helyett enyhébb (a folytonosság) is elegendő volt az egyértelműséghez az egyenlet speciális szerkezete és a h függvény értékkészletére vonatkozó feltevés miatt.

3.3.1. Homogén egyenletek

3.4. definíció. Legyen $\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}, \alpha < \beta, I :=]\alpha,\beta[$, és tegyük fel, hogy $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Legyen továbbá $\Omega := \{(t,p) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}^+, \alpha < \frac{p}{t} < \beta\}$ és legyen

$$f(t,p) := g\left(\frac{p}{t}\right), \qquad (t,p) \in \Omega.$$

Ekkor az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletet **homogén differenciálegyenlet**nek nevezzük.

3.7. megjegyzés. A fenti Ω halmaz nyilván összefüggő nyílt halmaz, f pedig folytonos függvény. Így valóban az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletek speciális osztályát definiáltuk. Ezek lokális alakja:

$$\dot{x}(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right) \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{3.10}$$

3.4. tétel. Tegyük fel, hogy a g függvénynek nincs fix pontja, azaz minden $u \in I$ esetén $g(u) \neq u$. Legyen $\tau,\xi \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\frac{\xi}{\tau} \in I$, és tekintsük a (3.10) differenciálegyenletet az

$$x(\tau) = \xi \tag{3.11}$$

kezdeti feltétel mellett. A (3.10)–(3.11) kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az globálisan egyértelmű. A teljes megoldás:

$$\mathcal{R}_{\tau \exp\circ G} \ni t \mapsto tG^{-1}\left(\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), \tag{3.12}$$

ahol $G(r) := \int_{\frac{\xi}{\tau}}^{r} \frac{1}{g(s)-s}\mathrm{d}s \quad (r \in I)$.

Bizonyítás. A (3.10) egyenlet megoldásához vezessük be az $u(t) := \frac{x(t)}{t} \quad (t \in \mathcal{D}_x)$ összefüggéssel értelmezett u (ismeretlen) függvényt. Mivel ekkor $tu(t) =$

$x(t)$, vagyis $\dot{x}(t) = u(t) + t\dot{u}(t)$, ezért a bevezetett függvényre az $\dot{u}(t) = \frac{g(u(t))-u(t)}{t}$ szétválasztható változójú egyenlet vonatkozik, amelynek jobb oldala $\frac{g(q)-q}{p}$, ha $(p,q) \in \Omega$. Az egyenlet mindkét oldalát elosztva $g(u(t)) - u(t)$-vel helyettesítéses integrálás után kapjuk az állítást:

$$\frac{u'(t)}{g(u(t)) - u(t)} = \frac{1}{t}, \quad \int_{u(\tau)}^{u(t)} \frac{1}{g(s) - s} \mathrm{d}s = \ln(t) - \ln(\tau), \quad G(u(t)) = \ln\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

■

3.6. feladat. Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

1. $y'(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2} + \frac{y(x)}{x} \quad y(1) = 0,$
2. $y'(x) = \frac{y(x)(\ln(y(x)) - \ln(x))}{x},$
3. $y'(x) = \frac{x - y(x)}{x + y(x)}.$

(Megoldás: **??**. oldal.)

3.7. feladat. Milyen szerkezetű a homogén egyenletek iránymezője? (Megoldás: **??**. oldal.)

Felmerülhet az a kérdés, hogy egy jobb oldalról miként dönthető el, hogy „csak $\frac{x(t)}{t}$-től függ”. Erre kétféle választ fogalmazunk meg, mindkettő szoros kapcsolatban áll későbbi témákkal.

3.5. definíció. Az $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt n-**edfokú homogén függvény**nek nevezzük, ha minden $t \in \mathbb{R}$ és minden $p \in \mathbb{R}^N$ esetén $f(tp) = t^n f(p)$ teljesül valamilyen $n \in \mathbb{R}^+$ számmal.

Az n-edfokú homogén függvények egy úgynevezett elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenlet megoldásaiként jellemezhetők (lásd **??**. oldal).

3.8. feladat. Legyen $N := 1, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Az f jobboldalú explicit közönséges differenciálegyenlet pontosan akkor homogén egyenlet, ha f nulladfokú homogén függvény. (Megoldás: **??**. oldal.)

A másik megközelítés a rangtételen (lásd például [**?**]) alapul, amelyet az egzakttá tehető egyenleteknél is fel fogunk használni (lásd a 78. oldalon). A rangtétel alábbi következménye megtalálható például ezeken a helyeken: [**?**, 36. oldal] vagy [**?**, 299–301. oldal].

3.5. tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, és tegyük fel, hogy $k, m \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$ folytonosan differenciálható függvények. Ha a H tartományon

$$\begin{vmatrix} \partial_1 m & \partial_2 m \\ \partial_1 k & \partial_2 k \end{vmatrix} = 0, \quad |\partial_1 m| + |\partial_2 m| > 0, \tag{3.13}$$

akkor minden $(p,q) \in H$ ponthoz létezik a (p,q) pontnak olyan $\mathcal{K}((p,q))$ környezete és azon olyan $l \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}_m, \mathbb{R})$ függvény, amellyel fennáll, hogy $k = l \circ m$.

3.8. megjegyzés. Ha az m függvényt így választjuk meg: $m(p,q) := \frac{q}{p}$, akkor éppen arra vonatkozó feltételt kapunk, (javasoljuk az Olvasónak, hogy írja fel részletesen, mit is jelent ez általában a jobb oldalra nézve!) hogy valamely jobb oldal tényleg „csak $\frac{x(t)}{t}$-től függ”.

3.2. példa. Szeretnénk eldönteni, hogy az $y'(x) = \frac{x-y(x)}{x+y(x)}$ differenciálegyenlet homogén-e. Itt $k(p,q) := \frac{p-q}{p+q}, m(p,q) := \frac{q}{p}$, tehát a megvizsgálandó determináns:

$$\begin{vmatrix} -\frac{q}{p^2} & \frac{1}{p} \\ \frac{2q}{(p+q)^2} & -\frac{2p}{(p+q)^2} \end{vmatrix} = 0, \quad |\partial_1 m| + |\partial_2 m| = \left|\frac{q}{p^2}\right| + \left|\frac{1}{p}\right| > 0 \tag{3.14}$$

Mivel mind a két feltétel teljesül, ezért alkalmas környezetben a jobboldal valóban csak a hányados függvénye. Valóban az, hiszen itt $k(p,q) = \frac{1-\frac{q}{p}}{1+\frac{q}{p}}$.

3.9. feladat. Alkalmazzuk ezt a 3.6. feladatsor első két feladatára is, gyakorlás céljából. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.3.2. Homogénre visszavezethető egyenletek

3.10. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$; $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ számok esetén az $y'(x) = f\left(\frac{\alpha y(x) + \beta x + \gamma}{a y(x) + b x + c}\right)$ egyenlet alkalmas helyettesítéssel homogén egyenletre vezethető vissza. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.11. feladat. Határozzuk meg az $y'(x) = \frac{x-y(x)+4}{x+y(x)-2}$ egyenlet $(1,1)$ ponton átmenő megoldását. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.12. feladat. Milyen $c, d \in \mathbb{R}$ valós számok esetén lehet az

$$y'(x) = ax^c + by(x)^d$$

differenciálegyenletet homogén differenciálegyenletre visszavezetni az $y =: z^m$ helyettesítéssel valamilyen $m \in \mathbb{R}$ számmal? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.13. feladat. Mutassuk meg, hogy a $z := y^r$ új ismeretlen függvényre homogén egyenlet vonatkozik, ha y-ra a $2x^4y(x)y'(x) + y(x)^4 = 4x^6$ egyenlet áll fenn, feltéve, hogy ügyesen választjuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ számot. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.4. Elsőrendű lineáris egyenletek

3.6. definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a_0, a_1 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\Omega := I \times \mathbb{R}$,

$$f(t, p) := a_0(t) + a_1(t)p \quad ((t, p) \in \Omega).$$

Ekkor az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletet **elsőrendű lineáris differenciálegyenlet**nek nevezzük.

3.9. megjegyzés.

- A fenti Ω halmaz – mint nyílt intervallumok Descartes-féle szorzata – összefüggő nyílt halmaz, f pedig folytonos függvény, hiszen folytonos függvényekből vetítéssel, alapműveletekkel és a kompozíció műveletével áll elő: $f = a_0 \circ \mathrm{pr}_1 + a_1 \circ \mathrm{pr}_1 \mathrm{pr}_2$. Így valóban az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenletek speciális osztályát definiáltuk. Ezek lokális alakja:

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a_1(t)x(t) \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{3.15}$$

- Világos, hogy közvetlenül integrálható egyenlettel van dolgunk az $a_1(t) = 0 \quad (t \in I)$ esetben, az $a_0(t) = 0 \quad (t \in I)$ esetben pedig igen speciális szétválasztható változójú egyenlettel. Ebben az utóbbi esetben azt is mondjuk, hogy a vizsgált lineáris differenciálegyenlet **homogén**. Célszerű az ilyen egyenleteket teljesebb nevükön – **homogén lineáris differenciálegyenlet**eknek – neveznünk, hogy ne tévesszük össze ezeket a homogén egyenletekkel.

3.6. tétel. Legyen $\tau \in I, \xi \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és tekintsük a (3.15) differenciálegyenletet az

$$x(\tau) = \xi \tag{3.16}$$

kezdeti feltétel mellett. A (3.15)–(3.16) kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az globálisan egyértelmű. A teljes megoldás:

$$I \ni t \mapsto x(t) = \mathrm{e}^{\int_\tau^t a_1} \left(\xi + \int_\tau^t a_0 \mathrm{e}^{-\int_\tau a_1} \right). \tag{3.17}$$

Bizonyítás. A tételre két bizonyítást adunk.

1. A (3.15) egyenlet megoldásának első lépéseként írjuk át az egyenletet:

$$\dot{x}(t) - a_1(t)x(t) = a_0(t), \tag{3.18}$$

majd vegyük észre, hogy a bal oldalon „majdnem” $t \mapsto \mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1} x(t)$ deriváltja áll a t helyen. Pontosabban:

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{-\int_\tau a_1} x\right)'(t) &= \\
&= \left(-a_1(t)\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1}\right) x(t) + \left(\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1}\right) \dot{x}(t) \\
&= \mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1} \left(-a_1(t)x(t) + \dot{x}(t)\right).
\end{aligned}$$

Ha tehát a (3.18) egyenletet megszorozzuk az $\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1}$ kifejezéssel, akkor ezt kapjuk: $\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1}(\dot{x}(t) - a_1(t)x(t)) = a_0(t)\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1}$, melyből $\left(\mathrm{e}^{-\int_\tau a_1} x\right)'(t) = a_0(t)\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1}$. Innen pedig mindkét oldalt integrálva: $\mathrm{e}^{-\int_\tau^t a_1} x(t) - x(\tau) = \int_\tau^t a_0(s)\mathrm{e}^{-\int_\tau^s a_1} \mathrm{d}s$. Így – figyelembe véve a kezdeti feltételt – a teljes megoldás:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_\tau^t a_1} \left(\xi + \int_\tau^t a_0(s) \mathrm{e}^{-\int_\tau^s a_1} \mathrm{d}s \right) \quad (t \in I). \tag{3.19}$$

(Ez ugyanis az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldások egyesítése.)

2. Második bizonyításunkban az **állandók variálásá**nak Lagrange[1]-tól eredő módszerét alkalmazva meghatározzuk a (3.15) egyenlet általános megoldását. Ehhez elsőként kiszámítjuk a (3.15) egyenletnek megfelelő

$$\dot{x}(t) = a_1(t)x(t) \tag{3.20}$$

[1] Lagrange, Joseph Louis (1736–1813): francia-olasz matematikus, fizikus és csillagász.

homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását a szétválasztható változójú egyenletek megoldására kidolgozott módszerrel:

$$x_{\text{hom.,ált.}}(t) = Ce^{\int_\tau^t a_1}. \tag{3.21}$$

(Megjegyzendő, hogy ez a képlet abban az esetben is megadja a megoldást, ha az fölveszi a nulla értéket, válasszuk ugyanis ekkor C értékét nullának. – Továbbá: az integrálás alsó határaként tetszőleges I-beli pont vehető, mivel C tetszőleges valós szám lehet.) Ezek után keressük az inhomogén egyenlet megoldását

$$t \mapsto D(t)e^{\int_\tau^t a_1} \tag{3.22}$$

alakban. (Eljárásunk jogosságát az fogja igazolni, hogy kiderül: van ilyen megoldás.) A (3.22) alakot behelyettesítve a (3.15) egyenletbe a D együtthatófüggvényre a $\dot{D}(t) = a_0(t)e^{-\int_\tau^t a_1}$ közvetlenül integrálható differenciálegyenlet adódik, amelynek mindössze egyetlen megoldására van szükségünk. Legyen ez például: $D(t) = \int_\tau^t a_0 e^{-\int_\tau a_1}$. Végül pedig a későbbiekben szereplő **??** tétel szerint az inhomogén egyenlet általános megoldása előáll, mint a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egy (szokásosan **partikuláris**nak hívott) megoldásának összege. Így tehát az inhomogén egyenlet megoldásai

$$I \ni t \mapsto \left(C + \int_\tau^t a_0 e^{-\int_\tau a_1}\right) e^{\int_\tau^t a_1} \quad (C \in \mathbb{R}), \tag{3.23}$$

s ezek közül a kezdeti feltételt is kielégítőt akkor kapjuk, ha C értékét ξ-nek választjuk.

■

3.10. megjegyzés. Az állandók variálásának módszerét konkrét feladatok esetében érdemes mindig reprodukálni, így nem kell a (3.17) képletet fejben tartani.

3.14. feladat. **Szuperpozíciós elv**nek szokás hívni azt az állítást, amely szerint ha φ megoldása az $\dot{x}(t) - a_1(t)x(t) = a_0(t)$ egyenletnek, ψ pedig megoldása az $\dot{x}(t) - a_1(t)x(t) = b_0(t)$ egyenletnek, akkor $\varphi + \psi$ megoldása az $\dot{x}(t) - a_1(t)x(t) = a_0(t) + b_0(t)$ egyenletnek. Bizonyítsuk be ezt az állítást. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.15. feladat. Oldjuk meg az $\dot{x}(t)+2tx(t)=2t\mathrm{e}^{-t^2}+\mathrm{e}^{-t^2}$ egyenletet az állandók variálásának módszerével is, és a fenti feladat eredményének felhasználásával is. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.16. feladat. Adjuk meg a korábban már többször vizsgált $y'(x)=y(x)-x^2+2x-2$ differenciálegyenlet megoldásait, és ellenőrizzük a korábban tett kvalitatív megállapításokat. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.17. feladat. Mutassuk meg, hogy alkalmasan megválasztott tartományon az $y'(x)=\frac{y(x)}{2x+y(x)^3}$ differenciálegyenlet invertálható megoldásainak inverzére lineáris differenciálegyenlet vonatkozik. Ennek felhasználásával oldjuk meg az egyenletet. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.18. feladat. Legyen $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a,b\in\mathcal{C}(I), n\in\mathbb{R}$, és tekintsük az

$$\dot{x}(t)+a(t)x(t)=b(t)x(t)^n \tag{3.24}$$

Bernoulli-egyenletet a fölső vagy az alsó félsíkon, és mutassuk meg, hogy a $z:=x^{-n+1}$ függvényre nézve lineáris egyenletet jelent. Határozzuk meg az egyenlet összes megoldását. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.19. feladat. Oldjuk meg a $3y'(x)+y(x)=\frac{1}{y(x)^2}$ Bernoulli-egyenletet. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.20. feladat. Oldjuk meg az

$$x\int_0^x y(s)\mathrm{d}s=(x+1)\int_0^x sy(s)\mathrm{d}s \quad (x\in\mathbb{R}^+) \tag{3.25}$$

integrálegyenletet az $\mathbb{R}^+$ halmazon értelmezett folytonos függvények körében. (Megoldás: **??**. oldal.)

Az alábbi példa, illetve feladat a differenciálegyenletek szempontjából egyszerű, és ide kívánkozik, de némi előismereteket igényel a valószínűségszámítás és a komplex függvénytan köréből.

3.3. példa. Legyen $\lambda\in\mathbb{R}^+$. Oldjuk meg a $0=nx_n-\lambda x_{n-1} \quad (n\in\mathbb{N}_0)$ **elsőrendű differenciaegyenlet**et a $\sum_{n=0}^{+\infty}x_n=1$ mellékfeltétellel. (Az adott egyenlettípus definiálásának aprólékos feladatát az Olvasóra hagyjuk.) A megoldás során a sorozatok, illetve diszkrét valószínűségeloszlások meghatározására igen alkalmas **generátorfüggvény-módszer**t fogjuk bemutatni. Vezessük be a $G(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n \quad (z \in \mathcal{K}_1(0) \subset \mathbb{C})$ függvényt. Keressük meg ennek felhasználásával az egyenlet azon megoldásait, amelyekre a G függvényt értelmező hatványsor konvergens az egységkörlapon. Az ilyen függvényre nyilván fönnáll, hogy $z(G'(z) - \lambda G(z)) = 0$, innen $G(z) = K\mathrm{e}^{\lambda z}$. A mellékfeltétel a generátorfüggvényre azt jelenti, hogy $G(1) = 1$, vagyis $Ke^{\lambda} = 1$, tehát $K = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Innen $G(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$, s ezt a függvényt sorbafejtve kapjuk a megoldást, az úgynevezett **Poisson-eloszlás** tagjait: $x_n = \frac{\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$. Ez a valószínűségeloszlás úgynevezett ritka események valószínűségi leírására használatos, például ilyennel adhatjuk meg a kalács egy darabjában található mazsolák számát (és a hasonló, de komolyabb jelenségek leírását).

3.21. feladat. Oldjuk meg az $(n+1)x_{n+1} = qx_n(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ **elsőrendű differenciaegyenlet**et a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = 1$ mellékfeltétellel. (Megoldás: **??**. oldal.)

3.5. Egzakt egyenletek

3.4. példa. Az alábbi fontos, gyakran előforduló példa az eddigi fogalomrendszerrel nem kezelhető:

$$tdt + xdx = 0. \tag{3.26}$$

Ennek az „egyenlet”-nek a $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; t^2 + x^2 = C^2\} \quad (C \in \mathbb{R}^+)$ alakú körvonalak bizonyos értelemben megoldásai. Ugyanis, a (3.26) egyenletben „dt-vel osztva” ezt kapjuk: $t + x\frac{dx}{dt} = 0$, amit a $t + x(t)x'(t) = 0$ implicit, illetve az $x'(t) = -\frac{t}{x(t)}$ szétválasztható változójú egyenlettel azonosítva és megoldva az $x(t) = \pm\sqrt{C^2 - t^2} \quad (t \in]\!] -C, C[\![$ félköröket kapjuk megoldásként a fölső, illetve az alsó félsíkon. Ha viszont „dx-szel osztunk”, akkor ehhez jutunk: $t\frac{dt}{dx} + x = 0$, amit a $t(x)t'(x) + x = 0$ implicit, illetve a $t'(x) = -\frac{x}{t(x)}$ szétválasztható változójú egyenlettel azonosítva és megoldva a $t(x) = \pm\sqrt{C^2 - x^2} \quad (x \in]\!] -C, C[\![)$ félköröket kapjuk megoldásként a jobb, illetve a bal félsíkon. A nyílt síknegyedekben a kétféle módon kapott görbeívek megegyeznek.

A példa gondolatmenetét szeretnénk az alábbiakban általánosítani. Ehhez először bevezetjük a hányados jobboldalú differenciálegyenlet alkalmi, és első látásra üresnek tetsző fogalmát.

3.7. definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $P, Q \in \mathcal{C}(\Omega), H \subset \Omega$ pedig olyan tartomány, amelyen Q nem tűnik el; $\mathcal{D}_f := H,\ f := -\frac{P}{Q}$. Ekkor az

$$\dot{x} = -\frac{P}{Q} \circ (\mathrm{id}, x) \quad \text{avagy az} \quad \dot{x}(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))} \tag{3.27}$$

f jobboldalú differenciálegyenletet (a rá vonatkozó kezdetiérték-problémát) a (P, Q) függvénypárból konstruált, **hányados jobboldalú differenciálegyenletnek** (kezdetiérték-problémának) nevezzük.

3.11. megjegyzés.

1. Nyilvánvaló, hogy minden explicit közönséges, elsőrendű differenciálegyenlethez végtelen sok olyan (P, Q) függvénypár van, hogy az e függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenletnek és az eredetinek a jobb oldala (így természetesen megoldáshalmaza is) azonos.
2. A H halmazon egyenletünk így is írható

$$P(t, x(t)) + Q(t, x(t))\dot{x}(t) = 0. \tag{3.28}$$

   Ha értelmeztük volna általában az implicit elsőrendű egyenleteket (amit elsősorban az egzisztencia- és unicitástételek nehézkes alakja miatt kerültünk el), akkor úgy is fogalmazhattunk volna, hogy ezek közül a (3.28) alakúakat **kvázilineáris**aknak nevezzük. Ez az elnevezés ugyanis összhangban van azzal, amit a parciális differenciálegyenleteknél szokás használni, lásd a **??** szakaszt.

3.8. definíció. Ha a $(P, Q)|_H$ függvénypárhoz létezik olyan $F \in \mathcal{C}^1(H)$ függvény, amelyre

$$F' = (\partial_1 F, \partial_2 F) = (P, Q)|_H, \tag{3.29}$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az F függvény a $(P, Q)|_H$ **függvénypár primitív függvény**e.

3.9. definíció. Ha a $(P,Q)|_H$ függvénypárnak létezik primitív függvénye, akkor a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenletet **egzakt**nak nevezzük.

3.5. példa. Ha $\Omega := \mathbb{R}^2, P(t,x) = t, Q(t,x) = x$, akkor a (P,Q) függvénypárnak $F(t,x) := \frac{1}{2}(t^2+x^2) \quad ((t,x) \in \mathbb{R}^2)$ primitív függvénye.

- Ha $H := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, vagy $H := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$, akkor a $(P,Q)|_H$ függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt, mert $F|_H$ megfelel primitív függvénynek.
- Ha $H := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, vagy $H := \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$, akkor a $(Q,P)|_H$ függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt, mert $F \circ (\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_1)|_H$ megfelel primitív függvénynek.

Megfogalmazzuk annak az eljárásnak az általánosítását, ahogyan a 3.4. példa esetén a fölső és az alsó félkörhöz jutottunk el.

3.7. tétel. Ha a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt, és a (P,Q) függvénypárnak F tetszőleges primitív függvénye, akkor

1. $\mathcal{M}_f = \{x; x \in I_f, \exists c \in \mathcal{R}_F \quad F \circ (\mathrm{id}, x) = c(\cdot)|_{\mathcal{D}_x}\}$,
2. minden $(\tau,\xi) \in H$ esetén
$$\mathcal{M}_{f,\tau,\xi} = \{x; x \in I_f, \tau \in \mathcal{D}_x, F \circ (\mathrm{id}, x) = F(\tau,\xi)(\cdot)|_{\mathcal{D}_x}\},$$
3. minden $(\tau,\xi) \in H$ esetén a (τ,ξ) ponton átmenő megoldás globálisan egyértelmű.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt, legyen a (P,Q) függvénypár egy primitív függvénye F, és jelöljük a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán szereplő halmazt $\mathcal{N}$-nel. Ekkor $x \in \mathcal{M}_f$ esetén fennáll, hogy $x \in I_f$, és hogy
$$\dot{x} = -\frac{\partial_1 F \circ (\mathrm{id}, x)}{\partial_2 F \circ (\mathrm{id}, x)}, \tag{3.30}$$
vagy, átrendezve:
$$(F \circ (\mathrm{id}, x))' = 0(.)|_{\mathcal{D}_x}, \tag{3.31}$$

tehát $x \in \mathcal{N}$. Megfordítva, ha $x \in \mathcal{N}$, akkor $x \in I_f$, és fennáll (3.31), tehát (3.30) és így (3.27) is, ezért $x \in \mathcal{M}_f$.

2. Hasonlóan bizonyítható.
3. Tegyük fel ismét, hogy a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt, és legyen a (P,Q) függvénypár egy primitív függvénye F. 3. bizonyításához a 2.2. tétel miatt elegendő megmutatni, hogy minden $(\tau,\xi) \in H$ esetén a (τ,ξ) ponton átmenő megoldás lokálisan egyértelmű. Ez viszont következik az implicit függvény létezésére vonatkozó tételből, ha azt az $F_1 := F - F(\tau,\xi)(\cdot,\cdot)$ kétváltozós, valós értékű függvényre[2] alkalmazzuk a (τ,ξ) pontban.

■

3.6. példa. Legyen

$$\begin{gathered}\Omega := \mathbb{R}^2 \quad H := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (\tau,\xi) := (1,1)\\ \Omega \ni (p,q) \mapsto P(p,q) := 2pq^3 + q^5 \in \mathbb{R}\\ \Omega \ni (p,q) \mapsto Q(p,q) := 3p^2q^2 + 5pq^4 \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{3.32}$$

és tekintsük a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémát. Ennek lokális alakja tehát

$$\dot{x}(t) = -\frac{2t(x(t))^3 + (x(t))^5}{3t^2(x(t))^2 + 5t(x(t))^4} \quad (t \in \mathcal{D}_x) \quad x(1) = 1. \tag{3.33}$$

Észrevehetjük, hogy a $H \ni (u,v) \mapsto F(p,q) := p^2q^3 + pq^5 \in \mathbb{R}$ összefüggéssel értelmezett F függvény primitív függvénye a $(P,Q)|_H$ függvénypárnak, vagyis a (3.33) lokális alakú kezdetiérték-problémának globálisan egyértelmű megoldása minden olyan $x \in I_f$ függvény, amelyre

$$t^2(x(t))^3 + t(x(t))^5 = 2 \quad (t \in \mathcal{D}_x) \tag{3.34}$$

teljesül.

Az alábbiakban elégséges feltételt adunk a primitív függvény létezésére.

[2] $\mathcal{D}_{F(\tau,\xi)(\cdot,\cdot)} = H \subset \mathbb{R}^2$, míg a 2.-ben szereplő $F(\tau,\xi)(\cdot)$ függvény értelmezési tartománya a valós számok részhalmaza!

3.8. tétel. Tegyük fel, hogy $H \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány, és $(P,Q) \in \mathcal{C}^1(H)$. Ha
$$\partial_2 P = \partial_1 Q, \tag{3.35}$$
akkor a (P,Q) függvénypárnak létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. [**?**, 152. oldal] ■

A (3.35) feltételre úgy szokás hivatkozni, mint a keresztben vett parciális deriváltak megegyezésére. A tartományra vonatkozó feltétel („egyszeresen összefüggő") több, egyszerűbben ellenőrizhető feltétellel helyettesíthető: a tétel úgy is érvényes marad, ha a tartományról azt kötjuk ki, hogy konvex, vagy hogy pontra nézve csillagszerű.

3.7. példa. (A 3.6. példa folytatása.) Példánkban a tartomány az egész sík lévén egyszeresen összefüggő, a feltétel pedig teljesül, mivel $\partial_2 P(p,q) = 6pq^2 + 5q^4 = \partial_1 Q(p,q)$.

A későbbiekben meg fogunk adni egy egyszerű módszert a primitív függvény meghatározására.

3.5.1. A megoldások inverzére vonatkozó egyenlet

Most annak az általánosítása következik, ahogyan a 3.4. példa esetén a bal és a jobb félkörhöz jutottunk el. Az alábbi tétel a 3.7. tétellel teljesen analóg módon bizonyítható.

3.9. tétel. Legyen $G \subset \Omega$ olyan halmaz, ahol P nem tűnik el. Ha a $g := ((Q,P)|_G) \circ (\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_1)$ függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt, és a $(P,Q)|_G$ függvénypárnak F tetszőleges primitív függvénye, akkor

1. $\mathcal{M}_g = \{t; t \in I_g, \exists c \in \mathcal{R}_F \quad F \circ (t, \mathrm{id}) = c(\cdot)|_{\mathcal{D}_t}\}$,
2. minden $(\tau, \xi) \in G$ esetén
$$\mathcal{M}_{g,\xi,\tau} = \{t; t \in I_g, \xi \in \mathcal{D}_t, F \circ (t, \mathrm{id}) = F(\tau, \xi)(\cdot)|_{\mathcal{D}_t}\},$$
3. minden $(\tau, \xi) \in G$ esetén a (τ, ξ) ponton átmenő megoldás globálisan egyértelmű.

A 3.4. példa esetén a negyedkörívekről kimondott állítás is általánosítható.

3.10. tétel. Tekintsük a (3.27) hányados jobboldalú differenciálegyenletet olyan $G^* \subset H$ tartományon, ahol sem P, sem Q nem tűnik el (azaz $0 \notin \mathcal{R}_{PQ|_{G^*}}$).

Legyen $f := -\frac{P}{Q}|_{G^*}, g := -\frac{Q}{P} \circ (\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_1)|_{G^*}$. Ekkor a megoldáshalmazokra fennáll az alábbi két összefüggés.

$$\mathcal{M}_g = \{t; t = x^{-1}, x \in \mathcal{M}_f\}, \tag{3.36}$$

$$\mathcal{M}_f = \{x; x = t^{-1}, t \in \mathcal{M}_g\}. \tag{3.37}$$

Bizonyítás. A (3.36) egyenlőség igazolásához jelölje a jobb oldalon szereplő halmazt $\mathcal{N}$. Az $\mathcal{N}$ halmaz definíciója értelmes, ugyanis, ha $x \in \mathcal{M}_f$, akkor x folytonosan differenciálható, és deriváltját (3.27) adja meg. Ez utóbbi összefüggésből és $0 \notin \mathcal{R}_{P|_{G^*}}$-ból következik, hogy x invertálható. Legyen most $t \in \mathcal{M}_g$. Ekkor $t \in I_g$, vagyis $t \subset G^*$ függvény, $\mathcal{D}_t$ nyílt intervallum, és t folytonosan differenciálható. Így egyrészt $\mathcal{R}_t$ is nyílt intervallum, másrészt $0 \notin \mathcal{R}_{Q|_{G^*}}$ miatt t invertálható. Ha $x := t^{-1}$, akkor $x \subset G^*$ függvény, $\mathcal{D}_x = \mathcal{R}_t$ nyílt intervallum, és x folytonosan differenciálható, tehát $x \in I_f$. Az x függvény deriváltja az inverz függvény deriváltjára vonatkozó tételből (3.30) felhasználásával adódik:

$$\dot{x} = \frac{1}{t' \circ t^{-1}} = \frac{1}{-\frac{Q}{P} \circ (t, \mathrm{id}) \circ t^{-1}} = -\frac{P}{Q} \circ (\mathrm{id}, x). \tag{3.38}$$

Találtunk tehát egy $x \in \mathcal{M}_f$ függvényt, amellyel $t = x^{-1}$, így beláttuk, hogy $t \in \mathcal{N}$. Megfordítva, legyen most $t \in \mathcal{N}$. Ekkor, mivel $t = x^{-1}, x \in \mathcal{M}_f$, ezért $t \subset G^*$ függvény, $D_t = \mathcal{R}_x$ nyílt intervallum, t folytonosan differenciálható. Mivel $0 \notin \mathcal{R}_{P|_{G^*}}$, azért az inverz függvény deriváltjára vonatkozó tétel miatt

$$t' = \frac{1}{\dot{x} \circ x^{-1}} = \frac{1}{-\frac{P}{Q} \circ (\mathrm{id}, x) \circ x^{-1}} = -\frac{Q}{P} \circ (x, \mathrm{id}), \tag{3.39}$$

azaz $t \in \mathcal{M}_g$. A (3.37) egyenlőség hasonlóan bizonyítható, de következik abból a tényből is, hogy ha $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ két, invertálható függvényekből álló halmaz, és $\mathcal{M}_2 = \{t; t = x^{-1}, x \in \mathcal{M}_1\}$, akkor $\mathcal{M}_1 = \{x; x = t^{-1}, t \in \mathcal{M}_2\}$. ■

3.8. példa. (A 3.6. példa folytatása.) A fenti állításban a $G^* := H$ választással élve fennáll, hogy

$$t'(p) = -\frac{3t(p)^2 p^2 + 5t(p)p^4}{2t(p)p^3 + p^5} \quad p \in \mathcal{D}_t, t(1) = 1, \tag{3.40}$$

továbbá (3.34) alapján teljesül, hogy

$$(t(p))^2 p^3 + t(p)p^5 = 2. \tag{3.41}$$

A (3.41) állítás megfogalmazását az általános esetben (egzakt differenciálegyenletekre) az Olvasóra hagyjuk. (Ennél az egyszerű példánál $t(p)$ explicite kifejezhető, s ebből kiderül, hogy a teljes megoldás értelmezési tartománya az egész $\mathbb{R}^+$ halmaz.)

3.5.2. A primitív függvény meghatározása

Az egzakt differenciálegyenletekben szereplő (P,Q) függvénypár primitív függvénye viszonylag egyszerűen meghatározható. A primitív függvényt szokásosan vonalintegrállal számolják ki ([**?**, 134–163. oldal], [**?**, 96–121. oldal], [**?**, 148–159. oldal], [**?**, 264. oldal]); itt egy egyszerűbb eljárást mutatunk.

3.11. tétel. Ha $H \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány, $P, Q, \partial_2 P, \partial_1 Q \in \mathcal{C}(H)$, és $\partial_2 P = \partial_1 Q$, akkor minden $(\tau, \xi) \in H$ ponthoz, és a (P,Q) függvénypár (τ, ξ) pontban eltűnő primitív függvényéhez létezik τ-nak olyan $\mathcal{K}(\tau)$ és ξ-nek olyan $\mathcal{K}(\xi)$ környezete, melyekre $\mathcal{K}(\tau) \times \mathcal{K}(\xi) \subset H$, valamint létezik olyan $c \in \mathcal{C}^1(\mathcal{K}(\xi), \mathbb{R})$ és $d \in \mathcal{C}^1(\mathcal{K}(\tau), \mathbb{R})$ függvény, amelyekre $c(\xi) = 0$, $d(\tau) = 0$. Továbbá tetszőleges $(p,q) \in \mathcal{K}(\tau) \times \mathcal{K}(\xi)$ esetén

$$F(p,q) = \int_\tau^p P(\cdot, q) + c(q) = \int_\xi^q Q(p, \cdot) + d(p), \tag{3.42}$$

ahol a c és d függvény az alábbi közvetlenül integrálható differenciálegyenletek megoldása:

$$\frac{\partial \int_\tau^p P(\cdot, q)}{\partial q} + c'(q) = Q(p,q),$$
$$P(p,q) = \frac{\partial \int_\xi^q Q(p, \cdot)}{\partial p} + d'(p).$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy a (P,Q) függvénypárnak létezik primitív függvénye. Mivel a H halmaz nyílt, ezért tetszőleges $(\tau, \xi) \in H$ pont esetén létezik τ-nek olyan $\mathcal{K}(\tau)$, és ξ-nak olyan $\mathcal{K}(\xi)$ környezete, amelyekre $\mathcal{K}(\tau) \times \mathcal{K}(\xi) \subset H$ teljesül. Legyen $(p,q) \in \mathcal{K}(\tau) \times \mathcal{K}(\xi)$ olyan, tetszőlegesen választott pont, amelyre $\tau < p, \xi < q$, Értelmezzük a χ és ψ függvényt a következőképpen: $[\xi,q] \ni t \mapsto \chi(t) := (\tau,t)$; $[\tau,p] \ni t \mapsto \psi(t) := (t,q)$. Nyilván mindkettő egy-egy egyszerű sima görbe paraméterezése. A két görbe φ egyesítése a $\mathcal{K}(\tau) \times \mathcal{K}(\xi)$ halmazban halad, és L alakú töröttvonallal összeköti a (τ,ξ) és a (p,q) pontot. A (P,Q) függvénypár (τ,ξ)-ban eltűnő primitív függvényét jelöljük F-fel, ekkor az F függvény (p,q) pontban felvett értéke a (P,Q) függvénypár fenti görbe mentén vett vonalmenti integráljával egyenlő: $F(p,q) = \int_\varphi (P,Q)$. A vonalintegrál definíciója alapján:

$$\begin{aligned}\int_\varphi (P,Q) &= \int_\xi^q <(P,Q)\circ\chi,\dot\chi> + \int_\tau^p <(P,Q)\circ\psi,\dot\psi> \\ &= \int_\xi^q Q(\tau,\cdot) + \int_\tau^p P(\cdot,q). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Ha a (nyilvánvalóan folytonosan differenciálható) $\mathcal{K}(\tau) \ni q \mapsto \int_\xi^q Q(\tau,\cdot)$ függvényt c jelöli, akkor $F(p,q) = \int_\tau^p P(\cdot,q) + c(q) \quad (p,q) \in \mathcal{K}(\tau) \times \mathcal{K}(\xi)$. Hasonlóan látható be az állítás, ha $\tau \geq p$ vagy $\xi \geq q$. Az állítás második része analóg módon bizonyítható. ■

3.9. példa. (A 3.6. példa folytatása.) Keressük most a példa primitív függvényét a fenti állítás módszerével

$$F(p,q) = \int_1^p (2q^3\mathrm{id} + q^5) + c(q) = p^2q^3 - q^3 + q^5p - q^5 + c(q) \tag{3.44}$$

alakban. Mivel azonban $\partial_2 F = Q$, azaz

$$3p^2q^2 - 3q^2 + 5pq^4 - 5q^4 + c'(q) = 3p^2q^2 + 5pq^4,$$

azért a c függvénynek teljesítenie kell a

$$c'(q) = 3q^2 + 5q^4, \tag{3.45}$$

differenciálegyenletet, valamint a kezdeti feltétel miatt a

$$c(1) = 0 \tag{3.46}$$

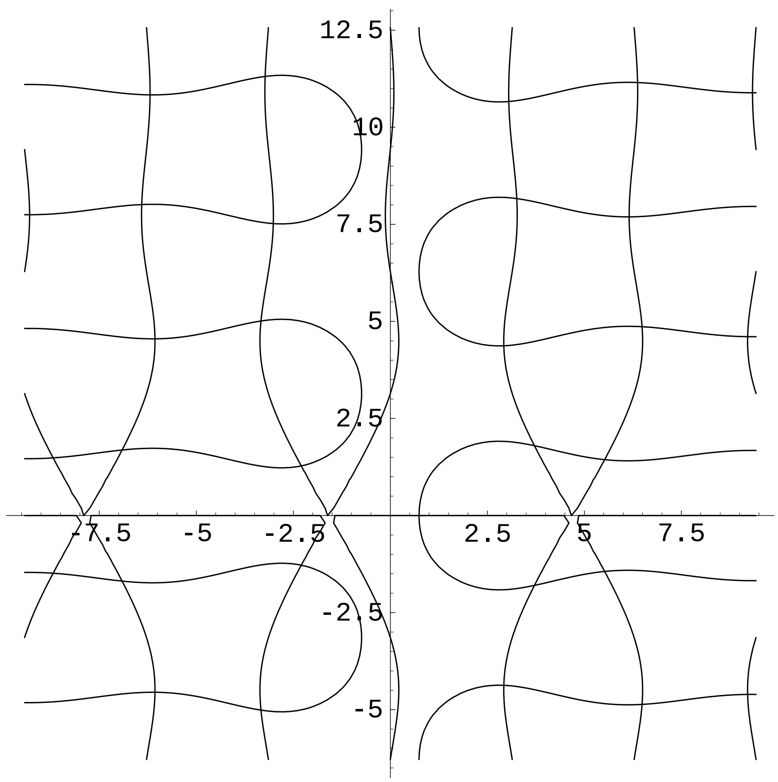
összefüggést is. Viszont (3.45) és (3.46) együtt egy közvetlenül integrálható differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma lokális alakja. Ennek megoldása: $c = \mathrm{id}^3 + \mathrm{id}^5 - 2$, így tehát (3.44) alapján $F(p,q) = p^2q^3 + pq^5 - 2$.

Tekintsünk még egy tanulságos példát.

3.10. példa. Határozzuk meg a

$$(\sin(x) + x\sin(t))\mathrm{d}t + (t\cos(x) - \cos(t))\mathrm{d}x = 0$$

egyenlet $(0,1)$ ponton átmenő megoldását. Első részfeladatunk olyan tarto-



3.1.. ábra. Az értelmezési tartomány meghatározásához

mány keresése, amely tartalmazza az $(0,1)$ pontot, és amelyben legalább az egyik együtthatófüggvény nem tűnik el. Legyen

$$P(p,q) := \sin(q) + q\sin(p) \quad Q(p,q) := p\cos(q) - \cos(p) \quad ((p,q) \in \mathbb{R}^2).$$

A 3.1. ábra mutatja azokat a pontokat, ahol a két függvény valamelyike eltűnik. Az is látható, hogy a $(0,1)$ pontnak van olyan $H \subset \mathbb{R}^2$ környezete, amelyben egyik együtthatófüggvény sem tűnik el, így mindegy, hogy a fölmerülő két egyenlet közül melyikre gondolunk. (Hogyan tudnánk ezt a látszatot alkalmas becslésekkel alátámasztani?) Nem ez lenne a helyzet a $(0,0)$ pontnál, vagy az $(\pi/2, \pi/2)$ pontnál, amelyikben csak az egyik együttható tűnik el, és a $(3.71367, 1.79918)$ pontban, ahol eddigi ismereteinkkel nem tudunk mit kezdeni, mivel mind a két együtthatófüggvény eltűnik. H egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, ezen a keresztben vett parciálisok megegyeznek, ugyanis $\partial_2 P(p,q) = \cos(q) + \sin(p) = \partial_1 Q(p,q)$. Integrálásssal kapjuk, hogy a (P,Q) függvénypár egy primitív függvénye csak $(p,q) \mapsto p\sin(q) - q\cos(p) + c(q)$ lehet, deriválással kapjuk viszont, hogy a $p\cos(q) - \cos(p) + c'(q) = p\cos(q) - \cos(p)$ egyenlőségnek kell fennállnia. Így tehát $c'(q) = 0$, és egy primitív függvény: $(p,q) \mapsto p\sin(q) - q\cos(p)$. A kezdetiérték-probléma megoldását pedig innen lehet kifejezni: $t\sin(x(t)) - x(t)\cos(t) = -1$, annak inverz függvényére pedig ez áll fenn: $t(x)\sin(x) - x\cos(t(x)) = -1$.

3.6. Egzakttá tehető egyenletek

A 3.6. példa további elemzésével kiderítjük, mit kezdhetünk egy hányados jobboldalú, de nem egzakt differenciálegyenlettel.

3.11. példa. (A 3.6. példa folytatása.) Az eredeti differenciálegyenlet megoldáshalmaza nyilván ugyanaz, mint az alábbi lokális alakú differenciálegyenleté

$$\dot{x}(t) = -\frac{2tx(t) + (x(t))^3}{3t^2 + 5t(x(t))^2} \quad (t \in \mathcal{D}_x). \tag{3.47}$$

Ez az egyenlet viszont nem egzakt, amint azt a keresztben vett parciálisok különbözősége mutatja. A (3.33) és (3.47) egyenletek összevetésével juthatunk arra a gondolatra, hogy ha eredetileg (3.47)-t kellett volna megoldanunk, akkor bővíthettük volna úgy egy alkalmas kifejezéssel a (3.47) jobb oldalán szereplő hányadost, hogy eredményül egzakt differenciálegyenletet kapjunk. Ezt az Eulertől származó ötletet hasznosítjuk az alábbiakban.

3.10. definíció. A (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet **integráló tényező**je (vagy **multiplikátor**a) a $\mu_+ \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R}^+)$ (vagy a $\mu_- \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R}^-)$) függvény, ha a $(\mu_\pm P, \mu_\pm Q)$ függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenlet egzakt.

3.12. tétel. Ha $H \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány, $P, Q \in \mathcal{C}^1(H)$, akkor a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenletnek a $\mu_\pm \in \mathcal{C}^1(H,\mathbb{R}^\pm)$ függvény akkor és csak akkor integráló tényezője, ha

$$\mu_\pm(\partial_2 P - \partial_1 Q) = Q\partial_1\mu_\pm - P\partial_2\mu_\pm. \tag{3.48}$$

Bizonyítás. Az állítás a 3.8. tétel, valamint a 3.8. és a 3.10. definíció közvetlen következménye. ∎

3.12. példa. Tekintsük a (P,Q) függvénypárból konstruált, hányados jobboldalú differenciálegyenletet! Tegyük fel, hogy $H \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő, és hogy $P,Q \in \mathcal{C}^1(H), 0 \notin \mathcal{R}_{P|_H}$. Ekkor a (3.27) differenciálegyenlethez (3.48) szerint pontosan akkor létezik olyan folytonosan differenciálható $\mu_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ függvény, amellyel $\mu := \mu_2 \circ \mathrm{pr}_2$ integráló tényezője az egyenletnek, ha létezik olyan folytonos $l \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ függvény, amellyel

$$\frac{\partial_2 P - \partial_1 Q}{P} = l \circ \mathrm{pr}_2 \tag{3.49}$$

teljesül. Ez esetben tetszőleges $c \in \mathcal{D}_l$ esetén a $\mu_2 := \exp\circ(-\int_c l)$ összefüggéssel értelmezett μ_2 függvényből származtatott $\mu := \mu_2 \circ \mathrm{pr}_2$ függvény integráló tényezője az egyenletnek.

A példa állításainak bizonyítását az Olvasóra hagyjuk. A példában szereplő integráló tényezőről azt szokták mondani, hogy „x-től függő.” Hagyományos példatárak általában a (3.49) összefüggéshez hasonlók sokaságát tartalmazzák, lásd például [**?**, **?**].

3.13. példa. (Folytatás.) A (3.47) hányados jobboldalú differenciálegyenletnél $P(p,q) = 2pq + q^3, \quad Q(p,q) = 3p^2 + 5pq^2 \quad ((p,q) \in H)$, így tehát a keresztben vett parciálisok nem egyeznek meg: $\partial_2 P(p,q) = 2p + 3q^2 \neq \partial_1 Q(p,q) = 6p + 5q^2$. Ha alkalmazni akarjuk az előző példa eredményét, akkor meg kell vizsgálnunk, hogy a $H \ni (p,q) \mapsto k(p,q) := \frac{\partial_2 P(p,q) - \partial_1 Q(p,q)}{P(p,q)} = -\frac{2}{q}$ függvényhez létezik-e olyan $l \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ folytonos függvény, amellyel $k = l \circ \mathrm{pr}_2$ fönnáll. Könnyen látható, hogy $l = -\frac{2}{\mathrm{id}}$ például megfelel, tehát például $\mu_2 := \mathrm{id}^2$ megfelelő, s a q^2-tel való beszorzás eredményeként éppen a (3.33) egyenletet kapjuk.

Bár a példatárakban mindig ilyen egyszerű feladatok szerepelnek (némiképp félrevezetve ezáltal a olvasót), a problémának nemtriviális része annak megállapítása, hogy adott, folytonosan differenciálható $k,m \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$

függvényekhez mikor létezik olyan $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amellyel $k = l \circ m$ teljesül. Erre ad elégséges feltételt a fentebb már használt 3.5. tétel.

3.7. Alkalmazások

Mielőtt további részletekbe belemennénk, illetve újabb területeken való alkalmazásokat mutatnánk, fölhívjuk a figyelmet néhány hasznos könyvre. A [**?**] könyvecske a szokásos geometriai és fizikai példákon jóval túlmegy. A [**?**, 408–411. oldal] táblázatai matematikusnak és alkalmazónak egyaránt tanulságosak: néhány egyszerű egyenlet sok különböző interpretációját mutatják meg. Kiderül belőlük, hogy mi az előforduló változók és paraméterek jelentése. Az Olvasó gyakorlásként kiegészítheti a táblázatokat a változók és paraméterek lehetséges, leggyakrabban használt mértékegységével. A [**?**] könyv folyamatosan, menet közben igen nagy hangsúlyt fektet az alkalmazásokra, számos meglepő és érdekes példát hoz valóságos adatokkal együtt.

3.7.1. Gépkocsi fékútjának kiszámítása

3.14. példa. Egy gépkocsi $72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{ó}}$ sebességgel egyenletesen lassulva 10 s alatt áll meg. Mennyi utat tesz meg ezalatt?

Ha a gépkocsi sebességét a fékezés kezdetétől eltelt t idő múlva $v(t)$ jelöli, akkor a feltételek a következőket jelentik: $\dot{v}(t) = a \quad v(0) = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad v(10) = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A $\dot{v}(t) = a$ közvetlenül integrálható egyenlet $t \mapsto at + b$ megoldásában szereplő két paraméter innen számolható: $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = a \cdot 0\mathrm{s} + b \quad 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = a \cdot 10\mathrm{s} + b$, tehát $a = -2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, b = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ha a fékezés óta megtett út $s(t)$, akkor erről azt tudjuk, hogy $\dot{s}(t) = v(t) = -2t\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, s(0) = 0\mathrm{m}$, így $s(t) = -t^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$, tehát a fékút $s(10) = 100\mathrm{m}$.

3.7.2. Radioaktív kormeghatározás

3.15. példa. [**?**, 86. feladat] Egy bányakőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a bányakőzet korát. Tegyük fel, hogy keletkezése pillanatában a bányakőzet nem tartalmazott ólmot, és hanyagoljuk el a rádioaktív bomlási sorban az urán és az ólom között lévő termékeket (mivel ezek az uránnál lényegesen gyorsabban bomlanak). Ha 238 g uránból 206 g ólom keletkezik, akkor 14 mg ólom $14 \cdot \frac{238}{206} = 16,1748$ mg urán teljes elbomlásának terméke. Kezdetben a kőzetben összesen $100 + 16,1748$ mg urán volt. Az urán bomlására a következő kezdetiérték-problémát írhatjuk föl: $\dot{x} = -kx$, $x(0) = 116,1748$. A k együttható értékét a felezési időből a következőképpen határozhatjuk meg: $x(4,5 \cdot 10^9) = x(0)\mathrm{e}^{-4,5\cdot 10^9 k} = \frac{x(0)}{2}$, tehát $k = \frac{\ln(2)}{4,5\cdot 10^9} = 1,54033 \cdot 10^{-10}$. A kőzet kialakulásától máig eltelt T időtartamról pedig ezt tudjuk: $116,1748\mathrm{e}^{-1,54033\cdot 10^{-10} T} = 100$. Innen: a kőzet élettartama $9,73335 \cdot 10^8$ év.

A témakört sokkal részletesebben tárgyalja [**?**, 11–19. oldal]

3.7.3. Oldatok; áramlás

3.22. feladat. A 10 l vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 l/perc sebességgel. Az edénybe belépő folyadék öszekeveredik a vízzel, és a keverék ugyanolyan sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.23. feladat. A 200 m^3 térfogatú szobában $0,15\%$ CO_2 gáz van. A ventillátor percenként 20 m^3 $0,04\%$ CO_2-t tartalmazó levegőt fúj be. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében a CO_2 mennyisége a harmadára? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.7.4. Fényelnyelés, láncgörbe

Alkalmazásokhoz kapcsolódó példáink többségében időbeli folyamatok szerepelnek. Itt olyan alkalmazásokról szólunk, ahol a független változót nem időként interpretáljuk.

3.16. példa. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a fény intenzitása, amint egy átlátszó edényben tartott c koncentrációjú oldaton keresztülhalad. Jelölje a fény intenzitását az oldatba való behatoláskor I_0, a behatolástól x távolságban $I(x)$. A fényintenzitás megváltozása a kicsiny $[x, x+\delta]$ intervallumon való áthaladáskor az intervallum hosszával (ez az elnyelő réteg vastagsága), az oldat koncentrációjával és magával az intenzitással arányos. Azaz valamilyen $k \in \mathbb{R}$ állandóval $I(x+\delta) - I(x) = -kI(x)c\delta + \varepsilon(\delta)\delta$, ahol szokott módon $\lim_0 \varepsilon = 0$. Ebből az összefüggésből szintén a szokásos módon kapjuk, hogy az I függvény kielégíti az $I'(x) = -kcI(x)$ differenciálegyenletet. Ennek megoldása az $I(0) = I_0$ kezdeti feltétel mellett $x \mapsto I(x) = I_0\mathrm{e}^{-kcx}$, Tehát az intenzitás egy d vastagságú rétegen keresztülhaladva: $I(d) = I_0\mathrm{e}^{-kcd}$.

Ezt az összefüggést logaritmikus alakjában fölírva kapjuk a **Lambert–Beer-törvényt**:[3] [4] $\ln\left(\frac{I_0}{I(d)}\right) = kcd$. Megjegyzendő, hogy az optikai koncentráció-mérés alapja ez a törvény, amely kis koncentrációk esetében valóban jól írja le az oldatok fényelnyelését.

3.24. feladat. Milyen alakot vesz fel egy két végén felfüggesztett kötél saját súlyának hatására? (Megoldás: **??**. oldal.)

3.8. Mathematica az egyszerű típusok megoldásánál

Oldjunk meg egy közvetlenül integrálható egyenletet, és az eredményt helyettesítsük is be az eredeti egyenletbe. Az eredményt tiszta függvény alakjában akarjuk megkapni, mert szükségünk lesz majd a deriváltjára is.

```
egy={y'[x]==Sqrt[x Sqrt[x Sqrt[x]]],y[1]==1};
ds=DSolve[egy,y,x][[1]]
```

```
{y->(7+8#1^(15/8))/15}
```

Behelyettesítünk az egyenletbe és a kezdeti feltételbe, majd vesszük az eredmények logikai konjunkcióját.

```
And@@PowerExpand[egy/.ds]
```

```
True
```

Nem okoz gondot a 64. oldalon kitűzött, homogén egyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma sem.

```
DSolve[{y'[x]==(y[x]+x-2)/(y[x]-x-4),y[1]==1},y[x],x]
```

```
{{y[x]->4+x-Sqrt[2]Sqrt[5+2x+x^2]}}
```

Azt magunknak kell észrevennünk, hogy a kapott megoldás az egész számegyenesen értelmezve van.

A generátorfüggvénnyel megoldott feladatot közvetlenül is meg tudjuk oldani.

```
<<DiscreteMath'
rs=RSolve[(n+1)x[n+1]==l x[n],x[n],n][[1]]
```

```
{x[n]->l^n C[1]/n!}
```

```
csol=Solve[Sum[x[n]/.rs,{n,0,Infinity}]==1,C[1]][[1]]
```

[3] Lambert, Johann Heinrich (1728–1777): német fizikus.

[4] Beer, August (1825–1863): német fizikus.

```
{C[1]->e^{-l}}
```

```
x[n]/.rs/.csol
```

```
e^{-l}l^n/n!
```

Próbáljuk megoldani a legegyszerűbbnek tűnő

$$y'(x) = x^2 + y(x)^2 \tag{3.50}$$

Riccati[5]-féle differenciálegyenletet.

```
ds=DSolve[y'[x]==x^2+y[x]^2,y[x],x];
PowerExpand[FullSimplify[ds]]
```

```
{{y[x]->
x(-BesselJ[-3/4,x^2/2]+BesselJ[3/4,x^2/2]C[1])/
(BesselJ[1/4,x^2/2]+BesselJ[-1/4,x^2/2]C[1])}}
```

3.12. megjegyzés. Gondolkodjunk itt el azon a tényen, hogy habár az elemi függvények fogalma pontosan definálható, mégis történeti képződmény; nem mondhatjuk, hogy ennek a halmaznak az elemei valamilyen belső matematikai szempontból kitüntetettek lennének. Mivel ma már például az eredményben szereplő Bessel[6]-féle függvényekről épp olyan sokat tudunk szimbolikus és numerikus szempontból egyaránt, mint a trigonometrikus függvényekről, teljes joggal belevehetnénk az elemi függvények definíciójánál a kiindulásul vett függvények közé ezeket is. Mindez nem érinti annak az állításnak az igazságát, amely szerint a (3.50) egyenlet megoldása nem fejezhető ki a (hagyományos értelemben vett) elemi függvényekkel [**?**].

Az egzakt differenciálegyenletek megoldása hosszú, rutinjellegű számolásokat igényel. Ezek egy része például így gépesíthető.

```
Egzakt[Pval_,Qval_,vars:{x,y}]:=
Module[{p=vars[[1]],q=vars[[2]],fi},
If[D[Pval,q]==D[Qval,p],
(F[u_,v_]=Integrate[Pval, p]+fi[q];
F[u,v]/.DSolve[D[F[p,q],q]==Qval,fi[q],q][[1]]),
"Az egyenlet nem egzakt."]]
```

Ezek után alkalmazzuk a programot a részletesen tárgyalt példára.

[5] Riccati, Jacopo Francesco (1676–1754): olasz matematikus.

[6] Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846): német csillagász, geodéta, geofizikus és matematikus.

```
Exact[2uv^3+v^5,3u^2v^2+5uv^4,{u,v}]
u^2v^3+uv^5+C[1]
```