



Felrobbanás vizsgálata
polinomiális és kvázipolinomiális
közönséges differenciálegyenletekben

Csikja Rudolf
Matematikai Analízis Tanszék

Konzulens:
dr. Tóth János

2006. október 26.

Kivonat

Az alábbiakban ismertebb és kevésbé ismert eljárásokat mutatunk be a felrobbanás jelenségének vizsgálatára a polinomiális, illetve kvázipolinomiális közönséges differenciálegyenletekben. A bevezető illusztráló példa és a probléma megfogalmazása után ötféle megközelítésben tárgyaljuk a probléma megoldási lehetőségeit. A lineáris rendszerekkel kezdve mondunk ki egy alapvető tételt, majd ezt kvadratikus, illetve azzal közelíthető rendszerekkel folytatjuk és végül az általános polinomiális, illetve kvázipolinomiális egyenleteket tárgyaljuk, illetve néha olyan állítások is megfogalmazódnak, melyek az általánosabb autonóm egyenletekre is igazak. A dolgozatban megpróbálunk a reakciókinetika szempontjából fontosabb új következtetéseket levonni a részletesen ismerttetett, kevésbé elterjedt módszerekből; az első integrálon és a Ljapunov-függvényen alapuló módszerek általánosabb vizsgálatával ugyanis már sokan foglalkoztak.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Bevezető példa	1
1.2. A felrobbanás definíciója	3
2. Legfeljebb lineárisan növő jobboldal	4
3. Elemi becslések, lineáris algebrai módszerek	5
4. Differenciálegyenletek transzformációja	8
4.1. Kvázimonomiális transzformáció	8
4.2. Lotka–Volterra-féle univerzális alak	12
4.2.1. Transzformáció LV-alakra	12
4.2.2. Alkalmazás: a (4.1) egyenlet Taylor-sor alakú megoldása . .	13
4.2.3. Alkalmazás: LV-alak, mint hiányos kvadratikus egyenlet . .	15
4.3. Poincaré linearizációs elmélete	17
5. Painlevé-analízis	20
5.1. Fix pont körüli lokális analízis	20
5.2. Szinguláris hely körüli lokális analízis	24
5.3. Painlevé-tulajdonság és -teszt	25
5.4. Transzformált rendszer	26
5.5. Painlevé-teszt és az instabilis sokaság	28
5.6. A Pszi-sor konvergenciája	29
5.7. A felrobbanás vizsgálata	30
6. Első integrál	31
7. Ljapunov-függvény	32
8. Alkalmazások	32
8.1. Nemlineáris rezgőkör	32
8.2. A Volterra–Lotka-reakció	34
8.3. Egy termokinetikai példa	35

1. Bevezetés

A dolgozat célja olyan ismert és kevésbé ismert módszereket bemutatni, melyek alkalmasak arra, hogy a közönséges differenciálegyenletek egy nagy csoportján, – ahol a jobb oldalon az ismeretlen függvények polinom, illetve kvázipolinomalakú kifejezése áll – az időbeli szingularitásokat detektálni és lokalizálni azok helyét. Az alkalmazásokban igen fontos szerepe lehet, hiszen egyes esetekben fizikai jelentést is hordoz, illetve ha ez fizikailag értelmetlen, lehetetlen, akkor a valóságos fizikai rendszerre felállított modell újragondolására ösztönözhet minket.

A lineáris rendszerekről tudunk elmondani a legtöbbet általánosságban, ez már egy régen és igen jól kidolgozott elmélet. A jóval általánosabb nemlineáris egyenletről pedig sokkal kevesebbet tudunk mondani. A probléma kezelhetőségét illetően valahol a kettő között helyezkednek el a polinomiális egyenletek. Mi az utóbbi egyenlettípussal fogunk foglalkozni, illetve ezen belül is egy gyakorlati problémakörrel, mégpedig az ilyen egyenletekben való felrobbanás jelenségével. Természetesen mivel továbbra is közönséges differenciálegyenletekről, vagyis korrekt kitűzésű feladatról van szó, ezért a megoldásokra fennáll az

- ❖ egzisztencia,
- ❖ unicitás,
- ❖ és a kezdeti értékektől (és a paramétereiktől) való folytonos függés.

Tudjuk, hogy a lineáris rendszerek megoldásainak értelmezési tartománya maximális (egy későbbi fejezetben ezzel részletesebben foglalkozunk). Az alábbiakban viszont látni fogjuk, hogy ez nem minden esetben van így nemlineáris jobb oldal esetén.

1.1. Bevezető példa

Az egyik, lehető legegyszerűbb példán keresztül fogjuk bemutatni, hogy a dolgozatban tárgyalt egyenlettípusok megoldásának hogyan is alakulhat az értelmezési tartománya, amiből fontos gyakorlati következtetést fogunk levonni. Legyen a differenciálegyenlet, illetve kezdetiérték-probléma az

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}x^3(t) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^+,$$

ekkor a jobb oldal egy alkalmas értelmezési tartománya $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. A fenti kezdeti érték esetén a teljes megoldás a

$$\left(-\infty, \frac{1}{x_0^2}\right) \ni t \mapsto x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2}{1-x_0^2 t}}$$

függvény, aminek az értelmezési tartománya nem egyezik meg az egész \mathbb{R} intervallummal, hanem felülről korlátos, mégpedig:

$$t_* := \sup \mathcal{D}_x = \frac{1}{x_0^2}.$$

A fenti eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a megoldásnak (valós) szingularitása van véges pontban, ami függ a kezdeti feltételtől. Az ilyenfajta szingularitás az angol szakirodalomban **movable singularity** néven ismert, – ami igen beszédes kifejezés, hiszen valóban mozgatható olyan értelemben, hogy a kezdeti érték változásával együtt a szingularitás helye is változik.

Gyakorlatibb megfogalmazásban azt is mondhatjuk, hogy a megoldás **felrobban** – a jelenség neve az angol szakirodalomban **blow up**. A felrobbanás is teljesen jogos kifejezés, hiszen gondoljunk bele, hogy mi történik akkor, ha ez a megoldás például egy kémiai reakcióban résztvevő anyag koncentrációját írja le. Konkrétan a fenti példában t_* időpontban következik be a felrobbanás, bármilyen $x_0 \in \mathbb{R}^+$ kezdeti értékre.

Az előző példában könnyű dolgunk volt, hiszen egyszerűen meg tudtuk határozni az analitikus megoldást, így ebből rögtön látszott is, hogy milyen feltételek mellett, és pontosan mikor következik be a felrobbanás. Viszont, ha általánosítani szeretnénk a problémát, – nem meglepő módon – nehézségekbe ütközünk. Ráadásul ezzel a témával kapcsolatban a meghatározó cikkek száma is igen csekély.

A kérdések, melyeknek megválaszolására a dolgozat további részében próbálkozunk a következők:

- ❖ Milyen feltételek mellett következik be felrobbanás?
- ❖ Ha bekövetkezik, akkor milyen időpontban?

Ahhoz, hogy a kérdéseket, akár csak részben megválaszolhassuk először is be kell vezetnünk a felrobbanás fogalmát, továbbá a kérdéseinket át kell fogalmaznunk a matematika nyelvére. A formális reakciókinetika definícióit, állításait és alapvető hivatkozásait illetően a [8] könyvre utalunk; azokat itt nem ismételjük meg.

1.2. A felrobbanás definíciója

Tekintsük a következő elsőrendű rendszert:

$$\dot{x} = f \circ x,$$

ahol tehát $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ polinom¹, vagy lokális alakban:

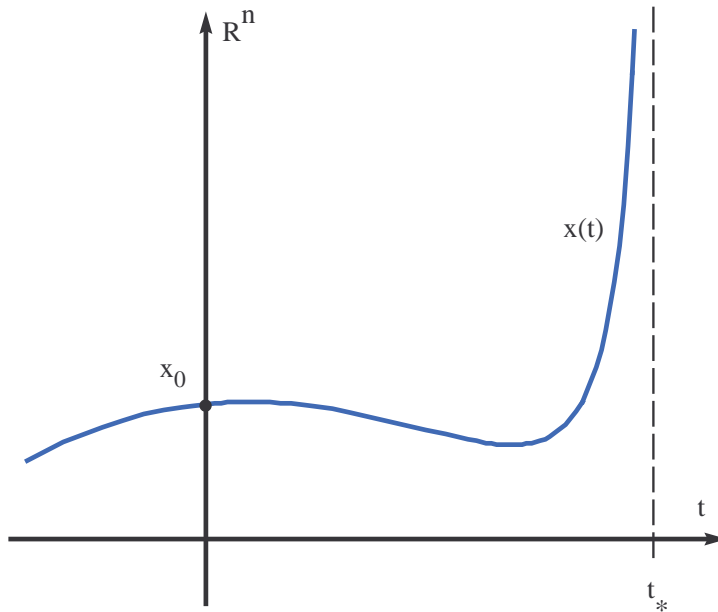
$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_x).$$

Ennek a rendszernek az általános megoldása, – ami ez esetben mindig létezik – n számú állandót tartalmaz, és $t \mapsto x(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$ alakú, ahol c_i tetszőleges állandó. Legyen adott az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétel, ekkor a megoldás, – az unicitás következtében – felírható $t \mapsto x(t, x_0)$ alakban.

1. Definíció. *A megoldás véges időn belül felrobban (1. ábra), ha létezik olyan $t_* \in \mathbb{R}^+$ és $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy bármely $M \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre:*

$$t_* - t < \varepsilon \Rightarrow \|x(t; x_0)\| > M,$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma.



1. ábra. Felrobbanás szemléltetése.

¹A továbbiakban, ahol van értelme ide, értjük a kvázipolinomokat is.

A definíció azt mondja, hogy ha van a kezdeti értékeknek egy olyan halmaza, melyből a megoldást az x_0 kezdeti értékből indítva, azok origótól mért távolsága (tetszőleges normában) a felrobbanás t_* időpontjához (balról) közeledve határtalanul nagy lesz, tehát formálisan így is írhatjuk:

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} \|x(t, x_0)\| = +\infty.$$

A feladat egy konkrét probléma esetében meghatározni, – a rendszer formális megoldásának előállításánál nélkül – hogy létezik-e ilyen x_0 kezdeti feltétel, és ha igen, akkor t_* értéke (közelítőleg) mennyi. Általánosságban, pedig az egyenletek egy népesebb csoportjára szeretnénk valamilyen – szükséges, elégséges, illetve szükséges és elégséges – feltételeket adni.

A feladat megoldására az alábbiakban öt lehetséges megközelítést ismeretünk.

2. Legfeljebb lineárisan növekvő jobboldal

Jól ismert tény, hogy egy legfeljebb lineárisan növekvő jobboldalú differenciálegyenlet teljes megoldásának „a lehető legnagyobb” az értelmezési tartománya.

1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ és $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}_f$, továbbá tegyük fel, hogy létezik olyan $k \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ függvény, hogy bármely $(t, p) \in \mathcal{D}_f$ esetén fenn áll, hogy*

$$p^\top f(t, p) \leq k(t)|p|^2, \quad (2.1)$$

akkor az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának értelmezési tartománya a teljes I intervallum.

A tétel bizonyításának alapja a Gronwall-féle integrálegyenlőtlenség: ha

$$0 < \varphi(t) \leq \Delta + L \int_{t_0}^t \varphi(s) \, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

ahol $\Delta, L \in \mathbb{R}$, akkor


$$\varphi(t) \leq \Delta e^{L(t-t_0)}.$$

Ha a tételben szereplő feltétel helyett csupán az

$$|f(t, p)| \leq k|p|, \quad (2.2)$$

egyenlőtlenséget tesszük fel, akkor nem kell kikötni, hogy f folytonos, mert az ebből következik. A tételben viszont ki kell kötni, mert például $f(t, p) := \sin(\text{sign}(p))$ nem folytonos, de teljesíti a (2.1) egyenlőtlenséget.

1. Probléma. *Létezik-e olyan nem folytonos f függvény, amelyre (2.1) egyenlőtlenség teljesül és a megoldás fölrobban, úgy értve, hogy az egyenértékű integrálegyenletről kapható általánosított megoldás.*

 MEGJEGYZÉS: az elsőrendű reakciók által indukált kinetikai differenciálegyenletek kielégítik a (2.2) feltételt, tehát (2.1)-et is, magasabb rendűek pedig egyiket sem, így az 1. tétel egyszerű elégséges feltételt ad a felrobbanás kizárására.

Kicsit előzetekintve megállapítjuk, hogy a lineáris rendszer fel nem robbanására, az 5. fejezetben ismerttetett módszer is bizonyítást ad. Röviden arról van szó, hogy feltesszük a megoldásról, hogy $\alpha\tau^p$ alakú, ahol $\tau = t - t_*$ tehát

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

ebből helyettesítéssel:

$$p\alpha\tau^{p-1} = \alpha A\tau^p,$$

ez az egyenlőség nyilván csak akkor áll fenn, ha $p = p - 1$, márpedig ez elentmondás, tehát nincs ilyen alakú megoldás, amiből az következik, hogy a megoldásnak nincs szingularitása sem, vagyis az tetszőleges, véges intervallumon korlátos marad.

3. Elemi becslések, lineáris algebrai módszerek

Legyen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$, illetve $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, és tekintsük az

$$\dot{x}_i = x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i \quad i = 1, \dots, n \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

differenciálegyenletet, illetve kezdetiérték-problémát. Az A_i mátrixokról feltehetjük, hogy szimmetrikusak. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A := \sum_{i=1}^n \omega_i A_i, \quad b := \sum_{i=1}^n \omega_i b_i, \quad c := \sum_{i=1}^n \omega_i c_i,$$

ahol ω_i az $\omega \in \mathbb{R}^n$ vektor i -edik komponense. Az egyenletek lineáris kombinációjából a

$$\frac{d\omega^\top x}{dt} = x^\top Ax + b^\top x + c$$

egyenletet kapjuk, aminek jobb oldalát felírhatjuk a következő formában:

$$\left(\sqrt{A}x + \frac{1}{2} \left(\sqrt{A} \right)^{-1} b \right)^2 - \frac{1}{4} b^\top A^{-1} b + c,$$

ahol a $\sqrt{A} := B$ mátrix olyan, melyre $B^2 = A$. Foglalkozzunk most csak az előző kifejezés négyzetes tagjával, és alakítsuk át azt egy kicsit, így:

$$\left[\sqrt{A} \left(x + \frac{1}{2} A^{-1} b \right) \right]^2 = \left(x + \frac{1}{2} A^{-1} b \right)^\top A \left(x + \frac{1}{2} A^{-1} b \right).$$

Az átláthatóság végett legyen

$$y := \left(x + \frac{1}{2} A^{-1} b \right),$$

ekkor a következő becslés tehető:

$$y^\top A y \geq \lambda y^\top y = \frac{\lambda}{\omega^\top \omega} (y^\top y) (\omega^\top \omega) \geq \frac{\lambda}{\omega^\top \omega} (\omega^\top y)^2,$$

ahol λ az A mátrix legkisebb sajátértéke. Az első becslés a kvadratikus alakra vonatkozik, a második pedig a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenségből adódik. Végül visszahelyettesítve a következő becslést kapjuk:

$$\frac{d\omega^\top x}{dt} \geq \frac{\lambda}{\omega^\top \omega} \left[(\omega^\top x)^2 + \omega^\top A^{-1} b (\omega^\top x) + \left(\frac{1}{2} \omega^\top A^{-1} b \right)^2 \right] - \frac{1}{4} b^\top A^{-1} b + c,$$

amely egyenlőtlenség tulajdonképpen skaláris alakú, vagyis felírható

$$\dot{u} \geq k_1 u^2 + k_2 u + k_3 \quad u(t_0) = \omega^\top x_0$$

alakban, ahol

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda}{\omega^\top \omega}, \\ k_2 &= k_1 \omega^\top A^{-1} b, \\ k_3 &= k_1 \left(\frac{1}{2} \omega^\top A^{-1} b \right)^2 - \frac{1}{4} b^\top A^{-1} b + c. \end{aligned}$$

Ezt az egyenlőtlenséget már elemi módszerekkel könnyen lehet vizsgálni, és ebből a vizsgálatból egy tétel adódik az itt tárgyalt típusú egyenletekre, de a tétel kimondása előtt még a rövidség végett vezessünk be egy jelölést:

$$\Delta := \frac{\lambda}{\omega^\top \omega} (b^\top A^{-1} b - 4c),$$

ami egyébként hasonlít a másodfokú egyenletnél definiált diszkriminánsához, tehát valamiféle általánosított diszkriminánsnak nevezhetnénk. Valamint megjegyezzük, hogy mivel A_i mátrixok szimmetrikusak, ezért λ valós, továbbá pozitív, ha $A > 0$, azaz pozitív definit. A [4] cikkben szereplő első tétel a következőket mondja ki:

2. Tétel. Tekintsük a (3.1) egyenlettel adott rendszert. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\omega \in \mathbb{R}^n$, hogy $A > 0$. Ekkor a (3.1) rendszer megoldásához létezik t_* időpont, az alábbi feltételek mellett:

I. bármilyen x_0 kezdeti értékre, ha $\Delta < 0$,

II. olyan x_0 kezdeti értékre, amely eleget tesz az

$$\omega^\top x_0 > -\frac{1}{2}\omega^\top A^{-1}b + \frac{\sqrt{\Delta}\omega^\top \omega}{2\lambda}$$

feltételnek, ha $\Delta \geq 0$.

Az első esetben

$$t_* \leq \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2\omega^\top (x_0 + \frac{1}{2}A^{-1}b) \lambda}{\omega^\top \omega} \right) \right).$$

A $\Delta > 0$ esetben továbbá

$$t_* \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left(\frac{\omega^\top (x_0 + \frac{1}{2}A^{-1}b) 2\lambda + \sqrt{\Delta}\omega^\top \omega}{\omega^\top (x_0 + \frac{1}{2}A^{-1}b) 2\lambda - \sqrt{\Delta}\omega^\top \omega} \right).$$

Ezen módszer hátránya, – a nyilvánvaló, jobboldal kvadratikus megszorításán túl – hogy a felrobbanás bekövetkeztének időpontjára csak felső becslést ad, ami gyakorlati szempontból nem annyira jó, mint egy alsó becslés. Ezen tétel, illetve módszer egy alkalmazását lásd később, a 4.2.3 szakaszban.

2. Probléma. Adott A_i mátrixokhoz mikor létezik olyan ω vektor, amivel $A = \sum \omega_i A_i > 0$ lesz.

Triviálisan igaz a következő: ha $\forall i$ A_i szemidefinit és $\exists i$, hogy A_i definit, akkor létezik olyan ω vektor, melyre A pozitív definit. Ebből kiderül például, hogy az $\dot{x} = -x^2$ egyenlet megoldásai $x(0) < 0$ esetén felrobbannak.

3. Probléma. Amikor egynél több megfelelő ω vektor létezik, akkor hogyan érdemes azt megválasztani?

4. Probléma. Reakciók által indukált differenciálegyenleteknél tudjuk, hogy az

$$\dot{x}_i = \sum_{j,k} a_i^{jk} x_j x_k + \sum_j b_i^j x_j + c_i$$

alakban felírt egyenletben

$$a_i^{jk} \geq 0, (i \neq j \text{ és } i \neq k), \quad b_i^j \geq 0 (i \neq j), \quad c_i \geq 0.$$

Kérdés, hogy ezeket a feltételeket hogyan lehet kihasználni az előző probléma megoldásánál, illetve a 2. tétel alkalmazásánál. Egy speciális esetben például ha

$$a_i^{ik} = a_i^{ji} = 0, \quad b_i^i = 0, \quad c_i = 0$$

és $\exists i, j, k$, hogy $a_i^{jk} > 0$, akkor a megoldás fölrobban. A 4.2.3. fejezet végén lévő példa azt mutatja, hogy ennek ellenére előfordul, hogy nem létezik ω , amellyel A pozitív definit lesz.

4. Differenciálegyenletek transzformációja

Ebben a fejezetben, olyan transzformációkról, és azokhoz kapcsolódó problémákról lesz szó, melyek nem csak a következő fejezet jobb megértéséhez adnak alapot, hanem maguk is igen értékesnek bizonyulhatnak egyes konkrét feladat megoldásában, illetve annak egyszerűsítésében.

4.1. Kvázimonomiális transzformáció

Az általánosság elvesztése nélkül megtehetjük, hogy egyenletünket az

$$\dot{x}_i = x_i \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^m A_{ij} \prod_{k=1}^n x_k^{B_{jk}} \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

formában írjuk fel, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, illetve $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vektor. Továbbá tegyük fel, hogy a fenti egyenletben minden monóm csak egyszer szerepel, azaz a B mátrixnak nincs két azonos sora. A dinamikai rendszerek – főként fizikai, kémiai és biológiai – igen nagy osztálya felírható a fenti alakban, speciálisan a tömeghatás kinetikájú reakciók indukált kinetikai differenciálegyenlete is.

Most térjünk vissza a transzformációra és végezzük el az

$$x_i = \prod_{j=1}^n y_j^{C_{ij}} = y^{C_i},$$

helyettesítést, ahol $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix. A fenti helyettesítés mind-

két oldalának idő szerinti deriváltját véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left(C_{11} \frac{\dot{y}_1}{y_1} + C_{12} \frac{\dot{y}_2}{y_2} + \dots + C_{1n} \frac{\dot{y}_n}{y_n} \right) y^{C_1}, \\ \dot{x}_2 &= \left(C_{21} \frac{\dot{y}_1}{y_1} + C_{22} \frac{\dot{y}_2}{y_2} + \dots + C_{2n} \frac{\dot{y}_n}{y_n} \right) y^{C_2}, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \left(C_{n1} \frac{\dot{y}_1}{y_1} + C_{n2} \frac{\dot{y}_2}{y_2} + \dots + C_{nn} \frac{\dot{y}_n}{y_n} \right) y^{C_n},\end{aligned}$$

illetve tömörebb formában:

$$\dot{x}_i = y^{C_i} \sum_{j=1}^n C_{ij} \frac{\dot{y}_j}{y_j} \quad i = 1, \dots, n.$$

Ehhez felhasználva a (4.1) összefüggést, illetve elvégezve a helyettesítést kapjuk, hogy

$$y^{C_i} \sum_{j=1}^n C_{ij} \frac{\dot{y}_j}{y_j} = y^{C_i} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^m A_{ij} \prod_{k=1}^n \left(\prod_{l=1}^n y_l^{C_{kl}} \right)^{B_{jk}} \right).$$

Vezessük be az u változót a következőképpen:

$$u_j := \prod_{k=1}^n \left(\prod_{l=1}^n y_l^{C_{kl}} \right)^{B_{jk}} = \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^n y_l^{B_{jk} C_{kl}} = \prod_{l=1}^n \prod_{k=1}^n y_l^{B_{jk} C_{kl}} = \prod_{l=1}^n y_l^{\sum_k B_{jk} C_{kl}},$$

vagyis

$$u_j = \prod_{l=1}^n y_l^{(BC)_{jl}}.$$

Így végül a helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$C \begin{pmatrix} \dot{y}_1/y_1 \\ \dot{y}_2/y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n/y_n \end{pmatrix} = \lambda + Au,$$

amiből a végeredmény

$$\dot{y} = y \otimes (C^{-1} \lambda + C^{-1} Au).$$

A fenti egyenletet átírva a (4.1) egyenlethez hasonló formára

$$\dot{y}_i = y_i \left(\lambda'_i + \sum_{j=1}^m A'_{ij} \prod_{k=1}^n y_k^{B'_{jk}} \right) \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

ahol

$$\lambda' = C^{-1}\lambda, \quad A' = C^{-1}A, \quad B' = BC. \quad (4.3)$$

Ezzel a transzformációval az egyenletet a transzformáció előttihez hasonló alakban írhatjuk fel, ám közben azt várjuk, hogy valamilyen módon egyszerűsödik, illetve olyan alakú lesz, ami számunkra valamilyen szempontból előnyösebb. A kvázimonomiális transzformáció az egyenleteket bizonyos feltételek mellett, bizonyos értelemben szétcsatolja, hogy ez mit is jelent pontosan, lássuk!

Tegyük fel, hogy a B mátrix rangja $r < n$, ekkor nyilván létezik $(n-r)$ számú $\varphi_k \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre fennáll, hogy

$$B\varphi_k = 0 \quad k = r+1, \dots, n,$$

ezért legyen

$$C := \begin{pmatrix} I^{r \times r} & & & \\ & \varphi_{r+1} & \cdots & \varphi_n \\ O^{(n-r) \times r} & & & \end{pmatrix},$$

ahol $I^{r \times r}$ egy $r \times r$ méretű egységmátrix, a $O^{(n-r) \times r}$ pedig nullmátrix. Az így értelmezett C mátrixszal végrehajtott transzformáció után

$$B' = BC = \begin{pmatrix} B^{m \times r} & O^{m \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy az egyenletrendszer szétcsatoltuk két részre úgy, hogy az első r egyenletben csak az első r változó szerepel. A megmaradt $(n-r)$ számú egyenlet pedig az előzőek megoldásával, és azok behelyettesítésével egy függvényegyütthatós lineáris egyenletté alakul. Tehát a rendszerünket sikerült szétcsatolnunk egy r dimenziós nemlineáris, és egy $(n-r)$ dimenziós lineáris rendszerré.

A transzformáció után az A mátrix – a már fentebb írottak szerint – a következőképpen alakul:

$$A' = C^{-1}A.$$

Most vizsgáljuk meg, hogy a B mátrix egyszerűsítéséhez konstruált C mátrix invertálható-e? Írjuk fel most

$$C = \begin{pmatrix} I^{r \times r} & F^{r \times (n-r)} \\ O^{(n-r) \times r} & G^{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$$

blokkosított alakban. Ekkor a blokkok méretének változatlansága mellett:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} I & -FG^{-1} \\ O & G^{-1} \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk, hogy a C mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a benne lévő G blokk invertálható, vagyis akkor és csak akkor, ha $\det(G) \neq 0$. Összegzésül írjuk fel, hogyan egyszerűsödött, illetve bomlott szét a (4.1) egyenlet a kvázimonomiális transzformáció végrehajtásával. Tehát a nemlineáris és a lineáris rész:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_i \left(\lambda'_i + \sum_{j=1}^m A'_{ij} \prod_{k=1}^r y_k^{B'_{jk}} \right) & i = 1, \dots, r, \\ \dot{y}_i &= y_i \left(\lambda'_i + \sum_{j=1}^m A'_{ij} \prod_{k=1}^r y_k^{B'_{jk}} \right) & i = r+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ennek az eljárásnak a speciális esete szerepel a [9] 290.–295. oldalán.

5. Probléma. *Felmerül a kérdés, hogy ha az eredeti, illetve a transzformált egyenlet jobb oldala teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor a transzformált, illetve az eredeti is teljesíti-e?*

☞ PÉLDA: A

$$\sum_{m=1}^M \alpha(m, r) X_m \xrightarrow{k_r} \sum_{m=1}^M \beta(m, r) X_m \quad r = 1, \dots, R$$

kémiai reakció tömeghatás kinetikájú indukált kinetikai differenciálegyenlete:

$$\dot{c}_m = \sum_{r=1}^R (\beta(m, r) - \alpha(m, r)) k_r \prod_{p=1}^M c_p^{\alpha(p, r)} \quad m = 1, \dots, M.$$

Végezzünk el egy kis átalakítást, hogy a (4.1) alakú egyenlethez jussunk, tehát:

$$\dot{c}_m = c_m \sum_{r=1}^R (\beta(m, r) - \alpha(m, r)) k_r \prod_{p=1}^M c_p^{\alpha(p, r) - \delta_{pm}} \quad m = 1, \dots, M.$$


Ez az egyenlet (4.1) alakú, ha az ottani paramétereket a következőképpen választjuk meg. Egyértelmű, hogy $n := M$, $i := m$,

$$\lambda_i := \sum_r (\beta(i, r) - \alpha(i, r)) k_r,$$

minden olyan r esetén, amikor

$$\alpha(p, r) - \delta_{pi} \equiv 0,$$

viszont azon r esetén, amikor ez nem teljesül, akkor triviálisan a megfelelő A_{jk} és B_{jk} paraméterek értéke határozható meg.

 MEGJEGYZÉS: a kvázimonomiális transzformáció hasonló, mint a lineáris rendszereknél alkalmazott szokásos transzformációk, amik különféle módon egyszerűsítik az eredetileg felírt egyenletet, illetve olyan alakra hozzák a benne szereplő paramétereket, amiből fontos gyakorlati következtetések vonhatók le (pl. megfigyelhetőség, irányíthatóság). Ahogy a lineáris esetben is vannak a transzformációra invariáns paraméterek, így a kvázimonomiális transzformációnál is megfigyelhetünk ilyeneket, mégpedig a (4.3) összefüggésből a $B\lambda$, illetve BA paraméterek ilyenek.

4.2. Lotka–Volterra-féle univerzális alak

Brenig és Goriely [3] további vizsgálatot végzett, hogy hogyan célszerű C alakját megválasztani, melynek egy speciális esetét alább mi is tárgyaljuk. Beklemisheva [1] cikkében $\lambda_i = 0$, ami az általánosság elvesztése nélkül feltehető (lásd a (4.4) alakot), és B mindig invertálható.

4.2.1. Transzformáció LV-alakra

Abban a speciális esetben, amikor a polinomiális jobb oldalra teljesül, hogy $m = n$ és B invertálható, a transzformált egyenlet különösen egyszerű alakú (másodfokú), sőt speciális (Lotka–Volterra) alakú lehet. Ehhez a kvázimonomiális transzformációra legyen $C := B^{-1}$, ekkor

$$\lambda' = B\lambda \quad A' = BA \quad B' = I,$$

amiből az is látszik, hogy ezek a paraméterek már invariánsak egy további, bárhogyan megválasztott paraméterezésű kvázimonomiális transzformációra, vagyis ilyen értelemben ez a legegyszerűbb alak, amit így elérhetünk.

 PÉLDA:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2^{2/3} x_3^{-2} &&= x_1 \left(1 - x_2^{2/3} x_3^{-2} \right) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^2 - 3x_2^{5/3} x_3^{-2} &&= x_2 \left(-1 + x_2 - 3x_2^{2/3} x_3^{-2} \right) \\ \dot{x}_3 &= 2x_3 + 5x_1 x_2^3 + x_2 x_3 &&= x_3 \left(2 + 5x_1 x_2^3 x_3^{-1} + x_2 \right). \end{aligned}$$

Ebból könnyen kiolvasható, hogy

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A transzformáció elvégzésével az egyenletek LV-alakját kapjuk, ami tehát:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 \left(-\frac{14}{3} - 2y_1 - \frac{4}{3}y_2 - 10y_3 \right) \\ \dot{y}_2 &= y_2 (-1 - 3y_1 + y_2) \\ \dot{y}_3 &= y_3 (-4 - 10y_1 + 2y_2 - 5y_3). \end{aligned}$$

4.2.2. Alkalmazás: a (4.1) egyenlet Taylor-sor alakú megoldása

Ha a (4.1) egyenlet megoldásait Taylor-sor alakban akarjuk előállítani, akkor a Taylor-sor együtthatóinak meghatározása igen nehéz és időigényes lehet, így általában inkább a Runge–Kutta módszer az alkalmazott numerikus módszer. Viszont a Taylor-sor egy nagy előnye az utóbbival szemben, hogy két paraméteren keresztül – a lépésköz és a „csonkítás” fokszámának megválasztásával – képesek vagyunk kontrollálni a pontosságot. Amint azt a [2] cikkben olvashatjuk, egy adott pontosság eléréséhez létezik olyan (h, p) optimális pár, amelyre a számítási idő minimális. Viszont mi nem erre helyezzük a hangsúlyt, hanem a megoldás előállítására. Tekintsük tehát a (4.1) egyenletet és végezzük el az

$$x_i(t) = y_i(t)e^{\lambda_i t}$$

helyettesítést, ekkor

$$\dot{y}_i(t)e^{\lambda_i t} + \lambda_i y_i(t)e^{\lambda_i t} = \lambda_i y_i(t)e^{\lambda_i t} + y_i(t)e^{\lambda_i t} \sum_{j=1}^m A_{ij} \prod_{k=1}^n (y_k(t)e^{\lambda_k t})^{B_{jk}},$$

amiből:

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t) \sum_{j=1}^m A_{ij} \prod_{k=1}^n y_k^{B_{jk}}(t) e^{\gamma_j t} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.4)$$

ahol

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^n B_{jk} \lambda_k.$$

Most vezessünk be egy új független változót:

$$y_{n+1}(t) := e^t.$$

Ekkor könnyű belátni, hogy a (4.4) egyenlet felírható az:

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{j=1}^{m+1} \tilde{A}_{ij} \prod_{k=1}^{n+1} y_k^{\tilde{B}_{jk}},$$

formában, ahol

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A_{n \times m} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} & & & \gamma_1 \\ & B_{m \times n} & & \vdots \\ & & & \gamma_m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Végezzük el a

$$z_i := \prod_{j=1}^{n+1} y_j^{\tilde{B}_{ij}}$$

helyettesítést, így a következő alakra jutunk:

$$\dot{z}_i = z_i \sum_{j=1}^{m+1} (\tilde{B}\tilde{A})_{ij} z_j.$$

Most normáljuk a $t \mapsto z_i(t)$ függvényeket a nullában felvett értékükkel, vagyis legyen

$$u_i(t) := \frac{z_i(t)}{z_i(0)}, \quad z_i(0) \neq 0,$$

ekkor

$$\dot{u}_i = u_i \sum_{j=1}^{m+1} M_{ij} u_j,$$

ahol

$$M_{ij} = (\tilde{B}\tilde{A})_{ij} z_j(0).$$

Állítsuk elő az u_i függvényt Taylor-sor alakjában, vagyis

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ik},$$

ahol

$$c_{ik} = \left. \frac{d^k}{dt^k} u_i(t) \right|_{t=0}.$$

Határozzuk most meg a c_{ik} együtthatókat. A fentebb elvégzett normalizálás miatt $u_i(0) = 1$ bármely $i = 1, \dots, m+1$ esetén. Teljes indukcióval belátható, hogy:

$$\begin{aligned}
c_{i0} &= u_i(0) = 1, \\
c_{i1} &= \dot{u}_i(0) = u_i(0) \sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1} u_{j_1}(0) = \sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1}, \\
c_{i2} &= \ddot{u}_i(0) = \dot{u}_i(0) \sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2} u_{j_2}(0) + u_i(0) \sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2} \dot{u}_{j_2}(0) = \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1} \right) \left(\sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2} \right) + \sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2} \left(\sum_{j_1=1}^{m+1} M_{j_2j_1} \right) = \\
&= \sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1} \sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_2} + \sum_{j_1=1}^{m+1} M_{ij_1} \sum_{j_2=1}^{m+1} M_{j_1j_2} = \\
&= \sum_{j_1=1}^{m+1} \sum_{j_2=1}^{m+1} M_{ij_1} (M_{ij_2} + M_{j_1j_2}), \\
&\vdots \\
c_{ik} &= \sum_{j_1=1}^{m+1} \cdots \sum_{j_k=1}^{m+1} M_{ij_1} (M_{ij_2} + M_{j_1j_2}) (M_{ij_3} + M_{j_1j_3} + M_{j_2j_3}) \cdots \\
&\cdot (M_{ij_k} + M_{j_1j_k} + M_{j_2j_k} + \cdots + M_{j_{k-1}j_k}).
\end{aligned}$$

4.2.3. Alkalmazás: LV-alak, mint hiányos kvadratikus egyenlet

Tegyük fel, hogy az egyenletünk már LV-alakú, ekkor így is írhatjuk:

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + x_i \beta_i \quad i = 1, \dots, n$$

ebből könnyen leolvasható, hogy a (3.1) egyenletben szereplő paramétereket hogyan kell megválasztanunk, hogy alkalmazhassuk az ott bemutatott

módszert. Tehát:

$$A_i := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i(i-1)} & 2\alpha_{ii} & \alpha_{i(i+1)} & \cdots & \alpha_{i(n-1)} & \alpha_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i(i+1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{i(n-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{in} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_i^\top := (0, \dots, 0, \beta_i, 0, \dots, 0), \quad c_i := 0.$$

Most végezzük el az ω -val való beszorzást, ekkor:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j)(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) = (\omega_i + \omega_j)\alpha_{ij}, \quad b^\top = (\omega_1\beta_1, \omega_2\beta_2, \dots, \omega_n\beta_n), \quad c = 0.$$

Így már alkalmazható a 3. fejezetben tárgyalt módszer, azzal az egyszerűsítéssel, hogy a $c = 0$. Mivel az A mátrixra még explicitebb alakot kaptunk, talán pozitív definitása könnyebben vizsgálható.

☞ PÉLDA: Az [1] cikkben szereplő 2. példában a szerző bemutatja, hogyan alakít át egy arra megfelelő egyenletet LV-alakra, amit mi már a korábbiakban bemutatunk, és így a következő egyenleteket kapja:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \xi(3 + \xi) \\ \dot{\eta} &= \eta(9 + 2\xi) \\ \dot{\zeta} &= \zeta(4 + \xi - \eta + 2\zeta), \end{aligned}$$

Konstruáljuk meg ehhez az A_i mátrixokat:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

amiből

$$A = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\omega_1 & 2\omega_2 & \omega_3 \\ 2\omega_2 & 0 & -\omega_3 \\ \omega_3 & -\omega_3 & 4\omega_3 \end{pmatrix},$$

és mivel a főátlóban áll egy nulla, ezért A nem pozitív definit, tehát a 3. fejezetben kimondott 2. tétel ebben az esetben nem alkalmazható, pedig a megoldás nyilvánvalóan felrobban, hiszen az első változójában valóban felrobban.

4.3. Poincaré linearizációs elmélete

Legyen $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ és tekintsük a következő nemlineáris autonóm KDE-t:

$$\dot{x} = f \circ x, \quad (4.5)$$

és legyen ennek egyensúlyi pontja az origó, vagyis $f(0) = 0$. Mivel f differenciálható, ezért (4.5) jobb oldala közelítőleg

$$f'(0)x + O(\|x\|^2). \quad (4.6)$$

Tudjuk, hogy az $f'(0)$ Jacobi-mátrix sajátértékei, pontosabban a sajátértékek valós része határozza meg a (4.5) rendszer lokális stabilitását az origó körül. Az idevonatkozó elméleti eredményeket röviden áttekintjük egy későbbi fejezetben, most pedig ismerkedjünk meg a rezonancia fogalmával.



HENRI POINCARÉ
(1854–1912)

2. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f'(0)$ sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Azt mondjuk, hogy a sajátértékek **rezonánsak**, ha $\exists m \in \mathbb{N}_0^n$ úgy, hogy $|m| := \sum_k m_k \geq 2$, továbbá:*

$$(m, \lambda) = \sum_{k=1}^n m_k \lambda_k = \lambda_s \quad \text{valamely } s \in \{1, \dots, n\}$$

esetén. Az $|m|$ értéket a rezonancia fokának hívjuk.

Célunk, hogy más koordináta-rendszerre áttérve egyszerűbb – szerencsés esetben teljesen lineáris alakra – alakra hozzuk az egyenletet. A rendszert leíró egyenlet jobb oldalán gyűjtjük össze az azonos fokú monómot, vagyis írjuk fel a rendszert a következő alakban:

$$\dot{x} = \lambda x + \sum_{r>1} v_r \circ x, \quad (4.7)$$

ahol

$$\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad v_r(x) = \sum_{m \in M_r} a_m x^m,$$

$M_r := \{m \in \mathbb{N}_0^n \mid |m| = r\}$ és $x^m := x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$. Ha a monóm foka r , akkor az M_r halmaznak $C_{\text{ism}}(n, r)$ számú eleme van, ahol

$$C_{\text{ism}}(n, r) := \binom{n+r-1}{n-1}.$$

Például, ha $n = r = 2$, akkor $M_2 = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ és

$$v_2(x) = v_2(x_1, x_2) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2.$$

Most megpróbálunk olyan ($y := x + \dots$) identitáshoz közeli transzformációt találni, amellyel csökkenthetjük a lineáris tag után álló monómomok számát, vagyis amellyel ezt kapjuk:

$$\dot{y} = f'(0)y + V_{r+1} \circ y + \dots$$

Ha ezt sikerül elérnünk, akkor egy következő transzformációval az $r+1$ fokú monómot is megpróbálhatjuk eltüntetni, és így tovább, míg végül, ha ezt minden r esetén el tudjuk végezni az $\dot{y} = f'(0)y$ alakú egyenletet kapjuk. Lássuk sikerül-e ilyen transzformációt találnunk. Induljunk ki az alapegyenletből:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{m \in M_r} a_{mi} x^m + v_{r+1,i} \circ x + \dots \quad (4.8)$$

és próbáljuk meg a következő helyettesítést:

$$y_i := x_i + \sum_{m \in M_r} b_{mi} x^m, \quad (4.9)$$

amiből

$$x_i = y_i - \sum_{m \in M_r} b_{mi} y^m + O(|y|^{r+1}). \quad (4.10)$$

A későbbiekben szükségünk lesz a következő összefüggésre:

$$\frac{d}{dt} x^m = \sum_{k=1}^n \frac{\dot{x}_k}{x_k} m_k x^m = \sum_{k=1}^n m_k \lambda_k x^m + O(|x|^{r+1}), \quad (4.11)$$

így a (4.9) egyenlet mind két oldalát deriválva kapjuk, hogy

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + \sum_{m \in M_r} b_{mi}(m, \lambda) x^m + O(|x|^{r+1}),$$

ehhez pedig felhasználva a (4.8) összefüggést a következő adódik:

$$\dot{y}_i = \lambda_i x_i + \sum_{m \in M_r} a_{mi} x^m + \sum_{m \in M_r} b_{mi}(m, \lambda) x^m + O(|x|^{r+1}).$$

Következő lépésként végezzük el a (4.10) helyettesítést, így

$$\dot{y}_i = \lambda_i \left(y_i - \sum_{m \in M_r} b_{mi} y^m \right) + \sum_{m \in M_r} a_{mi} y^m + \sum_{m \in M_r} b_{mi}(m, \lambda) y^m + O(|y|^{r+1}),$$

amiből végül azt kapjuk, hogy

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum_{m \in M_r} a_{mi} y^m + \sum_{m \in M_r} b_{mi} y^m ((m, \lambda) - \lambda_i) + O(|y|^{r+1}).$$

Ha

$$b_{mi} = \frac{a_{mi}}{\lambda_i - (m, \lambda)} \quad m \in M_r,$$

akkor

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + O(|y|^{r+1}).$$

Tehát elértük a célunk, hiszen az r fokú monóm eltűnt az egyenlet jobb oldaláról. Természetesen a b_{mi} együttható értéke r fokú rezonancia esetén nincs értelmezve. Azokat a monómot, amelyekre az $f'(0)$ mátrix sajátértékei rezonánsak, a Poincaré-transzformációval nem lehet eltüntetni, így ezek új együtthatói – ha a rezonancia foka r – a transzformáció után

$$c_{mi} = a_{mi} + b_{mi}((m, \lambda) - \lambda_i) \quad m \in M_r.$$

Az

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0^n \\ |m|=2}}^{+\infty} c_{mi} x^m, \quad m \in \mathbb{N}_0^n \quad (4.12)$$

alakú egyenletet **normál formának** hívjuk, ahol

$$c_{mi} = \begin{cases} 0 & \text{ha } m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n \neq \lambda_i \\ a_{mi} + b_{mi}((m, \lambda) - \lambda_i) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3. Definíció (Siegel-feltétel). Azt mondjuk, hogy $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ kielégíti a Siegel-feltételt, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és $\nu > 0$ konstans, hogy

$$|\lambda_i - (m, \lambda)| \geq \frac{\varepsilon}{|m|^\nu}.$$

3. Tétel (Poincaré linearizációs tétele). Ha a $\lambda_i \in \sigma(f'(0))$ sajátértékek nem rezonánsak és minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ vagy $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ vagy a λ_i sajátértékek kielégítik a Siegel-feltételt, akkor a (4.12) sor az origó valamely környezetében konvergens.

 PÉLDA: Legyen

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$


ahol $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ ekkor a rezonanciafeltételt megvalósító egyenlet

$$k\lambda_1 + 0\lambda_2 = \lambda_2,$$

amiből a rezonancia foka $r = k$, s így a rendszer normál formája:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= kx_2 + ax_1^k,\end{aligned}$$

ahol $a \in \mathbb{R}$.

 MEGJEGYZÉS: a kinetikai differenciálegyenletek normál formára való alakítását (az egyensúlyi pont ismeretének hiányában) nem tudjuk általános esetben szimbolikusan elvégezni.

5. Painlevé-analízis

Ebben a fejezetben a felrobbanás egzisztenciájának és lokalizálásának kérdését a megoldás időbeli szingularitásának, illetve az eredeti rendszer egy transzformáltja fix pontjainak vizsgálatára vezetjük vissza. Ezért rövid áttekintést adunk a fix pont körüli lokális analízisről, melynek analógiájára fogjuk bevezetni az időbeli szingularitások analízisét, azaz a Painlevé-analízist. Az analógia egyszerű, ahogy a megoldások a fix ponthoz közelednek, úgy lokálisan különbözőképpen viselkedhetnek, amit a lokális analízis segítségével tudunk vizsgálni. Ennek megfelelően a megoldások az időbeli szingularitások közelében is különbözőképpen viselkedhetnek, amihez pedig a Painlevé-analízis ad megfelelő apparátust.



PAUL PAINLEVÉ
(1863–1933)

5.1. Fix pont körüli lokális analízis

Igen régről és jól ismert, jól kidolgozott elmélet, a közönséges differenciálegyenletek elméletében a fix pont körüli lokális analízis. Erről adunk most

egy rövid áttekintést, részletes tárgyalása a [11] könyvben található. Tekintjük az

$$\dot{x} = f \circ x$$

differenciálegyenletet, ahol $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Az egyenlet fix pontjának² azokat a pontokat hívjuk, melyekre $x_* \in \mathbb{R}^n$, $f(x_*) = 0$ teljesül. A továbbiakban elég, ha az origót tekintjük fix pontnak, hiszen az $y := x - x_*$ transzformációval, az x_* fix pont az origóba tolható el (feltéve persze, hogy x_* meghatározható), hiszen

$$\frac{d}{dt}(y + x_*) = \dot{x} = f \circ x = f \circ (y + x_*).$$

Az egyenlet jobb oldalát felbonthatjuk két – egy lineáris, és egy nemlineáris – részre, vagyis

$$f(x) = f_{\text{lin}}(x) + f_{\text{nl}}(x) = f'(0)x + O(\|x\|^2),$$

melyből a lineáris részt megtartva, az egyensúlyi pont valamely környezetében jó közelítéssel helyettesíthetjük az eredeti egyenletünket, vagyis az

$$\dot{x} = f'(0)x$$

lineáris egyenlet megoldása az origó valamely környezetében jó közelítéssel írja le az eredeti egyenlet megoldását. Az $f'(0)$ mátrix spektrumát vizsgálva következtethetünk az origó stabilitására, illetve a megoldás viselkedésére az origóhoz közeledve.

Egy fontos, speciális eset, amikor hiperbolikus a fix pont, azaz ha a fix ponthoz tartozó bármely sajátérték valós része nem nulla. Ekkor ugyanis érvényes a stabil sokaságra vonatkozó tétel. Még mielőtt kimondanánk ezt a tételt, néhány alapvető definíciót fogalmazzunk meg.

4. Definíció (Dinamikai rendszer). *Dinamikai rendszernek hívjuk azt a*

$$\Phi: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

folytonos leképezést, ahol \mathbb{T} additív részcsoportha \mathbb{R} -nek, amely rendelkezik a csoporttulajdonságokkal:

- ❖ $\Phi(0, x) = x$
- ❖ $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$.

²Szokásos elnevezések még az egyensúlyi, kritikus vagy stacionárius pont.

A továbbiakban csak folytonos dinamikai rendszerekkel foglalkozunk, ahol $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Az $\dot{x} = f \circ x$ differenciálegyenlet megoldóoperátorát a továbbiakban φ jelöli, azaz a $\varphi(t, x)$ az $x \in \mathbb{R}^n$ kezdeti értékből indított megoldás t időpontbeli értéke.

5. Definíció (Stabilis és instabilis sokaság). Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ valamilyen környezete az $x_* \in \mathbb{R}^n$ fix pontnak, ekkor a (lokális) stabilis és instabilis sokaság a következőképpen definiálható:

$$W_s(x_*) := \left\{ y \in U \mid \forall t \geq 0, \varphi(y, t) \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(y, t) = x_* \right\},$$

$$W_u(x_*) := \left\{ y \in U \mid \forall t \leq 0, \varphi(y, t) \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(y, t) = x_* \right\}.$$

6. Definíció (Stabilis, instabilis és centrális altér). Tekintsük az $\dot{x} = Ax$ lineáris rendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az A mátrix sajátértékei, illetve az ezekhez tartozó w_1, w_2, \dots, w_n (általánosított) sajátvektorok, ahol $w_j = u_j + iv_j$. Továbbá legyen \mathbb{R}^n bázisa

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_k; u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}, \quad m = \frac{n-k}{2},$$

ekkor a stabilis, az instabilis és a centrális alteret a következőképpen definiáljuk:

$$E_s = \text{Span} \{u_j, v_j \mid \text{Re}(\lambda_j) < 0, j = 1, \dots, m\}$$

$$E_u = \text{Span} \{u_j, v_j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0, j = 1, \dots, m\}$$

$$E_c = \text{Span} \{u_j, v_j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0, j = 1, \dots, m\}$$

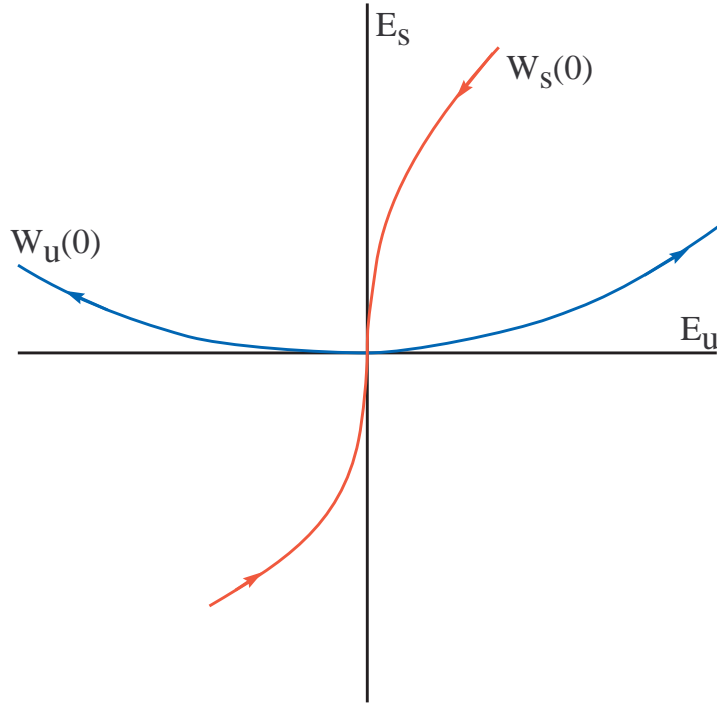
továbbá $E_s \times E_u \times E_c = \mathbb{R}^n$.

Ha egy fix pont hiperbolikus, akkor $E_c = \{0\}$.

4. Tétel (Stabilis sokaság). Tegyük fel, hogy az $\dot{x} = f \circ x$ rendszernek hiperbolikus fix pontja az origó, és az $\dot{x} = f'(0)x$ egyenlet stabilis és instabilis altere E_s, E_u , ekkor létezik az eredeti rendszernek lokális stabilis és instabilis sokasága úgy, hogy $\dim(E_s) = \dim(W_s(0))$, és $\dim(E_u) = \dim(W_u(0))$, továbbá az origóban a megfelelő sokaság a megfelelő alteret érinti (2. ábra).

Az $\dot{x} = Ax$ lineáris rendszerénél létezik olyan $x := Py$ lineáris (invertálható) transzformáció, mellyel az alterek a 2. ábrán látható módon állnak be:

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}APy,$$



2. ábra. Az alterek és sokaságok helyzete.

ahol az új transzformált mátrix a lehető legegyszerűbb. A nemlineáris rendszereknél, alkalmas normálforma transzformációval, – mely a lineáris részre invariáns – a koordinátarendszert be lehet állítani úgy, hogy a sokaságok is a lehető legegyszerűbb alakot öltsek (akár hozzá is „egyenesezhetnek” a megfelelő lineáris alterekhez). Most nézzük, hogyan írható fel a megoldás formálisan egy fix pont megfelelő környezetében. Legyen

$$\sigma(f'(0)) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

ahol a \leq rendezési reláció a komplex számok körében, azok valós részein értelmezett szokásos reláció. A megoldás felírható az origó körül, lokálisan a következő alakban:

$$x(t) = \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(t) C^i e^{(\lambda, i)t}, \quad (\lambda, i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j i_j, \quad (5.1)$$

ahol $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ állandó és $c_i(t)$ polinom. Írjuk fel az origó körüli $W_u(0)$ instabilis sokaságot, amit úgy kaphatunk meg, hogy az (5.1) sorban $C_m := 0$, minden olyan m esetén, amelyre $\text{Re}(\lambda_m) \leq 0$, $m = 1, \dots, k-1 \leq n$,

ekkor tehát

$$x_u(t) = \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(t) (C^u)^i e^{(\lambda^u, i)t}, \quad (\lambda^u, i) = \sum_{j=k}^n \lambda_j i_j,$$

ahol $i \in \mathbb{N}_0^{n-k+1}$, továbbá az indexekben lévő u az angol unstable szó rövidítése, így az instabilis sokasághoz tartozó megfelelő értékeket jelzi.

5.2. Szinguláris hely körüli lokális analízis

Az előző alfejezetben tárgyalt lokális analízis analógiájára bevezetjük a szinguláris hely körüli analízist.

Tekintsük ismét a következő differenciálegyenletet:

$$\dot{x} = f \circ x,$$

ahol $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Bontsuk fel a jobb oldalt

$$f = g + h$$

részekre úgy, hogy az $x(t) := \alpha(t - t_*)^p$ helyettesítéssel, ahol az $\alpha(t - t_*)^p$ vektor i -edik komponense $\alpha_i(t - t_*)^{p_i}$, teljesüljön a g függvényre, hogy

$$\dot{x} = g \circ x, \quad \text{vagyis} \quad p\alpha\tau^{p-1} = g(\alpha\tau^p),$$

ahol $\tau := t - t_*$ és $\alpha, p \in \mathbb{C}^n$, $|\alpha| \neq 0$, és természetesen itt a vektorok közötti szorzás komponensenként értendő. Továbbá, h legyen olyan, hogy

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h(\tau^p)}{\tau^{p-1}} = 0.$$

Vezessük be a továbbiakban fontos szerepet játszó **Kovalevszkaja-kitevőket** [6] meghatározó mátrixot, ami a következőképpen definiálható:

$$K = g'(\alpha) - \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n).$$



SZOFIA KOVALEVSZKAJA
(1850–1891)

5.3. Painlevé-tulajdonság és -teszt

Egy t_* szingularitáshoz tartozik egy (α, p) pár, ekkor lokálisan létezik a megoldást leíró sor, a következő formában

$$x(t) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i (\log(\tau)) C^i \tau^{(\rho, i)} \right), \quad (\rho, i) = \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j i_j, \quad (5.2)$$

ahol a ρ_i kitevők a megfelelő (α, p) párhoz tartozó Kovalevszkaja-kitevők ($i = 1, \dots, n$), kiegészítve a $\rho_{n+1} := q$ értékkel, ami a h nem domináns részre jellemző érték, (amit az 5.4. fejezetben értelmezzük). Egy rendszer akkor rendelkezik a Painlevé-tulajdonsággal, ha az általános megoldása egyértékű, azaz a szingularitásai körül Laurent-sorba fejthető.

Ha az előző alfejezetben tárgyalt instabilis sokasághoz hasonlóan az (5.2) sorban csak a pozitív valós részű kitevőket vesszük, vagyis minden olyan $C_i := 0$, melyre $\text{Re}(\rho_i) \leq 0$, $i = 1, \dots, k-1$, akkor a következőt kapjuk:

$$x_u(t) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i (\log(\tau)) (C^u)^i \tau^{(\rho^u, i)} \right), \quad (\rho^u, i) = \sum_{j=k}^{n+1} \rho_j i_j, \quad (5.3)$$

ahol $i \in \mathbb{N}_0^{n-k+2}$ és az indexben szereplő u szintén azt jelenti, mint ezelőtt. A Painlevé-teszt olyan eljárás, amely szükséges feltételt ad a Painlevé-tulajdonság meglétére, ami a további vizsgálatokban jelentős tulajdonság lesz. Három lehetséges eset áll fenn:

- ❖ **Painlevé-teszt:** minden i esetén c_i konstans függvény, valamint $p_j \in \mathbb{Z}$ és $\rho_j \in \mathbb{N}$, $j = k, \dots, n+1$, ekkor az (5.3) sor **Laurent-sor**.
- ❖ **Gyenge Painlevé-teszt:** minden i esetén c_i konstans függvény, valamint $p_i, \rho_i \in \mathbb{Q}$, $j = k, \dots, n+1$, ekkor az (5.3) sor **Puiseux-sor**.
- ❖ **Pszi-sor:** az (5.3) sor akkor Pszi-sor, ha a c_i függvény $\log(\tau)$ -ban polinom, továbbá $p_i, \rho_i \in \mathbb{C}$, ekkor a rendszer nem rendelkezik Painlevé-tulajdonsággal.



VICTOR PUISEUX
(1820–1883)

5.4. Transzformált rendszer

Most bevezetünk egy olyan transzformációt, amellyel az eredeti egyenletet új egyenletté transzformálva, annak fix pontjai lesznek az eredeti egyenlet szinguláris helyei, vagyis ezáltal a transzformáció által fogjuk visszavezetni a szinguláris hely körüli vizsgálatot fix pont körüli analízisre. Legyen tehát X olyan, hogy:

$$\begin{aligned}x(t) &= \tau^p X(\log(\tau)) \\ \tau &= e^s,\end{aligned}$$

ahol $s := \log(t - t_*) = \log(\tau)$, ekkor a transzformált rendszer az

$$X' = F \circ X \begin{cases} F_i \circ (X_1, \dots, X_{n+1}), & i = 1, \dots, n \\ qX_{n+1}, & \text{mivel } X_{n+1}(s) := e^{qs}. \end{cases}$$

X_{n+1} bevezetése nem minden esetben szükséges.

 PÉLDA: Lássunk két egyszerű példát, hogyan is működik ez a transzformáció. Először tekintsük az

$$\dot{x} = x^2$$

egyenletet. Ebben az esetben $g(x) := x^2$, illetve $h := 0$, amiből $p = -1$, $\alpha = -1$ így az $x(t) := \tau^{-1} X(\log(\tau))$ transzformációt alkalmazva

$$\dot{x}(t) = -\tau^{-2} X(\log(\tau)) + \tau^{-2} \dot{X}(\log(\tau)) = \tau^{-2} X^2(\log(\tau)),$$

amiből a transzformált egyenlet:

$$X' = X(1 + X).$$

Ez annyira egyszerű eset, hogy a vizsgálat szempontjából fölösleges is a transzformáció, hiszen tudjuk, hogy

$$x(t) = \alpha \tau^p = -\frac{1}{t - t_*},$$

ami valóban így van, és még a t_* -ot is könnyen fel tudjuk explicite írni:

$$t_* = t_0 + \frac{1}{x(t_0)}.$$

Speciálisan ha $t_0 = 0$, és $x(0) = x_0$, akkor

$$t_* = \frac{1}{x_0}.$$

☞ PÉLDA: A második példa legyen az

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + 3x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 - x_1\end{aligned}$$

egyenletrendszer. A jobb oldal két részre bontásával, így

$$g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad h(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 9x_2 \end{pmatrix}.$$

Amiből az (α, p) párra a

$$\begin{aligned}p_1 - 1 &= 2p_1 \\ p_2 - 1 &= p_1 + p_2 \\ p_1\alpha_1 &= \alpha_1^2 \\ p_2\alpha_2 &= 2\alpha_1\alpha_2\end{aligned}$$

egyenletek írhatóak fel, amiből az egyik lehetséges megoldás:

$$\alpha = (-1, 1), \quad p = (-1, -2).$$

Továbbá nézzük meg, hogy a h függvényre is teljesül-e a megfelelő feltétel:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h(\tau^p)}{\tau^{p-1}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{h(\tau^{p_1})}{\tau^{p_1-1}} \\ \frac{h(\tau^{p_2})}{\tau^{p_2-1}} \end{pmatrix} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 3\tau \\ 9\tau \end{pmatrix} = 0,$$

vagyis a h valóban nem domináns rész, legalább is az (α, p) pár által meghatározott szingularitás megfelelő környezetében. Most hajtsuk végre az

$$\begin{aligned}x_1(t) &:= \tau^{-1}X_1(\log(\tau)) \\ x_2(t) &:= \tau^{-2}X_2(\log(\tau)),\end{aligned}$$

transzformációt, így

$$\begin{aligned}X_1' &= X_1 + X_1^2 + 3X_3X_1 \\ X_2' &= 2X_2 + 2X_1X_2 - X_3^2X_1 \\ X_3' &= X_3.\end{aligned}$$

5.5. Painlevé-teszt és az instabilis sokaság

Most, hogy megkonstruáltuk a transzformált rendszert, ezen elvégezhetjük a lokális fix pont körüli vizsgálatot. A transzformált rendszernek legalább két (triviális) fix pontja van, mégpedig $X_0 = 0$ és $X_* = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0)$. Az első fix ponthoz tartozó

$$\sigma(F'(X_0)) = \{-p_1, -p_2, \dots, -p_n, q\}$$

sajátértékek megadják a p vektor komponensei ellentettjének és a q -nak az értékét, amik egyszerűen az (α, p) pár által meghatározott szinguláris megoldás kitevői, illetve a (szingularitás valamely környezetében) nem domináns tagot jellemző q . A másik, azaz az X_* fix ponthoz tartozó

$$\sigma(F'(X_*)) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, q\}$$

sajátértékek, – amik már sokkal érdekesebbek – megadják az eredeti egyenlet Kovalevszkaja-kitevőit, illetve ezt kiegészítve a nem domináns részt jellemző q állandót.

Ha a transzformált rendszer fix pontjaihoz tartozó lokális instabilis sokaságokat vizsgáljuk, akkor a definíció szerint ez az eredeti rendszer szingularitása körüli megoldását adja (a nem domináns részt elhanyagolva), hiszen

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} X_u(s) = X_* \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_*} \|x_u(t)\| = +\infty.$$

Tehát írjuk fel a transzformált egyenlet X_* fix pontjához tartozó $W_u(X_*)$ instabilis sokaságot

$$X_u(s) = X_* + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(s) e^{(\rho^u, i)s}, \quad \text{Re}(\rho_i) > 0, \quad i \in \{k, \dots, n+1\}.$$

Térjünk át az eredeti változókra:

$$x_u(t) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(\log(\tau)) \tau^{(\rho^u, i)} \right). \quad (5.4)$$

Ez a lokális sora a transzformált rendszer X_* fix pont körüli instabilis sokaságának, ami az eredeti rendszer (α, p) párja által meghatározott megoldásának Pszi-sora, ami persze csak akkor adja meg a lokális formális megoldást, ha konvergens. Az (5.4) sor annyi tetszőleges állandót tartalmaz, amennyi pozitív Kovalevszkaja-kitevő van az X_* fix ponthoz tartozó sajátértékek között, plusz még egyet, ami a t_* szingularitás helyének feleltethető meg, a kezdeti

értéktől függően. Ha a rendszernek $n - 1$ pozitív Kovalevszkaja-kitevője van, akkor az (5.4) sor az eredeti egyenlet formális, általános megoldását adja, természetesen csak megfelelő konvergencia tartományon.

A Painlevé-tulajdonsággal rendelkező rendszereket integrálható rendszereknek nevezzük, ami másképpen azt jelenti, hogy a rendszer megoldásának időbeli szingularitásai körül azok Laurent-sorba fejthetők. A Painlevé-teszt, mely szükséges feltételt ad ennek a tulajdonságnak a meglétére, az alábbiakban foglalható össze:

1. Állítás. *Ha az $\dot{x} = f \circ x$ rendszer rendelkezik Painlevé-tulajdonsággal, akkor ennek a rendszernek az összes transzformáltjára teljesül, hogy*

- ❖ *az X_* és X_0 fix pontokhoz tartozó sajátértékek egészek,*
- ❖ *az X_* ponthoz tartozó Jacobi-mátrix féligegyszerű³,*
- ❖ *a transzformált rendszer formálisan linearizálható az X_* fix pont körül.*

Most foglaljuk össze, hogy milyen lépéseket is kell elvégeznünk egy rendszeren, hogy meg tudjuk rendelkezni-e a Painlevé-tulajdonsággal (szükséges feltételek):

- I. Először is keressük meg az összes lehetséges (α, p) párt, majd ellenőrizzük, hogy $p \in \mathbb{Z}^n$ teljesül-e, minden párra.
- II. Végezzük el a transzformációt.
- III. Végül a transzformált rendszernél ellenőrizzük, hogy minden nem nulla fix pontja körül formálisan linearizálható-e, azaz a lokális normál formája lineáris-e.

5.6. A Pszi-sor konvergenciája

Tehát tekintsük ismét az

$$\dot{x} = f \circ x$$

rendszert, ahol $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, tegyük fel, hogy az (α, p) pár hiperbolikus vagyis, az ehhez a párhoz tartozó Kovalevszkaja-kitevőkre fennáll, hogy $\operatorname{Re}(\rho_i) \neq 0$, bármely $i = 1, \dots, n$ esetén. Továbbá tekintsük a

$$\Psi(\tau) = \tau^p \left(\alpha + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i (\log(\tau)) \tau^{(\rho^u, i)} \right)$$

³Féligegyszerű az a mátrix, melynek a Jordan-alakja diagonális.

Pszi-sort. Ha a transzformált rendszer instabilis sokaságának sorba fejtését tekintjük, vagyis a

$$X_u(s) = X_* + \sum_{|i|=1}^{+\infty} c_i(s) e^{(\rho^u, i)s},$$

összefüggést, akkor a Pszi-sor konvergenciájának kérdését egy exponenciális hatványsor konvergenciájára vezettük vissza, amikor $s \rightarrow -\infty$.

5. Tétel. *Tekintsük az $\dot{x} = f \circ x$ rendszert, és az ehhez tartozó (α, p) hiperbolikus párt, továbbá legyen a t_* szingularitás körüli lokális $\Psi(t, C^u)$ Pszi-sor, C^u tetszőleges állandókkal. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, és $\alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $0 < \alpha < \operatorname{Re}(\rho_i)$, minden $i = k, \dots, n+1$ esetén, továbbá $\delta > 0$, hogy $|a| < \delta$, $|t - t_*| < \varepsilon$ és $M \in \mathbb{R}$, hogy*

$$|\Psi(t, a)| < M|a|\tau^\alpha.$$

5.7. A felrobbanás vizsgálata

A dolgozat bevezető szakaszában már ismertettük a felrobbanás fogalmát, azonban még egy apróságot – noha triviális – nem árt megemlítenünk. Mégpedig a felrobbanás bekövetkezhet előre tartó időben és hátra-felé haladó időben is, bár az utóbbinak nem sok gyakorlati jelentősége van, ezért a továbbiakban előre haladó (azaz pozitív) időben vizsgálódunk, de zárójelben a negatív időre vonatkozó állítást is közöljük.

A következő tétel előtti eszmeifuttatás nem túl hosszú, és nehéz hiszen minket általában a valós idejű események érdekelnek, így jó okunk van feltételezni, hogy $t_* \in \mathbb{R}$ szingularitáshoz $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméterek tartoznak, tehát igaz a következő

6. Tétel. *Tekintsük ismét az $\dot{x} = f \circ x$ rendszert, és tegyük fel, hogy a rendszerhez tartozik (α, p) pár $(k-1)$ pozitív Kovalevszkaja-kitevővel (úgy, hogy a $\rho_{n+1} = q$ értéket nem vesszük ezek közé) és legyen $\beta = \alpha(-1)^p$. Ekkor, ha $\beta \in \mathbb{R}^n$ ($\alpha \in \mathbb{R}^n$) létezik a kezdeti értékeknek egy k dimenziós S_0^k sokasága, amely előre (hátra) haladó időben felrobbanáshoz vezet.*

Ha $k = n+1$, akkor a megoldást formálisan a Pszi-sor előállítja, ha az konvergens, aminek a bizonyítása általában a legnehezebb. Ha vannak olyan Kovalevszkaja-kitevők, melyek valós része nulla, akkor ez azt jelenti, hogy a transzformált rendszer fix pontja nem hiperbolikus, tehát a vizsgálathoz nem elég csupán a lineáris analízis. Azonban megvizsgálható a felrobbanás bekövetkezése a rendszer egy részén, mégpedig tegyük fel, hogy van l nulla és $(k-1)$ pozitív valós részű sajátérték, ekkor létezik $m \geq k+l$ dimenziójú S_0^m

sokaság, melyből a megoldást indítva, felrobbanás következik be. Sőt a kezdeti értékeknek azon halmazának helyét is meg tudjuk határozni, amelyből a megoldást indítva felrobbanás következik be. A helyét itt úgy értve, hogy melyik ortáns, melyet az alábbiakban \mathcal{O} jellel fogunk jelölni.

7. Tétel. *Tekintsük az $\dot{x} = f \circ x$ rendszert, és legyen S_0^k az a sokaság, melyből indítva a megoldást felrobbanás következik be, továbbá legyen $\mathcal{O}_{\text{sign}(\beta)}$ ($\mathcal{O}_{\text{sign}(\alpha)}$) az az ortánsa a térnek melyet a β (α) vektor komponenseinek előjele határoz meg. Ekkor az az ortáns, ahonnan a megoldást indítva előre (hátra) haladó időben felrobbanás következik be az, amelyre $\mathcal{O}_{\text{sign}(\beta)} \cap S_0^k \neq \emptyset$, illetve $\mathcal{O}_{\text{sign}(\alpha)} \cap S_0^k \neq \emptyset$.*

6. Első integrál

Nemnegatív vektorral megadott lineáris első integrálok jól használhatók kinetikai differenciálegyenletek felrobbanásának kizárásához.

8. Tétel. *Konzervatív reakció tömeghatás kinetikájú indukált kinetikai differenciálegyenletének megoldása semmilyen kezdeti érték mellett nem robban fel.*

BIZONYÍTÁS: A

$$\sum_{m=1}^M \alpha(m, r) X_m \xrightarrow{k_r} \sum_{m=1}^M \beta(m, r) X_m \quad r = 1, \dots, R$$

reakció indukált kinetikai differenciálegyenlete:

$$\dot{c}_m = \sum_{r=1}^R (\beta(m, r) - \alpha(m, r)) k_r \prod_{p=1}^M c_p^{\alpha(p, r)} \quad m = 1, \dots, M.$$

Ennek teljes megoldásai – Volpert tétele szerint – tetszőleges nemnegatív $c(0) = c^0$ kezdeti feltétel mellett az értelmezési tartomány minden pontjában nemnegatívak. A konzervativitás azt jelenti, hogy létezik $\varrho \in (\mathbb{R}^+)^M$, mellyel minden $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ mellett

$$\sum_{r=1}^R (\beta(m, r) - \alpha(m, r)) \varrho_m = 0$$

teljesül, tehát

$$\sum_{m=1}^M \varrho_m \dot{c}_m = 0,$$


vagyis

$$\sum_{m=1}^M \varrho_m c_m(t) = \sum_{m=1}^M \varrho_m c_m^0.$$

Fennáll tehát, hogy

$$c_p(t) \leq \frac{1}{\varrho} \sum_{m=1}^M \varrho_m c_m(t) \leq K$$

így a megoldás határtól-határig terjedése miatt az nem robban fel. ■

 **MEGJEGYZÉS:** Nemkinetikai differenciálegyenletre a pozitív első integrál létezése nem zárja ki a felrobbanást, amint azt az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -x^2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet példája mutatja.

Meglepő, hogy a negatív divergencia értelmezését – a térfogatcsökkenést – tekintve, elsőre szokatlanak tűnhet az, hogy úgyszólván csökkenhet a fázistérfogat hogy a megoldás közben felrobban, ahogy azt az alábbi példa is mutatja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -x^3 y. \end{aligned}$$

7. Ljapunov-függvény

A formális reakciókinetika néhány alapvető eredménye úgy is átfogalmazható, mint a felrobbanást kizáró állítás. Ezek bizonyítása általában entrópia szerű Ljapunov-függvényeken alapulnak.

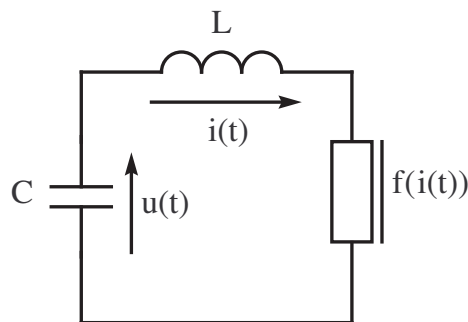
9. Tétel (Zéró deficiencia). *Gyengén megfordítható nulla deficienciájú indukált kinetikai differenciálegyenlet megoldásai nem robbannak fel.*

10. Tétel (Volpert). *Aciklikus Volpert-gráffal bíró indukált kinetikai differenciálegyenlet megoldásai nem robbannak fel.*

8. Alkalmazások

8.1. Nemlineáris rezgőkör

Tekintsük a 3. ábrán látható kapcsolást, a bejelölt referenciáirányokkal. Az



3. ábra. Nemlineáris ellenállást tartalmazó rezgőkör.

áramkörben lévő kondenzátorról és tekercsről feltehetjük, hogy $C, L \in \mathbb{R}^+$ állandó értékűek, legalább is a folyamathoz képest nagyon lassan változnak, így feltevésünk jogos. A nemlineáris ellenállásról tudjuk, hogy az áram-feszültség karakterisztikája a $\mathbb{R} \ni p \mapsto f(p)$ folytonos függvényvel adott. Továbbá feltételezzük, hogy $f(0) = 0$ és $\mathbb{R} \ni p \mapsto pf(p) \geq 0$ mivel ha ez nem így lenne, akkor – felírva a teljesítményét – lenne, olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy

$$P(t) = i(t)f(i(t)) < 0, \quad t \in I,$$

ami azt jelenti, hogy nem fogyasztóként, hanem energiaforrásként működne, márpedig az energiamegmaradás törvénye szerint ez nem lehetséges. Tudjuk, hogy a kondenzátor áramára (i_c), illetve a tekercs feszültségére (u_L) a következő összefüggések állnak fenn:

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}, \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

A Kirchhoff-törvényekből felírható a következő két egyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{1}{L}u(t) - \frac{1}{L}f(i(t)). \end{aligned}$$

11. Tétel. *A fenti egyenlet megoldása semmilyen kezdeti értékre nem robban fel.*

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás alapja egy megfelelően választott, energia típusú Ljapunov-függvény. Írjuk fel a kondenzátorban és a tekercsben a t időpontban lévő energiát:

$$P(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t),$$

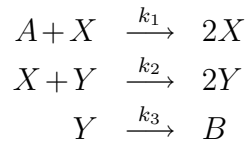
most nézzük meg, hogyan is változik ez az energia az idő függvényében:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) &= Cu(t)\frac{du(t)}{dt} + Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \\ &= u(t)i(t) - u(t)i(t) - i(t)f(i(t)) = -i(t)f(i(t)) \leq 0,\end{aligned}$$

vagyis az energia minden $t \in I$ esetén nem nő, és mivel a kiindulási állapotban csak a kondenzátor és a tekercs tartalmazhat energiát, illetve az energia csak nemnegatív lehet, ezért a megoldások korlátosak maradnak az egész I intervallumon. ■

8.2. A Volterra–Lotka-reakció

Tekintsük a számos biológiai és kémiai alkalmazással rendelkező [8] Volterra–Lotka-reakciót:



Ezt a

$$\dot{x} = k_1x - k_2xy \quad (8.1)$$

$$\dot{y} = k_2xy - k_3y \quad (8.2)$$

differenciálegyenlet-rendszerrel lehet modellezni, ahol $k_1 := \hat{k}_1[A] \in \mathbb{R}^+$ és $k_2, k_3 \in \mathbb{R}^+$. Ha a 3. fejezetben tárgyalt módszert alkalmazzuk, amit itt láthatóan alkalmazhatunk kiderül, hogy ebben az esetben épp nem sikerül a felrobbanást bizonyítani, mivel az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k_2(\omega_2 - \omega_1) \\ k_2(\omega_2 - \omega_1) & 0 \end{pmatrix}$$

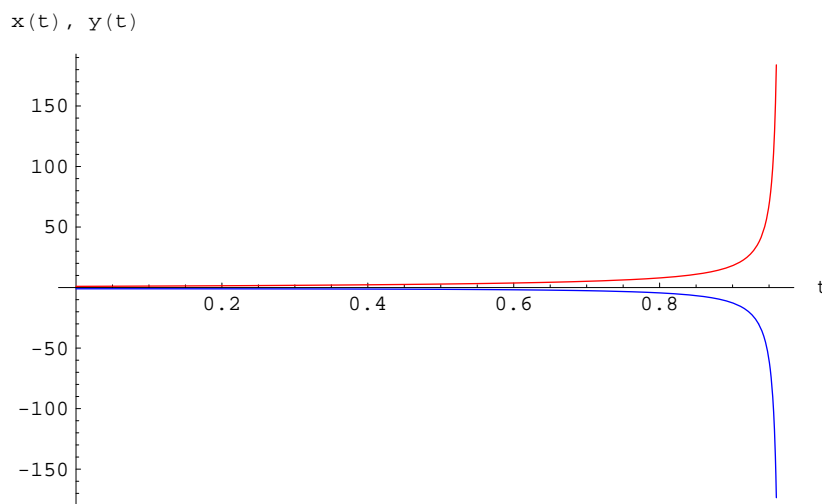
mátrix nyilván nem pozitív definit. Ebből persze még nem következik, hogy nem is robban fel, ezért próbáljuk előállítani a formális megoldást Pszi-sorral. Összesen egy olyan felbontást találtunk, ami a csonkított rendszer pontos megoldását adja:

$$g = \begin{pmatrix} -k_2xy \\ k_2xy \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} k_1x \\ -k_3y \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

amire


$$\alpha = \left(-\frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_2}\right) \quad p = (-1, -1). \quad (8.4)$$

A Kovalevszkaja-kitevők: $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 1$. Mivel létezik $n - 1 = 1$ pozitív Kovalevszkaja-kitevő, így létezik a kezdeti értékeknek olyan nyílt halmaza, melyből a megoldást indítva felrobban a megoldás. A $\text{sign}(\beta) = (1, -1)$, ami azt jelenti, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}^-$ kezdeti értékekre a megoldás felrobban (4. ábra). A fenti egyenlethez tett megszorításokkal ennek az eredménynek nincs nagy jelentősége, hiszen kémiaiailag értelmes kezdeti értékre nem robban fel – összhangban a korábbi ismeretekkel [8]. A 4. ábrán bemutatott esetben, a



4. ábra. A megoldások $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

felrobbanás idejére, numerikus számítással $t_* \approx 0.9656$ közelítő értéket kaptuk.

 **MEGJEGYZÉS:** Az $x_0 \in \mathbb{R}^-$, $y_0 \in \mathbb{R}^+$ kezdeti értékekre a megoldás negatív időben szintén felrobban.

8.3. Egy termokinetikai példa [10, Problem 7.3]

Az alább tárgyalt rendszerről – amely a hőmérséklet változását is figyelembe vevő reakciókinetikai modell – numerikus eredmények alapján tudjuk, hogy fölrobban.

$$\dot{x}_1 = \mu e^{x_3} - x_1(x_2^2 + K) \quad (8.5)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(x_2^2 + K) - x_2 \quad (8.6)$$

$$\dot{x}_3 = \delta x_2 - \gamma x_3, \quad (8.7)$$

ahol $\mu, \delta, \gamma, K \in \mathbb{R}^+$. Az első egyenletben lévő exponenciális tag helyett annak Taylor-polinomjával számoltunk. Elmentünk egészen a kilencedik tagig

és rengeteg megfelelő felbontást találtunk, viszont a legtöbbször a három Kovalevszkaja-kitevőből csak egy volt pozitív valós, ezért a felrobbanást nem sikerült bizonyítani.

Köszönetnyilvánítás A dolgozat elkészítéséhez a **T047132** számú OTKA pályázat járult hozzá.

Függelék

A dolgozatban előforduló számítási példákat általában saját kezűleg írt *Mathematica* program segítségével dolgoztam ki. Az alábbiakban ezen programok kódja áll.

Kvázimonomiális transzformáció

A program egyszerű mátrix műveleteket végez.

```
<< LinearAlgebra'MatrixManipulation'

B = {{2, 2, 0, 2}, {1, 3, 1, 2}, {1, 2, 1, 3}};
A = {{1, 2, 5}, {1, 4, -1}, {0, 0, -3}, {2, -1, 0}};
λ = {1, 2, 1, -1};

{m,n} = Dimensions[B];
r = MatrixRank[B];

If[
  MatrixRank[B] == n, Cm = IdentityMatrix[r], Cm = AppendRows[
    AppendColumns[
      IdentityMatrix[MatrixRank[B]], Table[0, {i, 1, n - r}, {j, 1, r}]
    ], Transpose[NullSpace[B]]
  ]
]

At = Inverse[Cm].A;
Bt = B.Cm;
λt = Inverse[Cm].λ;
```

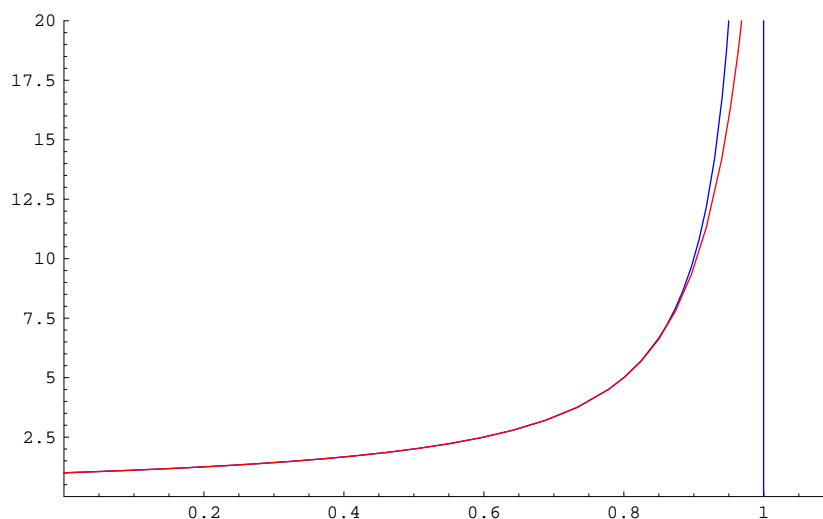
Taylor-sor alakú megoldás

Egyelőre csak az $m = n = 1$ esetre sikerült megírni a programot, de mivel ebben az egyszerű esetben is az absztrakcióra és általánosításra törekedtem, remélhető, hogy jó alapot nyújt a további fejlesztésre.

```
M = B A;
T = Array[{A + FoldList[Plus, 0, Array[M&, #-1]]/.List->Times}&, r];
Ci = Transpose[Array[x0 T[[#, 1]] x0^(#B)&, r]];
x[t_] = Prepend[Array[(Ci[[1, #]]t^#) / #! &, r], x0]/.List->Plus;
```

Az $A = B = 1$, $x_0 = 1$ és $r = 30$ esetre elvégezve a tesztelést, vagyis az $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$ kezdetiérték-probléma megoldását előállítva pontosan és

sorfejtéssel, az eredmény az 5. ábrán látható, ahol késsel a pontos, pirossal pedig a sorfejtéssel kapott eredmény látszik.



5. ábra. A teszt egy eredménye.

Felbontások és az (α, p) paraméterek meghatározása.

A program kulcsa a mintázat felismerése, ehhez a program eleje a szimbolikusan megadott egyenlet jobb oldalát úgy készíti elő, hogy az a mintázat felismerésének kedvezzen, illetve ezzel együtt előállítja az összes lehetséges felbontást. Majd a program végén, az így meghatározott megfelelő kitevők-ből és együtthatókból felállított egyenletek megoldása a `Solve` utasítással kerül sorra.

```
DiffEqus = Length[f];
f = f /. Plus -> List
rhs = Flatten[Outer[List, Sequence @@ f], 2];
Decomp = Length[rhs];
ClearAll[x, X, , p, A, P];
X = Array[x# = a# τ^p# &, DiffEqus];
A = Array[a# &, DiffEqus]; P = Array[p# &, DiffEqus];
ClearAll[lhs];
Array[{x# = a# τ^p#} &, DiffEqus];
lhs = D[X, τ];
Modrhs = Replace[rhs, (xx_ /; FreeQ[xx, τ]) :> 0, {2}]

KitevoRhs = Replace[Modrhs, _τ^n_ -> n, {2}]
```

```

SzorzoRhs = Replace[rhs, a_τ^x_ -> a, {2}]
KitevoLhs = Replace[lhs, _τ^n_ -> n, {1}]
SzorzoLhs = Replace[lhs, a_τ^x_ -> a, {1}]

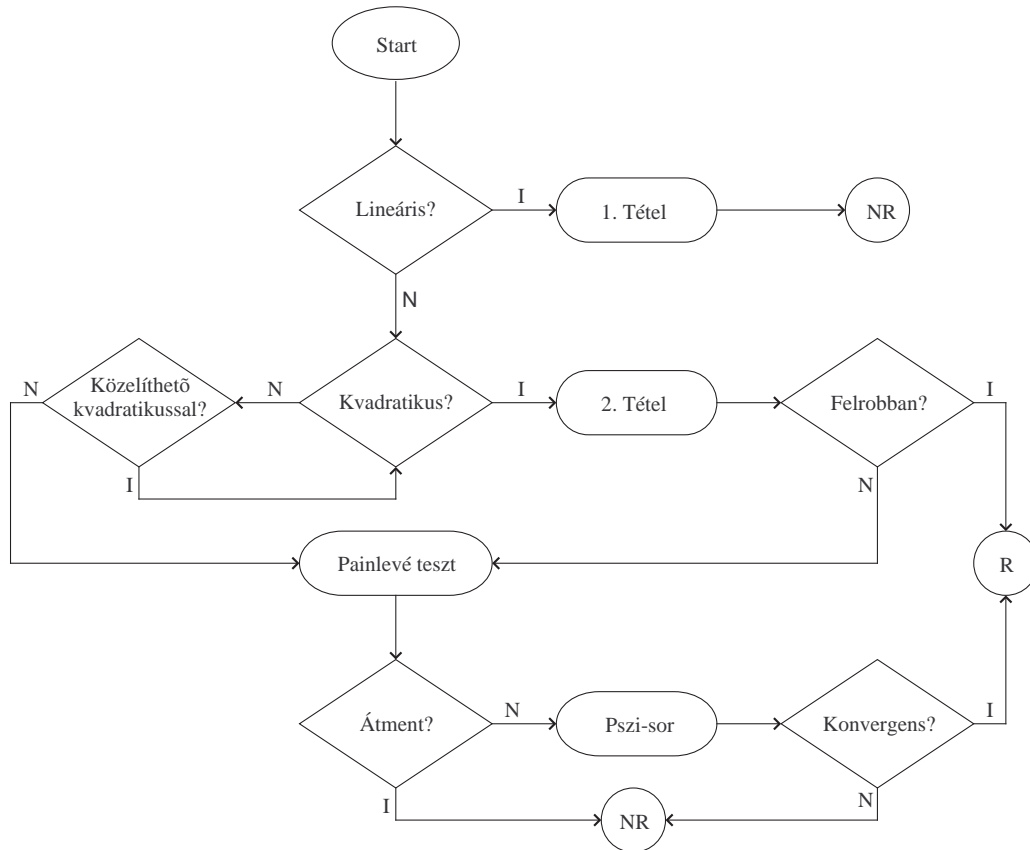
Equations1 = Array[Thread[KitevoRhs[[#]] == KitevoLhs] &, Decomp]
Equations2 = Array[Thread[SzorzoRhs[[#]] == SzorzoLhs] &, Decomp]

Balances =
  Array[Solve[Flatten[{Equations1[[#]], Equations2[[#]]}],
    Flatten[{A, P}]] &, Decomp] // MatrixForm

```

Diagram

Az alábbi diagram egy lehetséges algoritmusvázlatot mutat be arra, hogy milyen lépéseket érdemes elvégeznünk, hogy egy egyenletről eldöntsük, hogy felrobban-e vagy sem.



Hivatkozások

- [1] L. A. Beklemisheva: Classification of polynomial systems with respect to birational transformations i. 14. évf. (1978) 5. sz., *Differentsial'nye Uravneniya*, 807–816. p.
- [2] L. Brenig–M. Codutti–A. Figueiredo: Numerical integration of dynamical systems using Taylor expansion. In *Posters of ISSAC'96 (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)* (konferenciaanyag). 1996.
- [3] L. Brenig–A. Goriely: Universal canonical forms for time-continuous dynamical systems. 40. évf. (1989. Oct) 7. sz., *Phys. Rev. A*, 4119–4122. p. 3 p.
- [4] W. M. Getz–D. H. Jacobson: Sufficiency conditions for finite escape times in systems of quadratic differential equations. 19. évf. (1997), *J. Inst. Maths. Applics*, 377–383. p.
- [5] P. Glendinning: *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. 1994, Cambridge University Press.
- [6] A. Goriely.: A brief history of Kovalevskaya exponents and modern developments, 2000.
URL citeseer.ist.psu.edu/goriely00brief.html.
- [7] L. Perko: *Differential Equations and Dynamical Systems*. 1996, Springer-Verlag.
- [8] P. Érdi–J. Tóth: *Mathematical models of chemical reactions*. Princeton, 1989, Princeton University Press.
- [9] J. Tóth–G. Li–H. Rabitz–A. S. Tomlin: A formális reakciókinetika modelljei, problémái és alkalmazásai. 41. évf. (1978), *A kémia újabb eredményei*, 227–350. p.
- [10] J. Tóth–G. Li–H. Rabitz–A. S. Tomlin: The effect of lumping and expanding on kinetic differential equations. 57. évf. (1997) 6. sz., *SIAM J. Appl. Math.*, 1531–1556. p.
- [11] J. Tóth–L. P. Simon: *Differenciálegyenletek*. Budapest, 2005, Typotex.