

HISZTERÉZISES KÁOSZGENERÁTOR VIZSGÁLATA

Csikja Rudolf

V. éves villamosmérnök

Konzulens:

dr. Garay Barnabás

dr. Tóth János

2007. november 5.



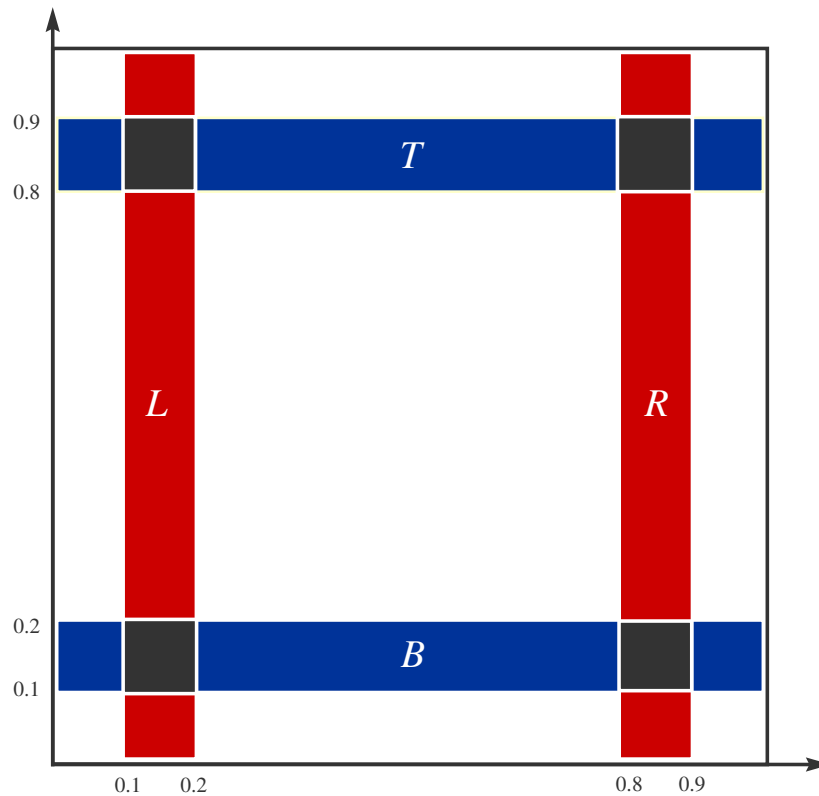
1. Bevezetés

A bevezető részben összefoglalom azokat a korábbi ismereteket, melyek a második fejezetben ismertetett probléma megértéséhez, kezeléséhez szükségesek.

1.1. A Smale-patkó

Tekintsük a síkon az $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ egységnyezetet. Továbbá ezen az egységnyezeten belül definiáljunk kitüntetett tartományokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} L &:= \left\{ (x, y) \in S : \frac{1}{10} \leq x \leq \frac{2}{10} \right\}, & R &:= \left\{ (x, y) \in S : \frac{8}{10} \leq x \leq \frac{9}{10} \right\}, \\ B &:= \left\{ (x, y) \in S : \frac{1}{10} \leq y \leq \frac{2}{10} \right\}, & T &:= \left\{ (x, y) \in S : \frac{8}{10} \leq y \leq \frac{9}{10} \right\}. \end{aligned}$$



1. ábra. Smale-patkó az egységnyezeten.

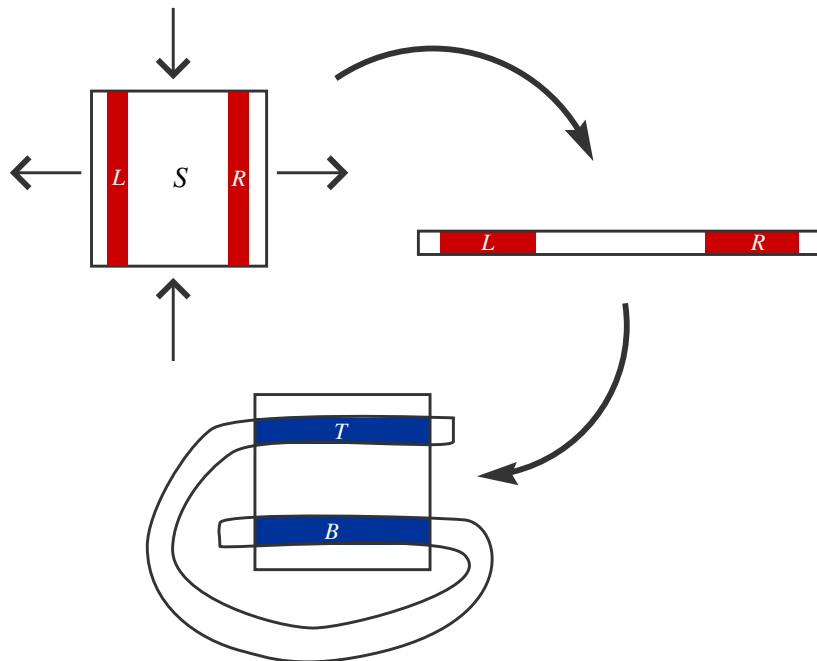
Definiáljuk az $f: L \cup R \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést a következőképpen:

$$f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + u(x) \begin{bmatrix} -1 \\ 1/10 \end{bmatrix},$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad u(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in L \\ 8, & \text{ha } (x, y) \in R. \end{cases}$$

A leképezés úgy is megfogalmazható, hogy vesszük az egységnégyzetet, majd ezt y irányban összenyomjuk a tizedére, és közben x irányban a tízszeresére nyújtjuk. Ezután pedig a kapott alakzatot a 2. ábrán látható módon visszahajtuk az egységnégyzetre.



2. ábra. Smale-patkó.

A leképezés főbb tulajdonságai.

- Könnyen ellenőrizhető, hogy $f(L) = B$ és $f(R) = T$.
- Mivel $\det(A) = 1$, ezért az f leképezés területtartó.
- Robosztus, olyan értelemben, hogy ha valamilyen $\varepsilon_0 > 0$ esetén

$$\|f - \tilde{f}\| + \|f' - \tilde{f}'\| < \varepsilon_0$$

teljesül, ahol \tilde{f} perturbálja az f leképezésnek, akkor a $z_{k+1} = f(z_k)$ diszkrét dinamika belső struktúrája a perturbáció hatására megőrződik.

Világos, hogy minden $(x, y) \in L \cup R$ pont koordinátája felírható a következő alakban:

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.a_0 a_1 a_2 \dots \\ 0.b_1 b_2 b_3 \dots \end{bmatrix},$$

ahol $a_0 \in \{1, 8\}$. Ha ezen pontok egyikére alkalmazzuk az f leképezést, akkor a kapott pont a következő alakban írható fel:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0.a_1 a_2 a_3 \dots \\ 0.a_0 b_1 b_2 \dots \end{bmatrix}.$$

Hiszen a leképezés először veszi az x koordináta tízszeresét, és az y koordináta tizedét, ami egy balra, illetve jobbra eltolást jelent a koordináták tizedes tört alakjában. Aztán az első koordinátából pontosan az a_0 -at vonja le, míg a második koordinátához $a_0/10$ -at ad hozzá. Így a kapott pontra valóban $f(x, y) \in B \cup T$.

Definiáljunk most egy olyan σ leképezést, amely (az 1.1) alakban megadott síkbeli ponthoz az $s = \{\dots b_3, b_2, b_1 \mid a_0, a_1, a_2 \dots\}$ mindkét irányban végtelen sorozatot rendeli hozzá. Ekkor nyilvánvaló, hogy σ az $f(x, y)$ ponthoz az $S(s) = \{\dots b_2, b_1, a_0 \mid a_1, a_2, a_3 \dots\}$ sorozatot rendeli. Vagyis áttérve a mindkét irányban végtelen sorozatok terére az f leképezés ekvivalens a balratolás S operátorával, ha $a_0 \in \{1, 8\}$, vagy másképpen ha $x \in L \cup R$. Ugyanakkor ebben a térben könnyedén értelmezhetjük az f^{-1} inverz leképezést is, ami természetesen az S^{-1} jobbratolás operátorával ekvivalens, ha $b_1 \in \{1, 8\}$, vagy másképpen ha $y \in B \cup T$.

Világos tehát, hogy f mindkét irányba végtelen sokszor iterálható, akkor és csak akkor, ha $a_k, b_k \in \{1, 8\}$ minden $k \in \mathbb{N}_0$ esetén. Vagyis a

$$z_{k+1} = f(z_k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

dinamikai rendszert azokra a síkbeli pontokra értelmezzük, amelyek koordinátája előáll alábbi alakú tizedes törtként, (amely diadikus törtként azonostható):

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{10^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k} \quad (a_k, b_k \in \{1, 8\}).$$

Mivel a

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k} : c_k \in \{1, 8\} \right\}$$

halmaz pontjai (diadikus) Cantor-halmazt alkotnak, a diszkrét dinamikai rendszer trajektóriái a $\Lambda = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ halmazban haladnak, vagy más megfogalmazásban: a Λ halmaz invariáns az f leképezésre.

A Cantor-halmaz az egyik legegyszerűbb egydimenziós fraktál. Így azt is mondhatjuk, hogy a fenti dinamikai rendszer pályái két ilyen fraktál Descartes-féle szorzatában haladnak. Ebből a szempontból a fenti robusztussági tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a perturbált rendszer pontjainak $\tilde{\Lambda} := \tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$ halmaza invariáns az \tilde{f} leképezésre, és az eredeti rendszeréhez hasonló struktúrájú, ami úgy fejezhető ki, hogy a két fraktál távolsága $d_H(\Lambda, \tilde{\Lambda}) < \varepsilon$, ahol d_H a Hausdorff-távolság. A Hausdorff-távolság többek között a fraktáloknál és a grafikában használatos távolság (formális definíciója az X, Y kompakt halmazra: $d_H(X, Y) := \max\{\sup_x \inf_y d(X, Y), \sup_y \inf_x d(X, Y)\}$). Szemléletesen azt fejezi ki, hogy két halmaz akkor van egymáshoz közel, ha azok az általában használt értelemben is közel vannak, és ráadásul nagyon hasonló az alakjuk. Ezért még az is meglehet, hogy az eredeti és a perturbált rendszer pályáinak még csak közös pontja sincs, „szemre” mégsem különböznek. Vagyis a lényegi tulajdonság robusztus.

Legyen \mathcal{S} a mindkét irányban végtelen sorozatok tere, vagyis

$$\mathcal{S} := \{\{\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \dots\} : s_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}.$$

Vezessük be a $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ szorzattéren a következő, úgynevezett Fréchet-távolságot:

$$d_F(s, \tilde{s}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \frac{|s_k - \tilde{s}_k|}{1 + |s_k - \tilde{s}_k|},$$

ami nem más, mint a sorozatok megfelelő tagjainak távolsága a $[0, 1]$ intervallumra normálva, exponenciális súlyozással. Ezek szerint két sorozat annál közelebb van egymáshoz, minél több s_0 közeli indexű tagjuk van közel egymáshoz. Így igaz, hogy σ homeomorfizmus, továbbá $\sigma(\Lambda) = \Sigma_2$, ahol $\mathcal{S} \supset \Sigma_2 := \{1, 8\}^{\mathbb{Z}}$. A fentiek összegzésére a leképezések kapcsolatát szemléletes írhatjuk le a

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f|_{\Lambda}} & \Lambda \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{S} & \Sigma_2 \end{array}$$

kommutatív diagrammal, amely csupa homeomorf leképezéseket tartalmaz.

Most, hogy a fenti objektumokat megalkottuk, és megfelelő tulajdonságokkal ruháztuk fel őket, egyszerűen megfogalmazhatjuk a káosz tipikus tulajdonságait, és azok megjelenését a Smale-patkóban.

1.2. A káosz megjelenése a Smale-patkóban

A Smale-patkó kombinatorikus bonyolultsága a következőképpen fogalmazható meg.

Tetszőleges mindkét irányban végtelen L-R sorozathoz létezik egyetlen olyan $z \in \Lambda$, hogy $f^k(z) \in L$, vagy R a megadott sorrendben. Azaz z pályája az L és R halmazt a megadott sorrendben látogatja végig. (Itt, és alább f^k az f függvény k -adik iteráltja.)

A kezdeti értéktől való érzékeny függés azt fejezi ki, hogy akármilyen z és $\tilde{z} \neq z$ pontból indított pályák elegendő idő után, egy rögzített távolságtól messzebb kerülnek egymástól.

Létezik olyan $\eta > 0$ állandó, hogy tetszőleges két $z, \tilde{z} \in \Lambda$, $z \neq \tilde{z}$ pontra van olyan $N \in \mathbb{Z}$, amire $|f^N(z) - f^N(\tilde{z})| > \eta$.

Van olyan pálya, amely az összes többi pályát tetszőlegesen kis távolságban megközelíti.

Létezik $s \in \Sigma_2$ sűrű pálya, amelyre tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, minden $z \in \Lambda$ pontra létezik $k \in \mathbb{Z}$, hogy $d_F(s, \sigma(f^k(z))) < \varepsilon$.

$$s = \{\dots; 8, 1; 1, 1; 8; 1 | 1; 8; 1, 1; 1, 8; 8, 1; 8, 8; 1, 1, 1; 1, 1, 8; \dots\}.$$

Sőt a periodikus pályák is sűrűek, olyan értelemben, hogy minden ponthoz tetszőlegesen közel van periodikus pálya, például:

$$\{\dots 1, 8, 8, 1, 1, 8, 1, 8 | 1, 1, 1, 8, 8, 1, 8 \dots\}$$

$$\{\dots 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8 | 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1 \dots\}$$

$$\{\dots 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 8 | 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1 \dots\}$$

$$\{\dots 1, 8, 1, 1, 1, 8, 1, 8 | 1, 1, 1, 8, 1, 8, 1 \dots\}$$

A fentiekben szereplő tulajdonságok miatt a Smale-patkóban lévő káoszt Σ_2 -típusú káosznak hívják.

1.3. Káosz egydimenziós leképezésekben

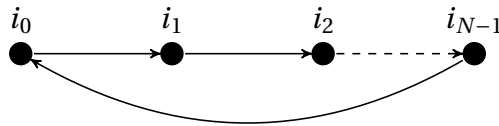
Síkbeli leképezésekből a Poincaré-metszet segítségével kaphatunk egydimenziós dinamikát.

Amint láttuk a káosz szoros kapcsolatban van a periodikus pályákkal. Legyen $\mathbb{I} := [0, 1]$ intervallum, és $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ függvény, ekkor f^N tetszőleges $N \in \mathbb{Z}$ esetén értelmes. Legyen f folytonos, ekkor a Bolzano-tétel értelmében létezik fixpontja.

Legyen $\mathbb{I}_0, \dots, \mathbb{I}_M \subset \mathbb{I}$ diszjunkt, zárt intervallum, és definiáljuk a G_f leképezési (irányított) gráfot a következőképpen.

$$V(G_f) := \{0, 1, \dots, M\}, \quad E(G_f) := \{(i, j) \in V(G_f) \times V(G_f) : f(\mathbb{I}_i) \supset \mathbb{I}_j\}.$$

Továbbá legyen $i \rightarrow j$ él behúzza akkor, ha az \mathbb{I}_i intervallum képe teljes egészében tartalmazza az \mathbb{I}_j intervallumot.



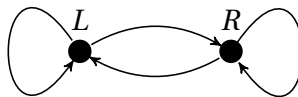
Ha a fenti gráf részgráfja G_f gráfnak, akkor létezik $x_i \in \mathbb{I}_i$ minden $i = 0, \dots, N-1$ esetén, hogy

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, \dots, N$$

N -periodusú pálya, azaz $f^N(x_0) = x_0$. Abból a kiindulva, hogy ha $f(\mathbb{I}_{i_n}) \supset \mathbb{I}_{i_{n+1}}$, akkor létezik $\mathbb{J}_{i_n} \subset \mathbb{I}_{i_n}$ intervallum, hogy $f(\mathbb{J}_{i_n}) = \mathbb{I}_{i_{n+1}}$, és a konstrukcióból teljes indukcióval belátható a fenti állítás.

A káosz létezésének elégséges feltétele. Ha a G_f leképezésgráfban van két egymást metsző irányított kör, akkor minden G_f gráfbeli mindkét irányban végtelen irányított úthoz létezik őt követő trajektória.

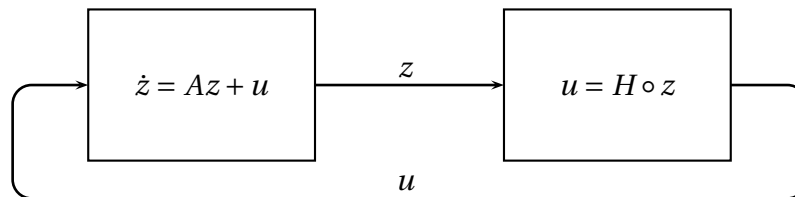
Például az alábbi gráfhoz tartozó dinamika pontosan úgy kaotikus, mint a Smale-patkó.



2. A káoszgenerátor vizsgálata

2.1. A vizsgált modell

A vizsgálat tárgya egy lineáris rendszer, ami egyszerű hiszterézises állapotvissza-csatolással rendelkezik.



A lineáris rendszer legyen oszcillátor ($A \in SO(2)$), és csak az x állapotot csatoljuk vissza, így a zárt rendszer állapotegyenlete:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma x + \omega y \\ \dot{y} &= -\omega x + \sigma y + H \circ x,\end{aligned}$$

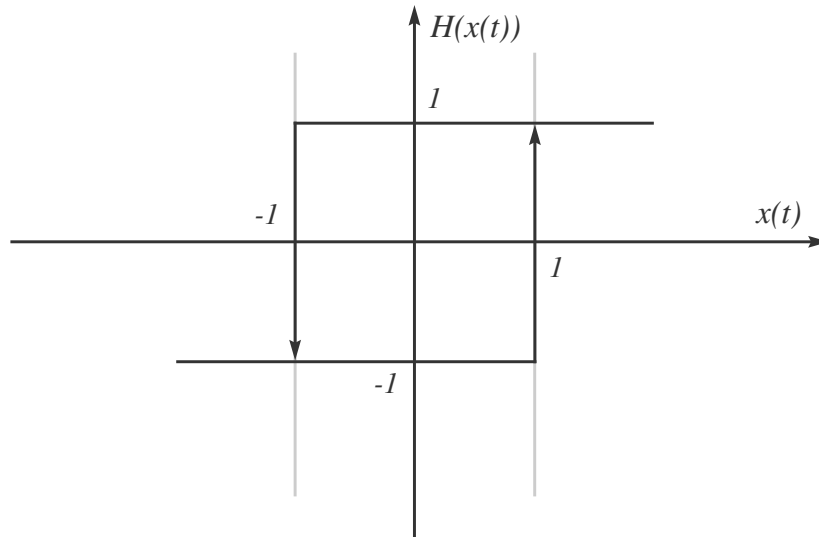
ahol az instabilitás biztosításához legyen $\sigma > 0$, illetve legyen H hiszterézissel rendelkező szakaszonként lineáris leképezés (3. ábra):

$$H(p, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p > 1 \\ -1, & \text{ha } p < -1 \\ \eta, & \text{ha } -1 \leq p \leq 1, \end{cases}$$

ahol $\eta \in \{1, -1\}$. Továbbiakban a $H(x(t)) = \pm 1$ jelölést fogom használni – értelemszerűen. A megfelelő tartományokon az $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ kezdeti értékekkel a fenti rendszer megoldása:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\sigma t} \left((x_0 \mp \omega) \cos(\omega t) + (y_0 \pm \sigma) \sin(\omega t) \right) \pm \omega \\ y(t) &= e^{\sigma t} \left((y_0 \pm \sigma) \cos(\omega t) - (x_0 \mp \omega) \sin(\omega t) \right) \mp \sigma.\end{aligned}$$

Bár a fenti megoldás nem annyira explicit, mint amennyire az elsőre látszik, hiszen a jobb oldalon szereplő $H(x(t)) = \pm 1$ tagok miatt tartalmazza $x(t)$ -t, de mivel H csak kétértékű függvény, ezért mégsem annyira erős az implicit függés. Mégis ez stabilizálja a rendszert, és ez okozza a kaotikus viselkedést is.



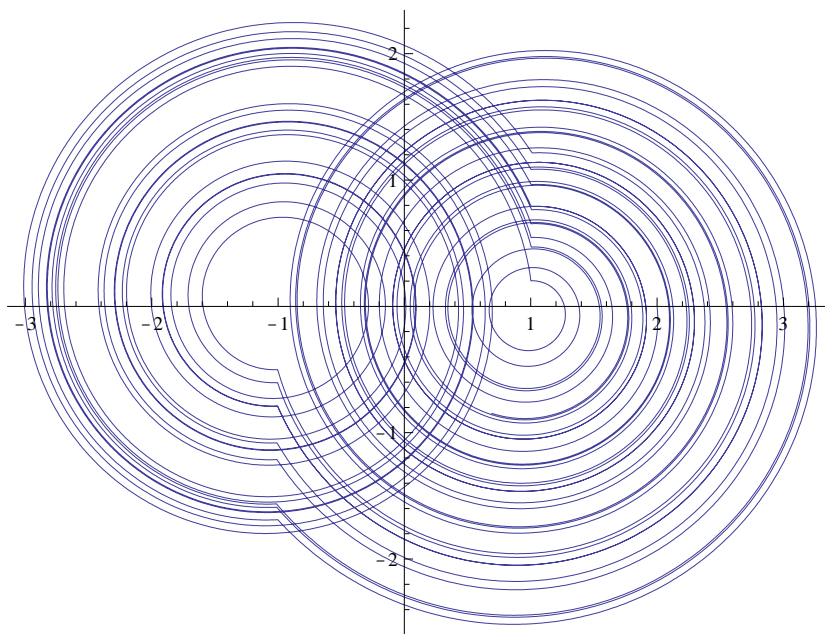
3. ábra. Hiszterézis.

Fogalmazzuk meg más szempontból a rendszer trajektóriának viselkedését. Könnyen ellenőrizhető, hogy az

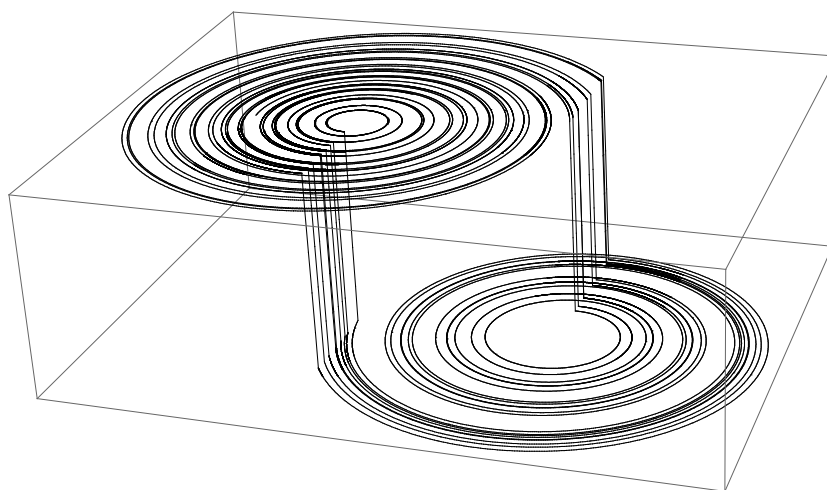
$$\begin{aligned}(x \pm \omega)' &= \sigma(x \pm \omega) + \omega(y \mp \sigma) \\ (y \mp \sigma)' &= -\omega(x \pm \omega) + \sigma(y \mp \sigma)\end{aligned}$$

rendszer ekvivalens az eredeti egyenletekkel. A differenciálegyenlet jobb oldala a – megfelelő tartományon – $(\pm\omega, \mp\sigma)$ egyensúlyi pontok körüli forgatást jelent. Mivel $\det(e^A) > 0$, a trajektóriák expandálnak; hogy ennek ellenére mégis stabilis a rendszer az annak köszönhető, hogy a hiszterézises átkapcsolások a trajektóriákra kontrakciós hatással vannak. Persze, ezek a hatások csak egy bizonyos mértékű expanziót tudnak ellensúlyozni ($\sigma \leq 0.05$).

A rendszer egy trajektóriája például a következőképpen alakul. Tegyük fel, hogy $x_0 \geq 1$, ekkor $H(x_0) = 1 = \eta$, így a rendszer trajektóriája az $(\omega, -\sigma)$ pont körül spirális alakban kifelé halad addig, amíg $x(t_1) < -1$ nem teljesül, ugyanis ekkor $H(x(t_1)) = -1 = \eta$, és így a trajektória a $(-\omega, \sigma)$ pont körüli forgásba kezd, és így tovább. Egy tipikus trajektóriát láthatunk a 4. ábrán. Szemléletesebb képet kapunk, ha az ábrázolásba bevesszük a $H(x(t))$ koordinátát is. A trajektóriák így két párhuzamos síkon helyezkednek el, amik között $H(x(t))$ teremt kapcsolatot (5. ábra).



4. ábra. Tipikus trajektória a síkon ($\sigma = 0.05$).

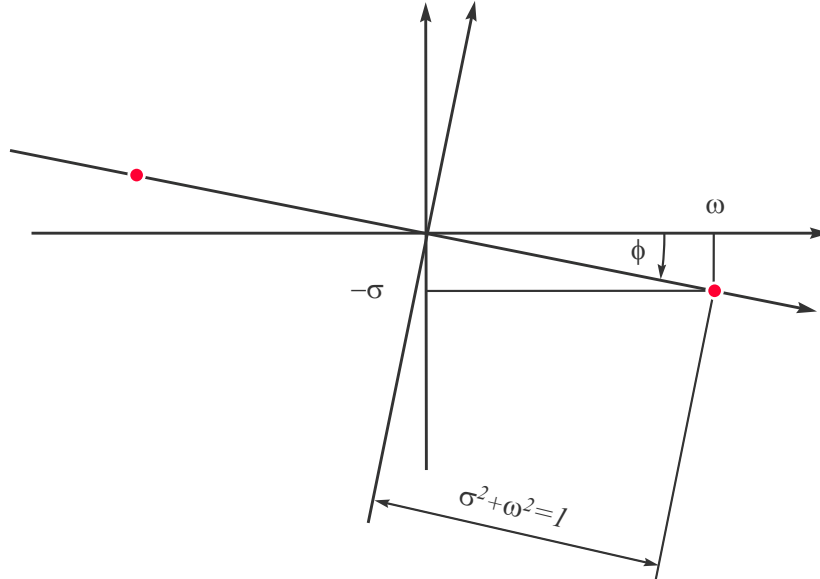


5. ábra. Az előző trajektória a „térben”.

2.2. Poincaré-metszet

A Poincaré-leképezést a trajektóriák és a két egyensúlyi pontot összekötő egyenes metszeteként fogjuk megkonstruálni. Először is az eredeti koordináta-rendszert

elforgatjuk úgy, hogy az x tengely az egyensúlyi pontokat összekötő egyenessel essen egybe. Ehhez nyilván $\varphi = \arctan(\sigma/\omega)$ szöggel, negatív irányba való forgatás szükséges. A továbbiakban ebben a koordináta-rendszerben vizsgálódunk.



6. ábra. A koordináta-rendszer transzformációja.

Mivel a forgatás invertálható lineáris leképezés, így világos, hogy a transzformált koordináta-rendszerben leírtak egyértelműen leírhatók az eredeti koordináta-rendszerben is. A transzformált rendszer egyensúlyi pontjai így $(1, 0)$, illetve $(-1, 0)$. A trajektóriák a megfelelő tartományokon ezek körül a pontok körül forognak. Pontosabban a megoldások:

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \mp 1 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

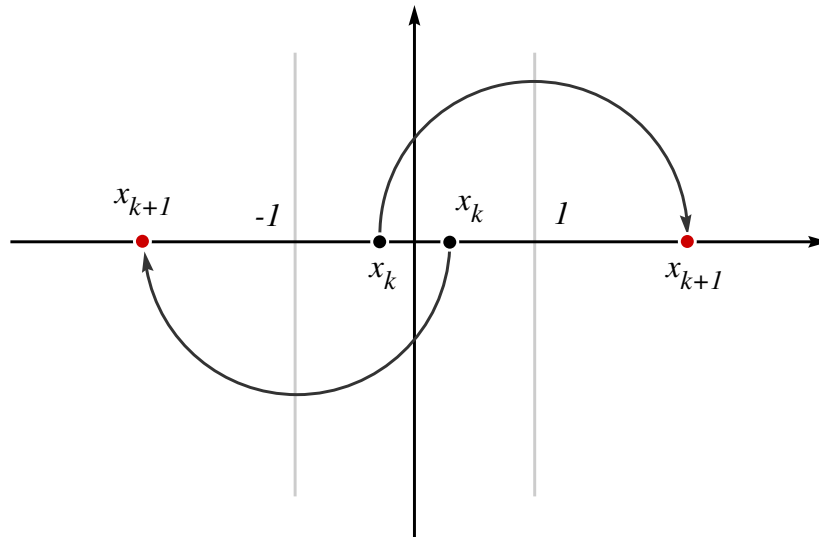
ahol $a(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $b(t) = e^{\sigma t} \sin(\omega t)$.

Tekintsük azt az esetet (7. ábra), amikor az $(x_k, 0)$ pontból indulva úgy metszi el az $(x_{k+1}, 0)$ pontot a trajektória, hogy közben nem vált síkot, vagyis $H(x_k) = H(x_{k+1})$. Ekkor a 2.1 egyenletbe behelyettesítve:

$$x_{k+1} = x(T) = a(T)(x_k \mp 1) \pm 1, \quad y_{k+1} = 0 = -b(T)(x_k \mp 1),$$

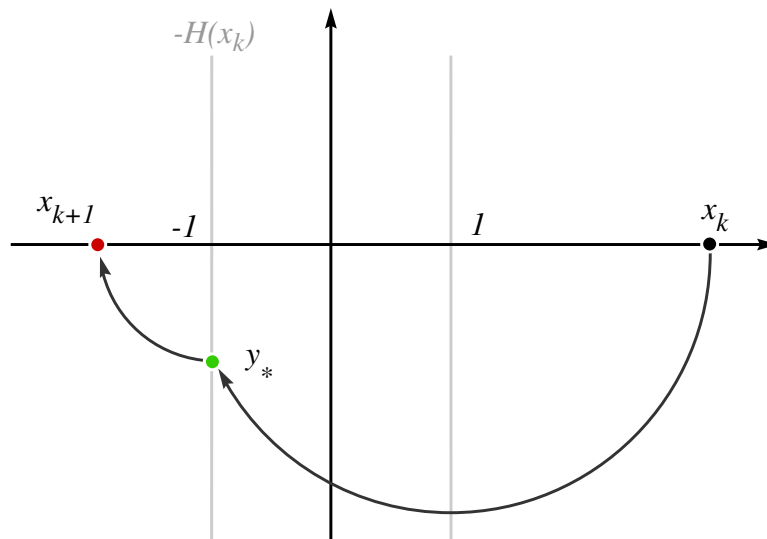
amiből $b(T) = 0 = e^{\sigma T} \sin(\omega T)$, a lehetséges megoldások közül a legkisebb nem nulla megoldás felel meg, azaz $T = \pi/\omega$. Erre az esetre tehát a Poincaré-leképezés:

$$x_{k+1} = -\exp\left(\pi \frac{\sigma}{\omega}\right) (x_k \mp 1) \pm 1.$$



7. ábra. Poincaré-metszet I.

Abban az esetben (8. ábra), amikor az $(x_k, 0)$ és az $(x_{k+1}, 0)$ pontot összekötő trajektória síkot vált, azaz $H(x_k) = -H(x_{k+1})$ a következőképpen számolható a Poincaré-leképezés. Először az $(x_k, 0)$ pontot a megfelelő leképezéssel a $(-H(x_k), y_*)$ pontba képezzük, aztán ezt a pontot a másik megfelelő leképezéssel folytatjuk az $(x_{k+1}, 0)$ pontig. Tehát ismét a 2.1 egyenletet használva:



8. ábra. Poincaré-metszet II.

$$-H(x_k) = \mp 1 = a(t)(x_k \mp 1) \pm 1, \quad -b(t)(x_k \mp 1) = y_*,$$

amiből kapjuk, hogy

$$a(t) = \frac{\mp 2}{x_k \mp 1},$$

és mivel $c^2(t) := a^2(t) + b^2(t) = \exp(2\sigma t)$, így

$$y_* = -\sqrt{(x_k \mp 1)^2 - 4}.$$

Ismét felhasználva a 2.1 egyenletet, de most az előző lépésben használt leképezéshez képest a másikat alkalmazva a $(\mp 1, y_*)$ pontra adódik, hogy:

$$x_{k+1} = \mp 1 \mp b(t)\sqrt{c^2(t)(x_k \mp 1)^2 - 4}, \quad y_{k+1} = 0 = -a(t)\sqrt{c^2(t)(x_k \mp 1)^2 - 4},$$

vagyis $a(T) = 0 = e^{\sigma T} \cos(\omega T)$. A legkisebb megfelelő megoldás $T = \pi/2\omega$, és így $b(T) = c(T) = \exp(\pi\sigma/\omega)$. Tehát a megfelelő tartományon a Poincaré-leképezés:

$$x_{k+1} = \mp 1 \mp \exp\left(\pi\frac{\sigma}{\omega}\right)\sqrt{\exp\left(2\pi\frac{\sigma}{\omega}\right)(x_k \mp 1)^2 - 4}.$$

A Poincaré-leképezés tehát négy különböző (páronként folytonos) leképezésből áll. Az egyszerűség kedvéért legyen $m := \exp(\pi\sigma/\omega)$. Összefoglalva:

$$f(x_k) = \begin{cases} 1 + m\sqrt{m^2(x_k + 1)^2 - 4}, & \text{ha } x_k < -\frac{2}{m} - 1; \\ -m(x_k + 1) - 1, & \text{ha } -\frac{2}{m} - 1 \leq x_k \leq 1; \\ -m(x_k - 1) + 1, & \text{ha } -1 \leq x_k \leq \frac{2}{m} + 1; \\ -1 - m\sqrt{m^2(x_k - 1)^2 - 4}, & \text{ha } x_k > \frac{2}{m} + 1. \end{cases}$$

Ezzel az $x_{k+1} = f(x_k)$ diszkrét dinamika az eredeti rendszer trajektóriáinak és az egyensúlyi pontjait összekötő egyenesnek a metszetét adja.

Az eredeti rendszer egy trajektóriája és az ehhez tartozó Poincaré-metszet összehasonlítását láthatjuk a 9. ábrán. A *Mathematicával* végzett szimuláció eredménye az első hat iteráltra az $x_0 = 2.5$ kezdeti értékből indulva az 1. táblázatban látható, amit a 9. ábrán is szemre könnyen ellenőrizhetünk (jó közelítéssel nézhetjük a trajektória és az $x(t)$ tengely metszetét is).

2.3. Periodikus pályák

Periodikus pályákat inervallum-leképezésekkel kereshetünk. Erre lehetőséget ad a *Mathematica*. Például az *Interval*[min,max] paranccsal intervallumot definiálhatunk. Intervallumokon műveleteket is végezhetünk, speciálisan például *IntervalIntersection*[...], *IntervalUnion*[...], vagy például az *IntervalMemberQ*[...]

k	x_k
0	2.5
1	-0.755478
2	3.05447
3	-2.56187
4	0.827884
5	-3.13921
6	2.7624

1. táblázat. Az első hat iterált.

függvénnyel ellenőrizhetjük, hogy egy szám benne van-e egy adott intervallumban vagy sem. Ugyanakkor intervallumok lehetnek az általánunk definiált függvények, vagy a beépítettek argumentumai is. Az intervallumos számítás kezelni tudja a véges számábrázolás miatt bekövetkezett kerekítési hibákat. Lássunk erre egy szemléletes példát *Mathematicában*.

$$\text{Sin}[\text{Interval}[\pi]] = \text{Interval}[\{0, 0\}]$$

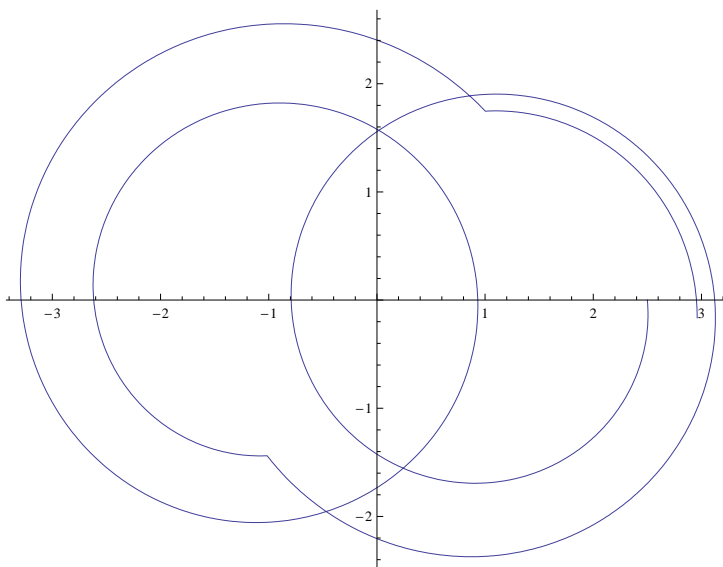
$$\text{Sin}[\text{Interval}[N[\pi]]] = \text{Interval}[\{-3.21625 \times 10^{-16}, 5.66554 \times 10^{-16}\}]$$

Az első eredmény azért lett pontosan nulla, mert itt a *Mathematica* szimbolikusan számolt. A második esetben pedig azt láthatjuk, hogy ha a π számot az $N[\pi]$ valós számmal reprezentáljuk, akkor ennek szinuszáról azt tudjuk, hogy a fenti intervallumba biztosan beleesik, ami természetesen tartalmazza a helyes, nulla eredményt is.

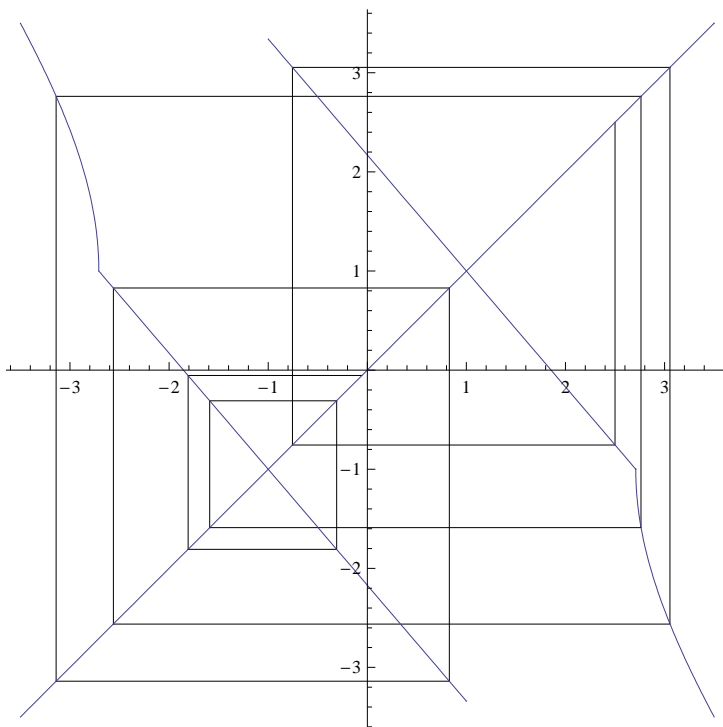
A Poincaré-metszeten vizsgálva a trajektóriákat belátható, hogy csak páros periodusú pálya létezik, hiszen a fázistér egy pontjából indulva a folytonos rendszer trajektóriájával csak úgy érhetünk vissza ugyanabba a pontba, ha előtte valahányszor elmetsszük a Poincaré-síkot. Ez a metszésszám pedig mindig páros.

Lehet olyan eset, hogy a sík egy pontjára visszatér a trajektória páratlan számú metszés esetén, de ekkor biztosan más állapotban van a hiszterézises tag, mint kiinduláskor. Ha az állapotok közé felvesszük $H(x(t))$ -t is, akkor már egyértelműen meghatározhatóak az „igazi” periodikus pályák. Tehát $[-1, 1]$ részintervallumait a hiszterézis szerint két osztályba soroljuk, és az egyes osztályokon belüli intervallumoknak kell diszjunktnak lenniük.

Egy rövid *Mathematica* program segítségével szisztematikusan kerestem periodikus pályákat. Lássunk például egy 14-periodusú pályát. A 2. táblázatban látszik, hogy $k = 9$ esetén teljesül $f(\mathbb{I}_8) \supset \mathbb{I}_0$, viszont $H(x_0) \neq H(x_9)$, így ez va-



(a) A folytonos rendszer egy trajektóriája ($x_0 = 2.5$).



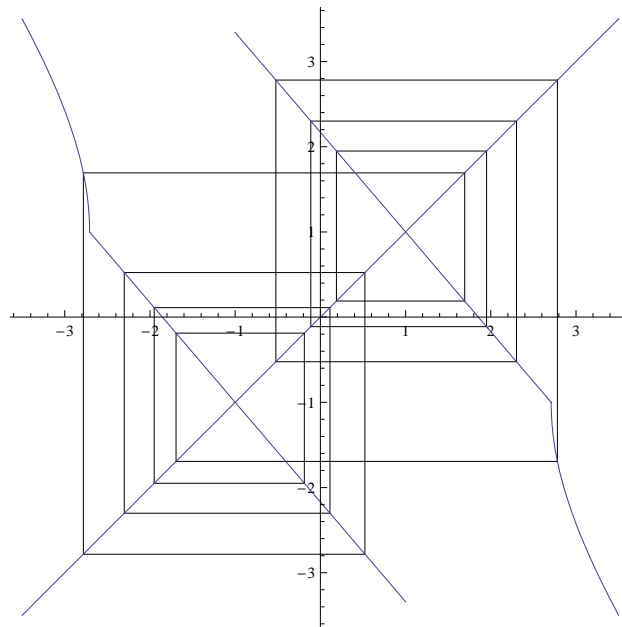
(b) Az előző trajektóriához tartozó Poincaré-metszet

9. ábra. A Poincaré-metszet összehasonlítása az eredeti rendszer trajektóriáival.

k	\mathbb{I}_k	$H(x_k)$
0	[0.18, 0.19]	1
1	[1.94796, 1.95966]	1
2	[-0.12311, -0.109414]	1
3	[2.29837, 2.3144]	1
4	[-0.538264, -0.519505]	1
5	[2.77831, 2.80026]	1
6	[-1.77536, -1.67365]	-1
7	[-0.211617, -0.0925801]	-1
8	[-2.06197, -1.92266]	-1
9	[0.0798066, 0.242844]	-1
10	[-2.45452, -2.26372]	-1
11	[0.478953, 0.702258]	-1
12	[-2.99218, -2.73085]	-1
13	[1.37602, 2.40236]	1
14	[-0.641207, 0.559939]	1

2. táblázat. 14-periodusú pálya.

lójában nem periodikus pálya, mert $f(x_9) \neq x_1$. Azonban $f(\mathbb{I}_{13}) \supset \mathbb{I}_0$ és közben $H(x_0) = H(x_{14})$ tehát ez valóban egy 14-periódusú pálya (10. ábra).



10. ábra. 14-periodusú pálya.

Nézzünk most két olyan periodikus pályát, amelyekhez rendelt leképezési gráfoknak van metsző körük. Az egyik pályát az $x_0^1 \in \mathbb{I}_0$, a másikat pedig az $x_0^2 \in \mathbb{J}_0$ kezdeti értékből indítottam. Az első pálya periódusa 10, a másodiké 14. A 3. táblázatban látható a szimuláció eredménye. A következő relációk állnak fenn:

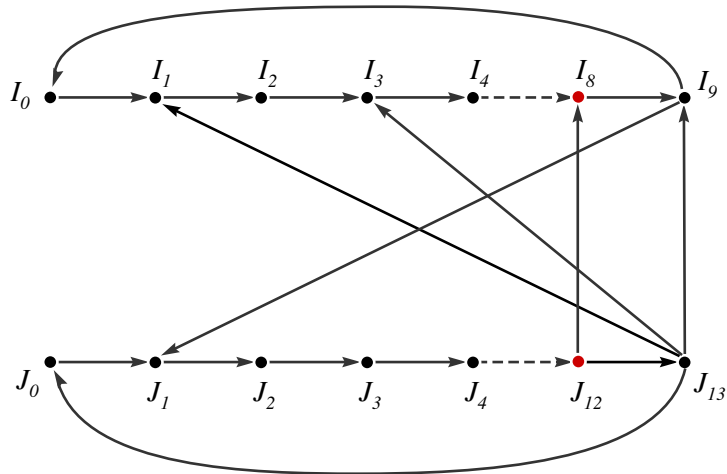
k	\mathbb{I}_k	$H(x_k^1)$	\mathbb{J}_k	$H(x_k^2)$
0	[0.28, 0.29]	1	[0.38, 0.39]	1
1	[1.83093, 1.84263]	1	[1.71389, 1.7256]	1
2	[0.0138545, 0.027551]	1	[0.150819, 0.164516]	1
3	[2.13808, 2.1541]	1	[1.97778, 1.99381]	1
4	[-0.350671, -0.331911]	1	[-0.163078, -0.144318]	1
5	[2.55876, 2.58072]	1	[2.33922, 2.36117]	1
6	[-0.849942, -0.824248]	1	[-0.593005, -0.567312]	1
7	[3.13495, 3.16502]	1	[2.83425, 2.86432]	1
8	[-2.82058, -2.7527]	-1	[-2.02059, -1.91267]	-1
9	[1.53308, 1.85977]	1	[0.0681149, 0.194413]	-1
10	[-0.00619975, 0.376123]	1	[-2.39784, -2.25004]	-1
11	—	—	[0.46294, 0.635923]	-1
12	—	—	[-2.91455, -2.71211]	-1
13	—	—	[1.14264, 2.18223]	1
14	—	—	[-0.383582, 0.833061]	1

3. táblázat. Két periodikus pálya.

$\mathbb{I}_0 \subset \mathbb{I}_{10}$, $\mathbb{J}_0 \subset \mathbb{J}_{14}$, $\mathbb{J}_1 \subset \mathbb{I}_9$, $\mathbb{I}_8 \subset \mathbb{J}_{12}$, $\mathbb{I}_1 \subset \mathbb{J}_{13}$, $\mathbb{I}_3 \subset \mathbb{J}_{13}$, $\mathbb{I}_9 \subset \mathbb{J}_{13}$. Belátható, hogy ezen kívül pedig, $\mathbb{I}_j \cap \mathbb{J}_k = \emptyset$ minden olyan (j, k) pár esetén, ami a fentiekben nem szerepelt. A fentiekhez rendelhető gráf a 11. ábrán látható. Feketével a $H(x_k) = 1$, pirossal pedig a $H(x_k) = -1$ van megkülönböztetve. A két periodikus pályához tartozó részgráfok között csak ugyanolyan színű pontok között mehet él.

3. Összefoglalás

A vizsgált objektumot a szimulációk által sikerült viszonylag behatóan megismernem. A szimulációk során sok további periodikus pályát találtam, a fenti csak egy kiemelt példa ezek közül. Az összes számítást és szimulációt *Mathematicával* végeztem, ami nagyszerű segítséget nyújtott az eredmények megjelenítésében, áttekinthetőségében. Alkalmazás szempontjából például véletlenszám generátorként lehet használni, akár fizikai eszközökkel megvalósítva [4], akár programrészletként implementálva. Az ilyen irányú alkalmazhatóságot befolyásolja a rendszer, mint forrás entrópiája. Az egydimenziós leképezés

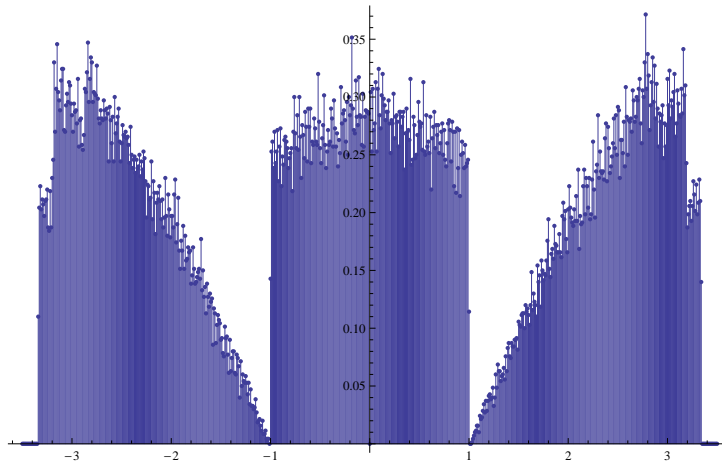


11. ábra. Leképezési gráf.

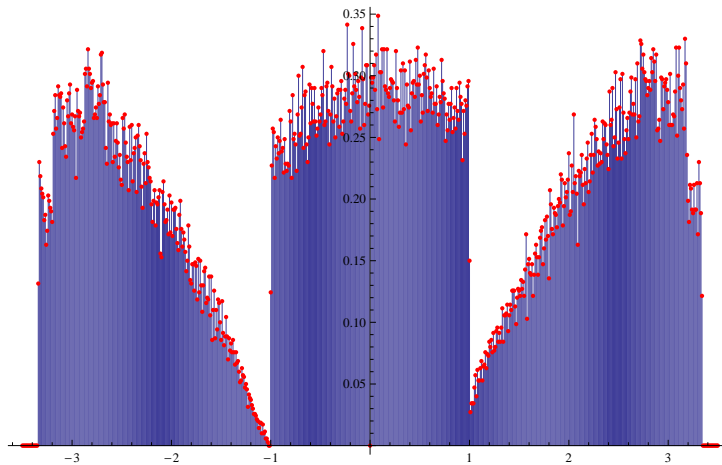
által generált (10000) empirikus sűrűségfüggvénye a 12. ábrán látható egyszázados felbontásban. A 12.a. ábrán egy rögzített kezdeti értékből induló trajektória pontjainak eloszlása látható. A 12.b. ábrát úgy kaptam, hogy egy véletlen kezdeti értékből 100 iterációt végeztem, és ezt előről ismételve ezerszer. Látható, hogy két ponthalmaz között kvalitatív különbség nincs; az adatok statisztikai eszközökkel tovább vizsgálhatók.

Köszönet. Ez úton szeretném megköszönni konzulenseimnek: Garay Barnabásnak és Tóth Jánosnak a konzultációk alatt folytatott értékes beszélgetéseket, és egyéb segítségüket. Továbbá köszönöm Gergi Miklósnak a technikai segítséget.

A dolgozat részben a T047132 számú OTKA pályázat támogatásával készült.



(a) Eloszlás rögzített kezdeti értékhez tartozó trajektóriára.



(b) Eloszlás véletlen kezdeti értékekhez tartozó trajektóriákra.

12. ábra. Eloszlások.

Hivatkozások

- [1] Aissi, C.; Shams, A.: A CNN implementation of a hysteresis chaos generator, *Circuits and Systems, Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on*, **5** (1999) 631–634.
- [2] Csendes, T.; Bánhelyi, B.; Garay, B.: A verified optimization technique to locate chaotic regions of Hénon systems *J. Global Optim.*, **35** (2006) 145–160.
- [3] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, *Springer, New York, Berlin, Heidelberg, To-*

kyo (1983).

- [4] Nakagawa, S.; Saito, T.: Design and control of RC VCCS 3-D hysteresis chaos generators, *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **45** (1998) 182–186.
- [5] Saito, T.; Mitsubori, K.: Control of chaos from a piecewise linear hysteresis circuit, *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **42** (1995) 168–172.
- [6] Smale, S.: Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio, *Mathematical Intelligencer*, **20** (1998) 39–44.