

Polinomiális közönséges differenciálegyenletek megoldásai felrobbanásának vizsgálata

Csikja Rudolf
III. éves villamosmérnök
TTK Matematikai Analízis Tanszék

2005. október 18.

1. Bevezetés

A dolgozatban a közönséges differenciálegyenletek egy osztályában, a *polinomiális differenciálegyenletek*ében a megoldások egy gyakorlati szempontból fontos tulajdonságát vizsgáljuk: a megoldások *felrobbanásának* létezését és bekövetkeztének időpontját. Az ezeket vizsgáló módszerek és lehetséges alkalmazásaik bemutatását tűztük ki fő célul. Ezen felül szeretnénk kitekintést adni a jövőre nézve a már meglévő módszerek továbbfejlesztésére, illetve további lehetséges módszerekre.

Számos publikáció született már a felrobbanás témájával kapcsolatban, viszont ezek nagy része nem közönséges, hanem parciális differenciálegyenletekre vonatkozik [5, 10]. Közönséges differenciálegyenletek megoldásainak felrobbanásáról jóval kevesebbet tudunk, mint parciális társaikéről. A felrobbanás tulajdonképpen a megoldás egy véges időn belüli szingularitása, aminek mind a létezése mind pedig helye erősen függ a kezdeti feltételektől. Ez, két – a problémát illusztráló – példán, de főként az elsőn jól fog látszani. Autonóm rendszereknél csak ilyen szingularitás fordulhat elő, ami úgynevezett *mozgatható szingularitás*. Tehát, ha egy autonóm rendszernek van szingularitása, akkor az biztosan függ a kezdeti feltételektől. Az, hogy az egyenlet megoldása felrobban-e vagy sem, azt jelenti, hogy a differenciálegyenletnek létezik-e olyan kezdetiértékhez tartozó megoldása, amelyik véges időn belül végtelen értéket vesz fel, más szóval a teljes megoldás értelmezési tartományának felső határa véges.

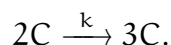
Mivel nagyobb – főként nemlineáris – rendszerek szimbolikus megoldása igen nehéz, sőt akár lehetetlen lehet, ezért ezek vizsgálatánál az egyenletek megoldása nélkül szeretnénk a felrobbanás fellépését eldönteni, illetve bekövetkeztének idejét megbecsülni, ami remélhetőleg jóval könnyebb feladat. Goriely és Hyde [7] elméleti eredményeire támaszkodva számítógépes programot írtunk *Mathematicában*, és azt alkalmaztuk különféle, kémiai [2] illetve elektromosságtani eredetű polinomiális egyenletek vizsgálatára. Az, hogy a jobb oldal polinomiális, olyan nemlineáris rendszerek vizsgálatát is lehetővé teszi, amelyek nem polinomiálisak, ugyanis megfelelő sorbafejtés után a közelítő polinommal az eljárás remélhetőleg kiterjeszhető a dinamikai rendszerek egy bővebb csoportjára.

A gyakorlatban a felrobbanás egyes dinamikai rendszereknél szó szerint értendő, vagyis a robbanás ténylegesen bekövetkezhet, ha nincs korlátozó tényező. Tipikusan gyors, önmagukat gerjesztő kémiai reakcióknál lehetséges ez, megfelelő kezdeti értékek mellett. Nemlineáris elektromos hálózatokban is felléphet hasonló jelenség, de itt a robbanás más értelmezést is nyerhet, akár a hálózat funkciójától függően is.

Remélhetőleg az eredmények felhasználásával ilyen rendszerek tervezésénél ezt a jelenséget is figyelembe véve elkerülhetjük, illetve kiküszöbölhetjük az ilyen fajta instabilitást vagy legalább is előrejelezhetjük bekövetkezésének időpontját.

1.1. Egy egyszerű kémiai példa

Tekintsünk egy olyan reakciót, – amiben egy anyag önmagát gerjesztve, egy úgynevezett autokatalitikus reakcióban keletkezik – ami a következőképpen írható le:



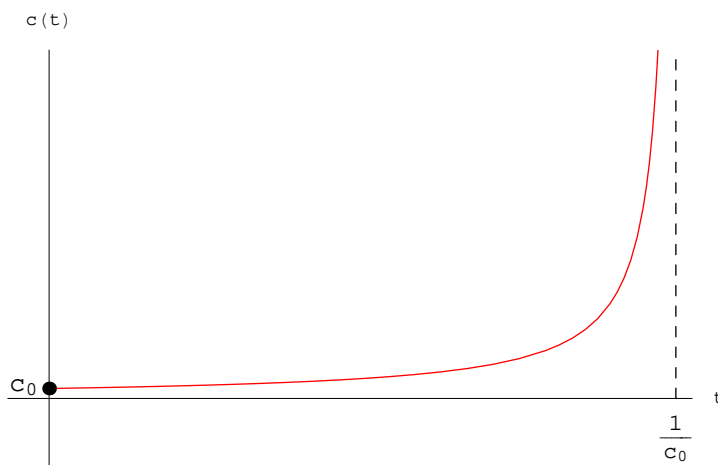
Ez az alábbi differenciálegyenlettel modellezhető, ahol a C anyag koncentrációjának időbeli alakulását a $c(t)$ függvény írja le:

$$\dot{c}(t) = kc^2(t),$$

aminek a megoldása a $c(0) = c_0 \in \mathbb{R}^+$ kezdeti feltétel mellett:

$$c(t) = \frac{1}{t_* - t} \quad t \in]-\infty, t_*[\quad t_* := \frac{1}{c_0},$$

tehát a megoldás a t_* időpontban felrobban, ahogy azt az 1. ábra jól illusztrálja.



1. ábra. A megoldás felrobbanása

1.2. Egy hálózati példa

Egy feszültségforrást, egy nemlineáris ellenállást, illetve egy kondenzátort kapcsolunk sorba. A nemlineáris ellenállás karakterisztikája: $i_N(u_N) = u_N^3$. Kirchhoff csomóponti törvénye alapján a következő összefüggés írható fel: $i_N = C\dot{u}_c$. Kirchhoff huroktörvényéből pedig az $u_c = u_s - u_N$ egyenletet kapjuk. Egyszerű helyettesítésekkel ezekből adódik az u_N -re vonatkoztatott állapotegyenlet normálalakja:

$$\dot{u}_N = -\frac{1}{C}u_N^3.$$

A forrás feszültsége az idő függvényében az *egységugrás*:

$$u_s(t) = u_0\varepsilon(t) \quad u_0 \in \mathbb{R} \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

A bekapcsolás előtt a hálózat energiamentes, tehát sehol nem tárolódik töltés vagy mágneses energia. A kondenzátor feszültsége állapotváltozó, vagyis ilyen gerjesztés mellett csakis folytonosan változhat. Ezekből következik, hogy $u_c(+0) = u_c(-0) = 0$. Ebből a tényből származtatjuk az egyenletünkhöz a kezdeti feltételt, mégpedig:

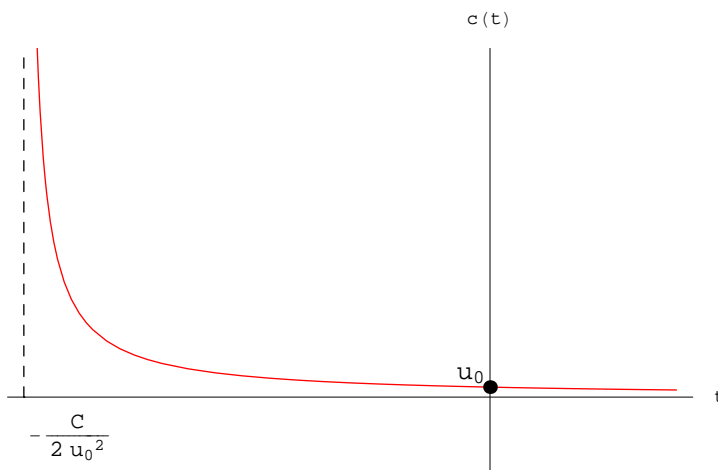
$$\dot{u}_N = -\frac{1}{C}u_N^3 \quad u_N(0) = u_0.$$

Ennek a kezdetiérték-problémának a megoldása:

$$u_N(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{C}t + \frac{1}{u_0^2}}}.$$

Az előbbi példával szemben ez szemmel láthatóan nem robban fel. Mivel a C kapacitásra teljesül, hogy $C \in \mathbb{R}^+$, így semmilyen $t \in \mathbb{R}^+$ -ra nem lesz a nevező nulla.

Érdekes tényként – az esetleges fizikai tartalomtól függetlenül – érdemes megemlíteni, hogy ha $t \in \mathbb{R}^-$, akkor $t = -\frac{C}{2u_0^2}$ -ben viszont bekövetkezik a robbanás (2. ábra).



2. ábra. Csak negatív időben robban fel.

2. Az általános feladat megfogalmazása

Tekintsük a következő elsőrendű rendszert:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x} \tag{1}$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ és $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan polinomiális függvény, amely valós együtthatókkal rendelkezik. Vagy lokális alakban:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \tag{2}$$

Ennek a rendszernek az általános megoldása n számú tetszőleges konstans tartalmaz $t \mapsto \mathbf{x}(t; C_1, C_2, \dots, C_n)$. Legyen a kezdeti feltétel $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,

ekkor a megoldás a $t \mapsto \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ alakban írható fel. A megoldás véges időn belül felrobban, ha létezik olyan $t_* \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy bármilyen $M \in \mathbb{R}$ -re van olyan $\varepsilon > 0$, hogy:

$$|t_* - t| < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| > M \quad (3)$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma. A feladat meghatározni, hogy létezik-e ilyen \mathbf{x}_0 kezdeti feltétel, és ha igen, akkor t_* értéke közelítőleg mennyi.

3. Elméleti alapok

Azért, hogy a megoldások felrobbanását tanulmányozni tudjuk, ezek szingularitásainak lokális vizsgálatát kell elvégeznünk. Ez a feladat a *szingularitási analízis* keretein belül megoldható, mégpedig a mozgatható szingularitás körüli sorfejtéssel. Ezt tipikusan közönséges differenciálegyenlet-rendszerek integrálhatóságának bizonyítására használták, ezt az eljárást hívják *Painlevé-tesztnek* [1, 9]. Azonban bebizonyosodott, hogy a nem integrálható rendszerek dinamikájáról is értékes információkkal szolgál. Ahhoz, hogy eldöntsük az (1) rendszernél bekövetkezik-e a robbanás, a megoldást sorbafejtjük [3] a következő formula szerint:

$$\mathbf{x} = \Psi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}, t) = \tau^p \left[\boldsymbol{\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{a}_j \tau^{\frac{j}{q}} \right], \quad (4)$$

ahol $\tau = (t - t_*)$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Q}^n$, $q \in \mathbb{N}$ és \mathbf{a}_j pedig $N_j (< j)$ fokú polinomja a $\log(t - t_*)$ kifejezésnek. Az $\boldsymbol{\alpha} \tau^p$ kifejezés pedig olyan vektort jelent, aminek az i -edik komponense: $\alpha_i \tau^{p_i}$. Ezt a sort *Pszí-sornak* hívják [8].

1. Tétel. Vegyük az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ polinomiális nemlineáris rendszert, ahol $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, továbbá tegyük fel, hogy a rendszer általános megoldása konvergens ψ -sorba fejthető. Ekkor a következő két állítás ekvivalens egymással:

- Létezik olyan $\mathbf{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaza a kezdeti feltételeknek, amelyre minden $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0$ esetén van olyan $t_* \in \mathbb{R}$, hogy $\lim_{t \rightarrow t_*} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| \rightarrow \infty$.
- Létezik egy $\Psi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}, t; \mathbf{c})$ általános megoldás $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Bizonyítás. A teljes bizonyítás a [7] cikkben található. Az alapötlet az, hogy megmutassuk, hogy azoknak a tetszőleges konstansoknak a nyílt halmaza között, amelyek a ψ -sorban megjelennek és a kezdeti feltételek nyílt halmaza között kölcsönösen egyértelmű leképezés adható meg. Ennek következtében valós kezdeti értékekhez valós ψ -sor tartozik, ami a

megoldás viselkedését írja le egy valós szingularitás körül, és épp az a cél, hogy a teljes megoldás valós szingularitásaira rábukkanjunk.

A fenti tételből következik, hogy ha valamilyen módon el tudjuk dönteni, hogy egy polinomiális rendszer konvergens ψ -sorba fejthető, akkor ezzel együtt azt is meg tudjuk mondani, hogy van-e olyan kezdeti feltétel, amelyre a rendszer megoldása felrobban.

4. A sorfejtés lépései

Az alábbiakban nem a teljes módszert ismertetjük, mivel a felrobbanás kérdésének eldöntéséhez elég az alábbi paramétereket meghatározni.

4.1. Alkalmas felbontások

Először meg kell keresnünk az f vektortér összes olyan

$$f(x) = \hat{f}(x) + \check{f}(x) \quad (5)$$

felbontását, amire teljesül, hogy a meghatározó viselkedésű $x = \alpha\tau^p$, $\alpha \in \mathbb{C}_0^n$ helyettesítéssel a

$$\dot{x} = \hat{f} \circ x \quad (6)$$

redukált rendszernek a pontos megoldását adja, ahol $p \in \mathbb{Q}^n$ legalább egy negatív komponenssel rendelkezik.

Az, hogy az $x = \alpha\tau^p$ meghatározó viselkedésű; megkívánja, hogy $\check{f} \circ x$, ha $t \rightarrow t_*$ ne legyen domináló, vagyis elhanyagolható legyen, ami azt jelenti, hogy

$$\check{f}(\alpha(t_* - t)^p) \sim \check{\alpha}(t_* - t)^{p+\check{p}-1}, \quad (7)$$

ahol $\check{p} \in \mathbb{Q}^n$ és $\forall \check{p}_i > 0$.

Minden egyes felbontás definiál egy *egyensúlyt* (α, p) . Egy egyensúly megfelel egy mozgatható szingularitás körüli sorfejtésnek, egy másik egyensúly egy másik szingularitás körülinek. Az egyik nehézsége a szingularitási analízisnek, a különböző egyensúlyok nyomkövetése. Hogy ellenőrizni tudjuk, hogy az egyensúly által meghatározott sor tényleg az általános megoldás sorfejtése, meg kell határoznunk az úgynevezett *rezonanciákat*.

4.2. Rezonanciák

Ebben a lépésben a feladatunk, hogy kiszámoljuk a *rezonanciákat*. Minden egyes egyensúly új rezonanciahalmazt határoz meg. Ezek a rezonanciák

– egy adott egyensúlyhoz – az \mathcal{R} mátrix sajátértékeiként (jelölje ezek halmazát $\text{Spec}(\mathcal{R})$) kaphatók meg:

$$\mathcal{R} := -\hat{\mathbf{f}}'(\boldsymbol{\alpha}) - \text{Diag}(\mathbf{p}), \quad (8)$$

ahol a $\hat{\mathbf{f}}'(\boldsymbol{\alpha})$ az $\boldsymbol{\alpha}$ szerinti Jacobi mátrix.

5. Algoritmus

5.1. Első lépés

Első lépésként meg kell találnunk az összes lehetséges $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p})$ egyensúlyt. Ehhez szükségünk van a baloldali összes lehetséges felbontására, illetve ezek közül azokra, amelyek kielégítik az előzőekben tárgyalt feltételeket. Ezekhez a felbontásokhoz tartozó egyensúlyok egy halmazt definiálunk:

$$\mathcal{B} := \{(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{p}_1), (\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{p}_2), \dots, (\boldsymbol{\alpha}_m, \mathbf{p}_m)\}.$$

Az a gond, hogy az egyenletek számának növekedtével a lehetséges felbontások száma rendkívül nagyra nőhet, és ezért a lehetséges egyensúlyok száma is igen sok lehet. A *Mathematicában* az ezt a célt szolgáló programrészlet a következő:

```
rhs = Flatten[Outer[List, Sequence @@ f], 2]
Decomp = Length[rhs];
```

ahol az f egy olyan lista, amiben az elemek a jobboldali egyenletek, mégpedig azok összeg tagjai vesszővel elválasztva.

```
KitevoRhs = Replace[Modrhs, _ \[Tau]^n_ -> n, {2}]
SzorzoRhs = Replace[rhs, a_ \[Tau]^x_ -> a, {2}]
KitevoLhs = Replace[lhs, _ \[Tau]^n_ -> n, {1}]
SzorzoLhs = Replace[lhs, a_ \[Tau]^x_ -> a, {1}]
```

Ezek a sorok szolgálnak az úgynevezett *mintaillesztésre*. Az előzőleg elvégzett $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{p}}$ helyettesítéssel az rhs ben és az lhs ben már a helyettesített szimbólumok szerepelnek. A $Modrhs$ re csak azért volt szükség, hogy ha az egyenletben előfordul egy konstans, akkor az τ^0 alakban szerepljen, ugyanis a mintaillesztés csak így működött jól.

A mintaillesztés tulajdonképpen azt csinálja, hogy megfelelő mélységben leszedi τ kitevőit, illetve a szorzótényezőit és egy listában tárolja őket, amiből később az algebrai egyenleteinket fogjuk felépíteni. Egy felbontáshoz kétféle egyenletet tudunk felírni. Az egyik a kitevők egyenlőségéből a másik a szorzótényezők egyenlőségéből következik. A következő két sor oldja meg ezt a feladatot.

```
Equations1 = Array[Thread[KitevoRhs[[#]] == KitevoLhs] &, Decomp];
Equations2 = Array[Thread[SzorzoRhs[[#]] == SzorzoLhs] &, Decomp];
```

Innentől kezdve már csak az előbb felépített egyenletek megoldása maradt hátra, amit a programunkban a következő sor lát el:

```
Balances =
  Array[Solve[Flatten[{Equations1[[#]], Equations2[[#]]}, 2],
    Flatten[{A, P}]] &, Decomp] // MatrixForm
```

Ha sok a megoldandó egyenlet és esetleg egy egyenletnek több megoldása is van, akkor a Balances lista igen hosszú és átláthatatlan lehet a normális kiírtásának, ezért alkalmaztuk a mátrixos kijelzést. A mátrix minden sorában egy felbontáshoz tartozó egyenletrendszer megoldásai vannak, így könnyen nyomon követhető, hogy melyik felbontáshoz, melyik megoldás tartozik.

5.2. Második lépés

Ebben a lépésben a feladatunk, hogy az előzőekben meghatározott egyenlőségek közül kiválasszuk azokat, amelyek a rendszer általános megoldását írják le. Ugyanis \mathcal{B} nem minden eleme felel meg a megoldás szingularitási körüli sorfejtéshez. Definiáljunk egy halmazt a következőképpen:

$$\mathcal{G} := \{(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}) \in \mathcal{B} \mid \text{Spec}(\mathcal{R}) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1} \cup \{-1\}\}. \quad (9)$$

Ennek a halmaznak az elemei már alkalmasak a felrobbanás bekövetkeztének ill. be nem következteként eldöntésére. A *Mathematica* segítségét ismét igénybe vehetjük a rezonanciák kiszámolására.

```
\[Tau] = 1;
R = - Outer[D, Modrhs[n], A]\) - DiagonalMatrix[P]
{A, P} = {A, P} /. Balances[[n,m]]
Array[{p_i = P[[i]], \[Alpha]_i = A[[i]]}&, Length[f]]
r = Eigenvalues[R]
```

Mivel a (8)-ban szereplő $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\alpha})$ csak $\boldsymbol{\alpha}$ -tól függ, ezért τ -t először eggyel egyenlővé tesszük, ami azt eredményezi, hogy csak az $\boldsymbol{\alpha}$ -k maradnak meg. Aztán az $\boldsymbol{\alpha}$ -ák és \mathbf{p} -k helyére behelyettesítjük a konkrét kiszámolt értékeket, amit a Balances[[n,m]] paranccsal választunk ki, úgy hogy m a felbontás sorszám, n pedig az ehhez a felbontáshoz tartozó megoldások közül az n-edik. Végül pedig kiszámoljuk az így kapott \mathcal{R} mátrix sajátértékeit.

5.3. Harmadik lépés

Mindössze már csak annyi dolgunk van, hogy a \mathcal{G} halmaz elemein vizsgálódjunk, pontosabban megvizsgáljuk az α vektorokat. Ezzel kapcsolatban két kijelentés tehető:

- A felrobbanás nem következik be semmilyen kezdeti feltételre, ha

$$\alpha \notin \mathbb{R}^n \quad \forall (\alpha, \mathbf{p}) \in \mathcal{G}. \quad (10)$$

- Olyan kezdeti feltételek mellett fog bekövetkezni robbanás, amely kezdeti feltételek a fázistérnek éppen abban az ortánsában vannak, amelyekben teljesül, hogy

$$\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{sign}(\mathbf{x}_0) = \text{sign}(\alpha). \quad (11)$$

6. Alkalmazások

6.1. Lineáris rendszer

Jól ismert állítást mondunk most ki, és bizonyítunk be az itteni módszerekkel.

2. Tétel. *Tekintsük az*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (12)$$

elsőrendű lineáris rendszert, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ez a rendszer semmilyen valós kezdeti értékre nem robban fel, vagyis $\nexists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| = +\infty.$$

Bizonyítás. Végezzük el az $\mathbf{x} = \alpha\tau^{\mathbf{p}}$ helyettesítést:

$$\mathbf{p} * \alpha\tau^{\mathbf{p}-1} = \mathbf{A}\alpha\tau^{\mathbf{p}},$$

ahol a $*$ művelet a vektorok elemenkénti szorzását jelenti. Innen kapjuk a következő egyenleteket:

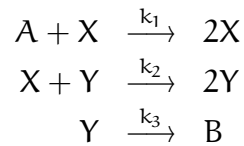
$$\begin{aligned} p_j &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p} - \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Ezek közül a második ellentmondásba ütköznek, ezért nem létezik megoldása, s így nem tudunk találni egy egyensúlyt sem. A módszer szerint, ebből az következik, hogy a rendszer megoldásai közül egy sem robban fel, vagyis közülük egyik sem rendelkezik véges időn belüli szingularitással. ■

A tételből következik, hogy egy *lineáris, időinvariáns, kauzális* rendszer semmilyen kezdeti értékre nem robban fel. Vagy más szóval a (12) típusú rendszerek megoldásainál nem lép fel mozgatható szingularitás és mivel ez autonóm rendszer, ezért a stabilitási tulajdonsága nem függ a kezdeti feltételektől, csakis magától a rendszertől.

6.2. A Volterra–Lotka-reakció

Tekintsük a számos biológiai és kémiai alkalmazással rendelkező [2] Volterra–Lotka-reakciót:



Ezt a

$$\dot{x}(t) = k_1x(t) - k_2x(t)y(t) \quad (13)$$

$$\dot{y}(t) = k_2x(t)y(t) - k_3y(t) \quad (14)$$

differenciálegyenlet-rendszerrel lehet modellezni, ahol $k_1 := \hat{k}_1[A] \in \mathbb{R}^+$ és $k_2, k_3 \in \mathbb{R}^+$. Ehhez a rendszerhez összesen egy olyan felbontást találtunk, ami egyensúlyt határoz meg:

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} -k_2xy \\ k_2xy \end{pmatrix} \quad \check{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} k_1x \\ -k_3y \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Ez az egyensúly a konkrét értékekkel:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(-\frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_2} \right) \quad \mathbf{p} = (-1, -1). \quad (16)$$

Ezek után már csak ehhez az egy egyensúlyhoz tartozó rezonanciákat kell kiszámolnunk. Mivel a rezonanciák $\text{Spec}(\mathcal{R}) = \{1, 3\}$, ezért az előbbieken meghatározott egyensúly nem felel meg a (9) feltételnek. A megoldás semmilyen kezdeti értékre nem robban fel – összhangban korábbi ismeretekkel [2].

6.3. Egy termokinetikai példa [11, Problem 7.3]

Az alább tárgyalt rendszerről – amely a hőmérséklet változását is figyelembe vevő reakciókinetikai modell – numerikus eredmények alapján tudjuk, hogy fölrobban.

$$\dot{x}_1 = \mu e^{x_3} - x_1(x_2^2 + K) \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(x_2^2 + K) - x_2 \quad (18)$$

$$\dot{x}_3 = \delta x_2 - \gamma x_3, \quad (19)$$

ahol $\mu, \delta, \gamma, K \in \mathbb{R}^+$. A (17) egyenletben gondot okoz, hogy jobb oldalt az x_3 változónak nem polinomja szerepel, ezért ezt a tagot – annak reményében, hogy a vizsgált kvalitatív tulajdonság megmarad – sorbafejtjük. Első közelítésben csak az első két tagot hagyjuk meg. Ezek után az egyenletrendszer a következő alakot kapja, ami így most már polinomiális:

$$\dot{x}_1 = \mu(1 + x_3) - x_1(x_2^2 + K) \quad (20)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(x_2^2 + K) - x_2 \quad (21)$$

$$\dot{x}_3 = \delta x_2 - \gamma x_3 \quad (22)$$

Ezt a rendszert vizsgálva az összes lehetséges felbontások száma 24, viszont ezek közül csak 4 határoz meg egyensúlyt. A további vizsgálatból pedig kiderül, hogy csak

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mu \\ x_1 x_2^2 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

felel meg a (9) kritériumnak. Erre a felbontásra konkrét értékeként $\mathbf{p} = (1, -2, -1)$ és $\boldsymbol{\alpha} = \left(\mu, -\frac{2}{\mu}, \frac{2\delta}{\mu}\right)$ adódnak. A rezonanciák is megfelelően alakulnak, ugyanis a $\text{Spec}(\mathcal{R}) = \{-1, 1, 6\}$ értékekkel együtt az egyensúly teljesíti a (9) feltételt, így az $\boldsymbol{\alpha}$ vektor vizsgálatával eldönthetjük, mi jellemző származtatott rendszerünkre, ami remélhetőleg az eredeti modellt ilyen tekintetben megfelelően képviseli.

Mivel a (10) teljesül, ezért nem jelenthetjük ki, hogy a rendszerünk semmilyen kezdeti feltételre nem fog felrobbani. A (11) kritériumból viszont az következik, hogy van a kezdeti értékeknek egy olyan halmaza, amelyre a megoldás felrobban. Ezekre a kezdeti feltételekre teljesül a

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0 \subseteq (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+)$$

kijelentés. Más szóval minden olyan megoldásnak létezik valós szingularitása, amely a fázistér azon részéből indul ki, ahol

$$(x_1(0) \in \mathbb{R}^+ \wedge x_2(0) \in \mathbb{R}^- \wedge x_3(0) \in \mathbb{R}^+)$$

teljesül.

6.4. Van der Pol-oszcillátor

A Van der Pol-oszcillátor egyenlete másodrendű, nemlineáris, közönséges differenciálegyenlet:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (24)$$

Az átviteli elv alkalmazásával könnyen csinálhatunk belőle polinomiális differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{x} = y \quad (25)$$

$$\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x. \quad (26)$$

Várhatóan – a korábbi ismeretekkel összhangban – a megoldások nem robbannak fel, ugyanis a lehetséges felbontások közül összesen egy felelt meg egyensúlynak, viszont a rezonanciákra nem teljesült a feltétel ($r_1 = 0, r_2 = 3,5$).

$$\mathbf{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \boldsymbol{\alpha} = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2\mu}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2\mu}}\right)$$

Mint ismeretes, a megoldások a μ paramétertől függően más-más határciklusba kerülnek (3. ábra), illetve aszimptotikusan a fix ponthoz tartanak (4. ábra).

Most módosítsunk kicsit az egyenletünkön úgy, hogy periodikusan perturbáljuk. Ekkor a következő nemlineáris, nem autonóm, nem polinomiális másodrendű egyenletet kapjuk:

$$\ddot{x}(t) - \mu(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = \cos(ct). \quad (27)$$

Ebből az egyenletből viszont egy kis átalakítással – átviteli elv és a fázistér kibővítése a t -vel, illetve a $\cos(z)$ függvény első két tagjával való közelítéssel – nekünk megfelelő formát kapunk. Legyen $\dot{x} = y$ és $z(t) = ct$, ekkor az egyenletrendszerünk a következőképpen alakul.

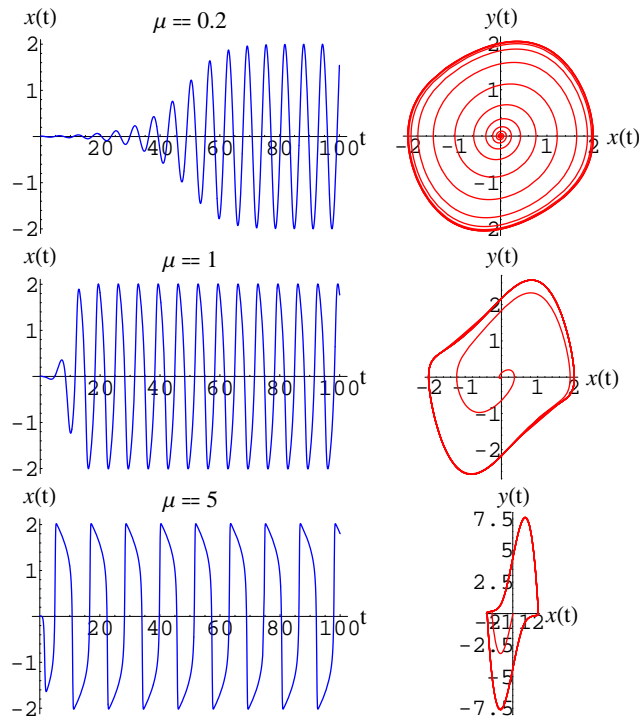
$$\dot{x} = y \quad (28)$$

$$\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x + a \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) \quad (29)$$

$$\dot{z} = c \quad (30)$$

Ehhez a rendszerhez összesen két egyensúlyt találtunk:

$$\mathbf{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) \quad \boldsymbol{\alpha} = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{8\mu}}, \mp\sqrt{\frac{3}{8\mu}}, c\right),$$

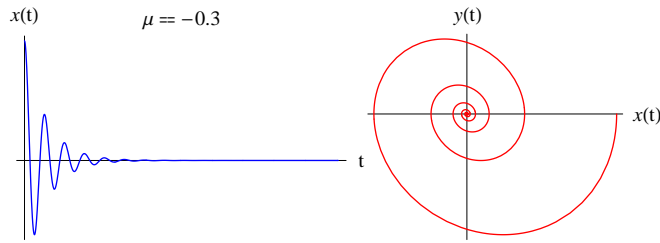


3. ábra. Határciklusok.

amihez a rezonanciák sorra $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ és $r_3 = 3,5$. A két egyensúly ugyanazon

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -\mu x^2 y \\ c \end{pmatrix} \quad \check{\mathbf{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu - x - a \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

felbontáshoz tartozik. Úgy tűnik, a perturbáció, illetve annak a másodfokú közelítő polinomja egy $r_1 = -1$ rezonanciát hozott, amiből az következik, hogy a megoldások tulajdonságát – legalábbis a felrobbanás szempontjából – megváltoztatta. Ha $\mu \in \mathbb{R}^-$, akkor α_1 és α_2 komplex számok, így teljesül a (10) feltétel, amiből következik, hogy semmilyen kezdeti értékre nem robban fel a megoldás. Ha $\mu \in \mathbb{R}^+$, akkor viszont a (11) feltétellel vizsgálódhatunk tovább. A felrobbanás olyan kezdeti értékekre fog bekövetkezni, ahol a kezdeti értékek előjele sorra megegyezik az α vektor komponenseinek előjelével, ami a c előjelétől függően lehet $\{\pm, \mp, +\}$ vagy $\{\pm, \mp, -\}$. Az, hogy valamelyik állapotváltozó negatív kezdeti értékkel ren-



4. ábra. Fix ponthoz tartó megoldás.

delkezik fizikai értelemben is lehetséges, ugyanis ilyen állapotváltozó általában kondenzátor feszültsége vagy tekercs árama lehet, ami csak annyit jelent, hogy pl. a $t = 0$ időpillanatban a kondenzátor negatív feszültségre van feltöltve.

7. Összefoglalás

A dolgozat legfőbb célja az volt, hogy bemutasson egy fontos módszert a polinomiális közönséges differenciálegyenletek megoldásai felrobbanásának vizsgálatára. Először felvezető példákat mutattam be, majd az általános feladat megfogalmazását. Az általános feladat megoldására jól kidolgozott elmélet állt a rendelkezésemre. Mivel a téma kezelése nem könnyű feladat, és a felrobbanással kapcsolatban eddig főként parciális differenciálegyenletekkel foglalkozó cikkek jelentek meg, ezért nem sok publikációból gazdálkodhattam [6, 7]. A vizsgálati módszert jól lehetett algoritmizálni, viszont több olyan lépés is volt benne, amit kézi számítással csak igen nagy türelem és erőfeszítés árán lehetett volna kiszámolni. Az ilyen részeknél volt nagy segítségemre *Mathematica* nevű program. Egyik jövőbeni feladat a *Mathematica*-ban írt program továbbfejlesztése, vagy akár egy külön csomag megírása erre a problémakörre. A fő algoritmus mellett még léteznek más vizsgálódási módszerek, amik esetenként kiegészíthetnek, pl.: az első integrállal kapcsolatos tétel az [7] cikkben. Ezeket hatékonyan kombinálva egy nagyszerűen használható programcsomag készíthető. További kérdések, amik felvetődnek az elmélettel kapcsolatban. *Ha a jobboldalt az eredeti függvény Taylor-polinomjaként állítottuk elő, illetve szerepel ilyen tag, akkor megmarad-e a megoldások véges értelmezési tartománya, és milyen feltételek mellett hogyan alakul ez a tulajdonság?*

Megjegyzés. A dolgozathoz csatoltam a *Mathematica* notebookot.

Köszönetnyilvánítás. A dolgozat elkészítéséhez a T037491 és T047132 számú OTKA pályázat hozzájárult.

Hivatkozások

- [1] Brenig, L.; Goriely, A.: Painlevé analysis and normal forms, (E. Tournier, Ed.), Cambridge University Press (1994) in *Computer Algebra and Differential Equations*, 211–238.
- [2] Érdi P.; Tóth J.: *Mathematical Models of Chemical Reactions. Theory and Applications of Deterministic and Stochastic Models*, Manchester University Press, Manchester, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [3] Fournier, J. D.; Levine, G.; Tabor, M.: Singularity clustering in the Duffing oscillator, *J. Phys. A*, **21** (1988), 33–54.
- [4] Getz, W. M.; Jacobson, D. H.: Sufficiency conditions for finite escape times in systems of quadratic differential equations. *J. Inst. Maths. Applics* **19** (1997), 377–383.
- [5] Gibbon, J. D.; Moore, D. R.; Stuart, J. Z.: Exact, infinite energy, blow-up solutions of the three-dimensional Euler equations, *Nonlinearity* **16** (2003) 1823–1831.
- [6] Goriely, A.; Hyde, C.: Finite time blow-up in dynamical systems, *Phys. Lett. A*, **250** (1998), 311–318.
- [7] Goriely, A.; Hyde, C.: Necessary and sufficient conditions for finite time singularities in ordinary differential equations, *Journal of Differential Equations*, **161** (2000), 422–448.
- [8] Hemmi, M. A.; Melkonian, S.: Convergence of Psi-series solutions of nonlinear ordinary differential equations, *Canad. Appl. Math. Quart.*, **3** (1995), 43–88.
- [9] Ramani, A.; Grammaticos, B.; Bountis, T.: The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems, *Physics Reports*, **180** (1989), 159–245.
- [10] Rendall, Alan D.: Blow-up for solutions of hyperbolic PDE and space-time singularities, *Journées équations aux dérivées partielles*, **14** (2000) 1–12.

- [11] Tóth, J.; Li, G.; Rabitz, H.; Tomlin, A. S.: The effect of lumping and expanding on kinetic differential equations, *SIAM J. Appl. Math.* **57** (6) (1997), 1531–1556.