Über Theorie und Anwendung von polynominalen Differentialgleichungen

Andrea Halmschlager
TWU Budapest
Lehrstuhl für Analysis
andhalm@math.bme.hu

Dr. János Tóth, Ph. D., Dozent
TWU Budapest
Lehrstuhl für Analysis
jtoth@math.bme.hu

***Abstract* – Polynomial equations so important in different fields of applications, especially in chemistry, are investigated. The literature is reviewed with the aim of possible applications of pure mathematical results in the field of chemical kinetics. Finally an example is treated in detail showing how to transform a mass action type kinetic equation into a homogeneous quadratic mass action type kinetic equation. The problem of transforming back is also discussed.**

I. EINFÜHRUNG

Einige Definitionen:

Polynominale Differentialgleichung:

$\dot{x} = P \circ x, x(t) \in \mathbf{R}^n$ nennt man ~, wenn P ein mehrvariables Polynom ist in einer jeden Koordinate.

(*Bemerkung*: diese Differentialgleichungen sind unter anderem in den chemischen Anwendungen wichtig.)

Kinetische Differentialgleichung:

a) eine ~ ist eine Differentialgleichung, die das Benehmen von Reaktionen beschreibt, die aufgrund des Massenwirkungsgesetzes vor sich gehen,

b) eine ~ ist eine Differentialgleichung, die keine negative Kreuz(Cross-)effekte enthält.

Negativer Kreuzeffekt:

ein ~ ist ein Term, der die Verminderung eines chemischen Stoffes in einer Reaktion beschreibt, in der dieser Stoff *nicht* teilnimmt. (In den folgenden Beispielen sind die unterstrichenen Terme die negativen Kreuzeffekte). Siehe z.B. *Tóth und Hárs* 1986b.

Die Lorenz Gleichung:

$$\dot{x} = -\sigma(x-y)$$
$$\dot{y} = rx - y - \underline{xz} \quad (\sigma, r, b \in \mathbf{R}^+)$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Die Rössler Gleichung:

$$\dot{x} = x - xy - \underline{y}$$
$$\dot{y} = x^2 - ay \qquad (a,b,c,d \in \mathbf{R}^+)$$
$$\dot{z} = bx - cz + d$$

Untersuchung von polynominalen Differential-gleichungen

Wenn man Differentialgleichungen, oder deren Lösungen aus bestimmten Hinsichten untersuchen will, muss man sie nicht unbedingt lösen (man trifft sogar oft solche Gleichungen, die man symbolisch gar nicht lösen kann). Es ist wohlbekannt, dass die Spur und Determinant der Koeffizientenmatrix eines autonomen, linearen Systems (die man natürlich auch leicht lösen kann) uns die volle Information über die Stabilität (über das qualitative Benehmen) der Lösung gibt.

Aber über *polynominalen Differentialgleichungen*, über deren qualitativen und quantitativen Eigenschaften weiß man im allgemeinen nur wenig. Man kann sich z.B. die folgenden Fragen stellen. Verfügt die Differentialgleichung über eine Fundamentallösung? Hat sie Gleichgewichtspunkte, und wenn ja, wieviele? Was kann man über Stabilität und Bifurkation sagen? Gibt es Kreisbahnen? Zeigt das System Chaos? Wird es bei einem endlichen Zeitpunkt explodieren? Welche Variablen (oder welche chemische Stoffe) sind für das qualitative Verhalten des Systems verantwortlich, also welche andere darf man vernachlässigen, um auf diese Weise das System zu vereinfachen?

Um die vorherigen Fragen beantworten zu können, muss man zuerst die *gemässe Methode* finden.

Wohlbekannt ist die sogenannte *Ordnungsreduktion* von Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Sei φ die Lösung von

$$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x \quad (1)$$

Mit einem bijektiven Abbildung kann man Gleichung (1) in die folgende Form (*n*-variable, lineare Differentialgleichung) transformieren:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}' = A_{nxn} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(Der Vorteil der Form (1) ist, dass sie nur eine einzige Variable hat, die Vorteile von (2) sind die bekannten Sätze über Existenz und Eindeutigkeit.)

Man kann die Gleichung *in eine spezielle Form transformieren* (z.B. wenn man die Zahl des Grades der rechten Seite verringern möchte), wobei sich jedoch die Frage stellt, ob die angewandte Abbildung bijektiv ist?

Mit chemischen Erwägungen, oder mathematischen Methoden (z.B. „exact linear lumping“) kann man *die Zahl der Variablen verringern* (*Li* 1984, *Tóth et al*. 1997).

Die Untersuchung von *algebraischen (polynominalen) Invarianten* bietet weitere Möglichkeiten.

Die *Lie-algebraischen* Methoden sind von den erfolgversprechendsten Methoden.

Überblick der Literatur

Der Überblick der Literatur dient dazu herauszufinden, welche von den allgemeinen Ergebnissen speziell für kinetische Gleichungen verwendbar sind.

In der Literatur, die sich mit kinetischen Systemen aus der Chemie befasst, werden nur einige erwähnt [*Horn und Jackson* 1972, *Póta* 1983, 1985], bzw. deuten wir auf das Literaturverzeichnis des Buches von [*Érdi und Tóth* 1989] hin.

Wie sieht die rechte Seite der untersuchten Differentialgleichungen aus?

- •Zwei Variablen (Dimension 2), homogen und quadratisch;
- •zwei Variablen, quadratisch;
- •zwei Variablen, Grad m;
- • n Variablen, quadratisch;
- • n Variablen, homogen;
- • n Variablen, homogen und quadratisch;
- • n Variablen, Grad m.

Womit beschäftigen sich die polynominale Differentialgleichungen erörternden, mathematischen Aufsätze?

Einige befassen sich mit Unterscheidung der polynominalen Differentialgleichungen, und deren, die aufgrund des Massenwirkungsgesetzes vor sich gehen [*Hárs und Tóth* 1981].

Als Operationen (z.B. Multiplikation) können die gewöhnlichen verwendet werden oder stattdessen kann man neue einführen. Im letzteren Falle entstehen im allgemeinen nichtassoziative Algebren. Die algebraischen Eigenschaften und Begriffe können mit Eigenschaften und Begriffe der qualitativen Theorie von Differentialgleichungen in Verbindung gebracht werden.

Getz und Jacobson (1977) untersuchten auf Basis polynominaler Gleichungen z.B. die Grundprobleme der qualitativen Theorie.

Eine häufige Frage ist, wie man eine exotische Erscheinung mit dem einfachsten Modell verwirklichen kann [*Dancsó und Farkas* 1989; *Póta* 1983; *Schuman und Tóth* 2003; *Tóth und Hárs 1986a; Wilhelm* 2000].

Es gab viele, die die Transformationen von polynominalen Gleichungen und deren Wirkungen untersuchten [*Beklemisheva* 1978a,b, 1982; *Gy. Farkas* 1999; *Halmschlager und Tóth* 2004; *Zsófia Horváth* 2002; *Samardzija et al.* 1989; *Zachár* 1998].

Nachfolgend werden wir über wichtige Aufsätze ausführlicher schreiben.

Argemi (1979) untersuchte die singulären Punkte von Gradientsystemen.

Beklemisheva (1972a,b, 1982) hat polynominale Differentialgleichungen in blocktriangulare Gleichungen durch (verallgemeinerte) polynominale Abbildungen transformiert. Ihre Untersuchungen dazu sind formal, sie macht keine Aussage über den Definitionsbereich, Lipschitz-Eigenschaft, Eindeutigkeit und Invertierbarkeit.

Escher (1981) konstruierte solche kinetischen Differentialgleichungen, die über eine gegebene Zahl von Grenzzyklen verfügt.

Getz und Jacobson (1977) untersuchten die Lösung der Cauchy-Aufgabe $\dot{x} = x^2, x(0) = x_0$ (das Modell der $2X \to 3X$ autokatalytischen Reaktion). Sie ist nur im Intervall $(0,1/x_0)$ ausgelegt, so dass es auch bei der polynominalen Differentialgleichung der einfachsten chemischen Reaktion zu einer Explosion kommt. Getz und Jacobson haben darauf eine notwendige und hinreichende Bedingung für quadratische Differentialgleichungen gegeben. Zu untersuchen ist, was diese Bedingung für Modelle chemischer Reaktionen bedeutet.

Jenks (1968) er untersucht homogene Differentialgleichungen vom Grad *k*, die ein lineares erstes Integral haben (Erhaltung des Materials). Er beweist die Existenz von dem singulären Punkt. Er erhält Ergebnisse – durch Verallgemeinerung der Perron-Frobenius-Theorie – die die Existenz der Ljapunov-Funktionen und die Stabilität betreffen (ein spezieller Fall ist die mehrvariable Volterra-Gleichung). *Jenks* (1969) untersuchte homogene, quadratische Gleichungen mit speziellen Voraussetzungen für die Koeffizienten, die die negative Kreuzwirkung ausschließen und die Erhaltung des Materials ausdrücken. Er untersuchte weiterhin die Verbindung zwischen der Koeffizientenmatrix und den Eigenschaften der singulären Punkte. Er gibt eine hinreichende Bedingung für die asymptotische Gleichgewichtslage durch Konstruieren einer Ljapunov-Funktion.

Kinyon und Sagle (1990) untersuchten dreivariable, homogene, quadratische Gleichungen mit einer speziellen Operation in einer geeigneten, nichtassoziativen Algebra (in einer sog. Nahm-Algebra). Eigentlich treffen sie Vorbereitungen, aber die Anwendung der Ergebnisse für Differentialgleichungen bleibt aus.

Markus (1960) hat eine volle Klassifizierung der zweivariablen, quadratischen Gleichungen gegeben. Er hat zu einer jeden quadratischen Gleichung eine kommutative, nichtassoziative Algebra zugeordnet, und hat diese Algebren klassifiziert.

Myung und Sagle (1992): die Eigenschaften und Begriffe (halbeinfach, radikal, Automorfismus) der Algebren, die den quadratischen Differentialgleichungen entsprechen, haben sie den Begriffen, die das qualitative Verhalten der Lösungen beschreiben (Gleichgewicht, Stabilität, Kopplung von Differentialgleichungen) entsprechen lassen. Sie haben auch gezeigt, dass man jede polynominale Gleichung durch Einführung der Produkte der Potenzen der Variablen zu einer quadratischen Gleichung transformieren kann.

Newcomb (1977) hat polynominale Differentialgleichungen zu quadratischen, homogenen Differentialgleichungen transformiert ($\dot{x} = x * x$, wobei $*$ eine gelegene Operation ist) und hat deren Lösungen als Potenzreihen angegeben, obwohl ohne Untersuchung des Konvergenzbereiches.

Poland (1993), *Samardzija et al.* (1989), *Zahár* (1998) und *Dancsó und Farkas* (1989) transformierten polynominale Differentialgleichungen in kinetische Systeme mit dem Ziel, dass die anfänglichen Eigenschaften erhalten bleiben.

Shafer DS (1990) untersuchte die strukturelle Stabilität der polynominalen Vektorfelder. Er untersucht den Fall der Gradientensysteme ausführlich.

Steeb, Wilhelm (1980) verwendeten die Carleman-Linearisierungsprozedur für quadratische Gleichungen und formten die ursprüngliche Gleichung in ein unendlichdimensionales, lineares System um bzw. approximierten sie die Lösung mit Anwendung dessen endlichdimensionalen Näherung gut.

Walcher (1986) konstruierte zweivariable, polynominale Differentialgleichungen, die im Voraus gegebene, invariante Kurven haben und befasst sich mit der Existenz von Fundamentallösungen von polynominalen Systemen, die in der Dimension eins bekannt sind (die Frage ist, was seine Ergebnisse für Reaktionen bedeuten).

Zalar und Mencinger (2003) konstruierten homogene quadratische Gleichungen aus quadratischen Gleichungen durch Einführung einer geeigneten bilinearen Form bzw. durch Einführung von neuen Variablen. Danach verallgemeinerten sie die Ergebnisse von *Kinyon und Sagle* (1990) über Instabilität.

II. TRANSFORMIERUNG VON POLYNOMEN

In diesem Teil wird eine bestimmte Transformation dargelegt und untersucht.

Vorläufige Thesen:

a) Jede polynominale Differentialgleichung von *Grad n* kann in eine *quadratische* Differentialgleichung transformiert werden

b) Jede *kinetische* polynominale Differentialgleichung von *Grad n* kann in eine *quadratische, kinetische* Differentialgleichung transformiert werden.

Im weiteren Verfolg wird ein konkretes Beispiel untersucht. Ein gegebenes System mit einer konkreten Transformation, die den zuvor erwähnten Sätzen entsprechen.

Das Beispiel (Dimension=2, Grad=3)

Betrachten wir die folgende Differentialgleichung:

$$(3)\begin{cases} \dot{x} = A + x^2 y - \underline{(B+1)x} \\ \dot{y} = Bx - x^2 y \end{cases} \qquad A, B > 0$$

und nehmen wir die folgende Transformation:

$$\begin{array}{lcl} \xi_1 := x^2 & & \dot{\xi}_1 = 2x\dot{x} \\ \xi_2 := y^2 & & \dot{\xi}_2 = 2y\dot{y} \\ \xi_3 := xy & \text{die Derivate sind so} & \dot{\xi}_3 = \dot{x}y + \dot{y}x \\ \xi_4 := x & & \dot{\xi}_4 = \dot{x} \\ \xi_5 := y & & \dot{\xi}_5 = \dot{y} \end{array}$$

Und *eine* mögliche, transformierte, neue Gleichung ist

$$(4)\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2(\xi_4 + \xi_1\xi_3 - (B+1)\xi_1) \\ \dot{\xi}_2 = 2(B\xi_3 - \xi_1\xi_2) \\ \dot{\xi}_3 = A\xi_5 + \xi_1\xi_2 - (B+1)\xi_3 + B\xi_1 - \xi_1\xi_3 \\ \dot{\xi}_4 = A + \xi_1\xi_5 - (B+1)\xi_4 \\ \dot{\xi}_5 = B\xi_4 - \xi_1\xi_5 \end{cases}$$

Die ursprüngliche Gleichung (3) war *nicht kinetisch*, aber das transformierte System (4) ist *kinetisch*.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Form (4) nicht die einzige Möglichkeit ist, da an Stelle von ξ_1 ξ_4^2 geschrieben werden kann, sowie $\xi_1\xi_2 = \xi_3^2$, $\xi_3 = \xi_4\xi_5$ und $\xi_1\xi_5 = \xi_3\xi_4$, wodurch die neue Gleichung ebenso *nicht kinetisch* wäre (ähnlich der ursprünglichen Gleichung (3)). Ebenso verändern die Ersetzungen $\xi_3 = \xi_4\xi_5$, $\xi_1\xi_2 = \xi_3^2$ und $\xi_1\xi_5 = \xi_3\xi_4$ die Eigenschaft (nicht kinetisch) der Gleichung (3) nicht.

Wegen der Konstante A in (3) kann man in (4) die nichtquadratischen Terme nicht beheben.

Wenn man (3) mit einem kleinen „Trick“ auf die folgende Art umschreibt, kann man (3) in eine Differentialgleichug transformieren, deren rechte Seite *rein quadratisch* ist.

Sei $\dot{z} = 0$, $z(0) = 1$ und fügen wir es den Gleichungen des Systems (3) hinzu. So bekommt man das folgende System (Dimension=3, Grad=3)

$$(3^*)\begin{cases} \dot{x} = A + x^2 y - \underline{(B+1)x} \\ \dot{y} = Bx - x^2 y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Nehmen wir jetzt die folgende Transformation:

$\xi_1 := x^2 \quad \xi_4 := xy \quad \xi_7 := x$

$\xi_2 := y^2 \quad \xi_5 := xz \quad \xi_8 := y$

$\xi_3 := z^2 \quad \xi_6 := yz \quad \xi_9 := z$

Hierbei lässt sich sicher eine Ersetzung finden, womit die transformierte Form von (3*) *rein quadratisch* wird.

Untersuchung der Variablentransformation

Die oben dargelegte Transformation ist auf den ersten Blick sehr nützlich, weil sie uns andeutet, dass die Untersuchung der kvadratischen Gleichung uns qualitative und quantitative Eigenschaften des originalen Systems (von höherem Grad) wissen lässt. Ein eindeutiger Nachteil ist die erhöhte Zahl der Variablen.

Diese Transformation selbst ist natürlich bijektiv, aber es stellt sich auch die Frage, ob man eine Gleichung eindeutig *zurücktransformieren* kann, wenn man nur die transformierte Gleichung betrachtet, aber keine Information darüber hat, wie sie konstruiert wurde. Denken wir daran, dass man für einen Term mit den ursprünglichen Variablen oft mehrere transformierte Terme wählen kann (wie es wir schon bei der Gleichung (4) gesehen haben) und dass man die Indizes der neuen Variablen frei permutieren kann, z.B.:

$\xi_3 := x^2$

$\xi_5 := y^2$

$\xi_2 := xy$

$\xi_1 := x$

$\xi_4 := y$

Die Zahl der neuen Variablen

Mit elementaren kombinatorischen Rechnungen kann man die Zahl der neuen Variablen (f) neben *Dimension=n* und *Grad=m* verhältnismäßig leicht bestimmen:

$$f(n,m) = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(m+n-2-i)!}{(m-1-i)!(n-1)!}$$

(Bemerkung: Für große n und m ist $f(n,m)$ klarer Weise auch sehr groß. Oft sind auch weniger transformierte Variablen ausreichend, aber $f(n,m)$ ist in jedem Fall ausreichend.)

Wenn man aufgrund dieser Formel eine Tabelle (eine Matrix) zusammenstellt bzw. wenn man sogar an bestimmte Eigenschaften von f denkt, erkennt man schnell, dass sie symmetrisch ist.

n \ m	3	4	5	6
2	5	9	14	20
3	9	19	34	55
4	14	34	69	125
5	20	55	125	251

Es stellt sich die Frage, ob man eine Gleichung mit *Dimension=2 und Grad=,* oder eine mit *Dimension=3 und Grad=3* suchen sollte, wenn die zu zurücktransformierende quadratische Gleichung neun Variablen hat. Deshalb wird man höchstwahrscheinlich im allgemeinen keine Rücktransformation finden können.

Bemerkung: Bei einigen *speziellen* Systemen kann man die Rücktransformation leicht finden. Auch in diesem Fall erfordert man natürlich eine konsequente Transformation der Variablen, also wenn man die folgende Ersetzung verwendet: $\xi_1 := x^2, \xi_2 := y^2, \xi_3 := xy, \xi_4 := x, \xi_5 := y$ und z.B. für $x^2 y$ einmal $\xi_1 \xi_5$ anwendet, dann wird man immer diesen Term nehmen, und nie $\xi_3 \xi_4$.

III. ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz haben wir zuerst einen Überblick der Literatur über polynominale Differentialgleichungen gegeben, und haben die wichtigsten Forschungsgebiete in diesem Thema dargestellt. Danach haben wir eine Transformation gezeigt und untersucht, womit man jede polynominale (kinetische) Differentialgleichung von *Grad n* in eine *quadratische* (kinetische) Differentialgleichung transformieren kann. Wir haben bei dieser gegebenen Transformation die Zahl der neuen Variablen genau gegeben, und wir haben auch die Frage der Rücktransformierung gerührt. Im weiteren Verfolg werden wir die Transformation von kinetischen Gleichungen in quadratische, kinetische Gleichungen, bzw. die Verbindung von Hamilton-Systemen und die Erhaltung des Materials in chemischen Reaktionen ausführlicher untersuchen.

IV. DANKSAGUNG

Ich möchte mich herzlich für die Gelegenheit, diesen Aufsatz an der Frühlingsakademie 2004 vortragen zu dürfen, bedanken.

Wir möchten uns für die Unterstützung von OTKA T037491 bedanken.

Persönlich möchte ich mich bei allen bedanken, die bei grammatischen und stilistischen Korrekturen geholfen haben und bei denjenigen, die die Redaktion übernommen haben.

V. LITERATUR

[1] J. Argemi, "Sur les points singuliers de certains champs de gradients polynomiaux," *Nonlinear oscillations*, Proc. 8th int. Conf., Prague 1978, vol. 1, 111-115., (1979)

[2] L. A. Beklemisheva, "Classification of polynominal systems with respect to birational transformations I. ", *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, no. 5, 1978, 807–816.

[3] L. A. Beklemisheva, "Classification of polynominal systems with respect to birational transformations II. ," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, no. 10, 1978, 1731–1738.

[4] L. A. Beklemisheva, "Reducibility of polynominal-equation systems to block-triangular form," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 18, no. 11, 1982, 1843–1854.

[5] L. Brenig, M. Codutti, and A. Figueiredo, "Numerical integration of dynamical systems using Taylor series," in *Proceedings of ISSAC conference* (1996).

[6] J. Cresson and B. Schuman, "Normal forms and the center problem," *Bulll. sci. math.*, vol. 125, no. 3, 2001, pp. 235–252.

[7] A. Dancsó, H. Farkas, "On the `simplest` oscillating chemical system," *Periodica Polytechnica – Chemical Engineering,*vol. 33 (1989) 275–285.

[8] C. Escher, "Bifurcation and coexistence of several limit cycles in models of open two-variable quadratic mass-action systems," *Chem. Phys.,* **63** (1981) 337–348.

[9] P. Érdi, J. Tóth, *Mathematical Models of Chemical Reactions. Theory and Applications of Deterministic and Stochastic Models*, Princeton University Press, Princeton: 1989.

[10] Gy. Farkas, "Kinetic lumping schemes," *Chemical Engineering Science*, vol. 54, no. 17, 1999, pp. 3909–3915.

[11] W.M. Getz and D.H. Jacobson, "Sufficiency coonditions for finite escape times in systems of quadrtatic differential equations," *J. Inst. Maths. Applics*, vol. 19, 1977, pp. 377–383. http://www.math.bme.hu/~jtoth/

[12] A. Halmschlager, A., Szenthe, L. and Tóth, J.: "Invariants of kinetic differential equations," *Electronic Journal of the Qualitative Theory of Differential Equations*, (2004) (to appear) http://www.math.bme.hu/~jtoth/

[13] V. Hárs and J. Tóth, J., "On the inverse problem of reaction kinetics," in: *Colloquia Mathematica Societatis János Bolya*i, (Szeged, Hungary, 1979) Qualitative Theory of Differential Equations (M. Farkas ed.), 30 North-Holland - János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1981, pp. 363–379.

[14] F.J.M. Horn and R. Jackson, "General mass action kinetics," *Arch. Ratl. Mech. Anal.* vol. 47, no. 1, 1972, pp. 81–116.

[15] Zs. Horváth, "Effect of lumping on controllability and observability", Poster presented at the Colloquium on Differential and Difference Equations dedicated to Prof. František Neuman on the occasion of his 65th birthday, Brno, Czech Republic, September 4 - 6, 2002, http://www.math.bme.hu/~jtoth/

[l6] R.D. Jenks, "Homogeneous multidimensional differential systems for mathematical models," *J. Diff. Eqs.* vol. 4, 1968, pp. 549–565.

[l7] R.D. Jenks, "Quadratic differential equation for interactive population models," *J. Diff. Eqs.* vol. 5, 1969, pp. 497–514.

[l8] J. Kaplan and J. Yorke, "Nonassociative real algebras and quadratic differential equations," *Nonlinear Analysis TMA*, vol. 3, 1979, pp. 49–51.

[l9] M. Kinyon, A.A. Sagle and H. Myung, "Quadratic differential equations," in: *Hadronics mechanics and nonpotential interactions*, Part 1, (Cedar Falls, IA, 1990), Nova Sci. Publ., Commack, NY, pp. 197–204.

[20] G. Li, "A lumping analysis in mono- or/and bimolecular reaction systems, " *Chem. Eng. Sci.* vol. 29, no. 7-8, 1984, pp. 1261–1270.

[21] L. Markus, "VIII. Quadratic differential equations and non-associative algebras," *Ann. Math. Studies*, (Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. V, Princeton University Press, Princeton, NJ), vol. 45, 1960, pp. 185–213.

[22] H. Ch. Myung and A. A. Sagle: "Quadratic differential equations and algebras," in *Proceedings of the International Conference on Algebra, 1989, Dedicated to the Memory of A.I. Mal'cev*, *Akademgorodok, Novosibirsk, RSFSR*, Part 2 (L.A. Bokut, Yu.L. Ershov and A. I. Kostrikin eds., AMS Providence RI), *Contemp. Math.,* vol. 131, Part 2, 1992, pp. 659–672.

[23] R.W. Newcomb, "Nonlinear differential systems: A canonic, multivariable theory," *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, no. 6, 1977, pp. 930–935.

[24] D. Poland, "Cooperative catalysis and chemical chaos: A chemical model for the Lorenz equation," *Physica D,* vol. 65, 1993, pp. 86–99.

[25] Gy. Póta, "Two-component bimolecular systems cannot have limit cycles: A complete proof," *J. Chem. Phys.*, vol. 78, 1983, pp. 1621–1622.

[26] Gy. Póta, "Irregular behaviour of kinetic equations in closed chemical systems," *J. Chem. Soc. Faraday Trans. 2*, vol. 81, 1985, pp. 115–121.

[27] N. Samardzija, L. D. Greller, E. Wassermann, "Nonlinear chemical kinetic schemes derived from mechanical and electrical dynamical systems," *J. Chem. Phys.*, vol. 90, no. 4, 1989, pp.

2296–2304.
[28] B. Schuman, J. Tóth, "No limit cycle in two species second order kinetics," *Bull. sci. math.*, vol. 127, 2003, pp. 222–230. http://www.math.bme.hu/~jtoth/
[29] D.S. Shafer, "Structure and stability of gradient polynominal vector fields," *J. Lond. Math. Soc.*, II. Ser. 41, No.1, 109-121. (1990)
[30] W. Steeb and F. Wilhelm, "Non-linear autonomous systems of differential equations and the Carleman linearization procedure," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 77, 1980, pp. 601–611.
[31] L. Szili and J. Tóth, "On the origin of Turing instability," *Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 22, no. 1, 1997, pp .39–53.
[32] J. Tóth and V. Hárs, "Specification of oscillating chemical reactions starting from a given linearized form," *Theor. Chimica Acta*, vol. 70, 1986a, pp. 143–150.
[33] J. Tóth and V. Hárs, "Orthogonal transforms of the Lorenz- and Rössler-equation," *Physica D*, vol. 19, 1986b, pp. 135–144.
[34] J. Tóth, G. Li, H. Rabitz and A. Tomlin, "The effect of lumping and expanding on kinetic differential equations," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 57, no. 6, 1997, pp. 1531–-1556.
[35] E. O. Voit and M. A. Savageau, "Equivalence between *S*-systems and Volterra systems," *Math. Biosci.*, vol. 78, no. 1, 1986, pp. 47–55.
[36] S. Walcher, "Polynominal, particularly Riccati differential equations with fundamental solutions," *Math. Ann.*, 275 (2): 269-280 1986
[37] T. Wilhelm, "Chemical systems consisting only of elementary steps – a paradigma for nonlinear behavior," *J. Math. Chem.*, vol. 27, no. 1-2, 2000, pp. 71–88.
[38] T. Wilhelm, R. Heinrich, "Smallest chemical reaction system with Hopf bifurcation," *J. Math. Chem.*, vol. 17, 1995, pp. 1–14.
[39] A. Zachár, "Comparison of transformations from nonkinetic to kinetic models," *Acta Chimica Hungarica – Models in Chemistry,* vol. 135, no. 3, 1998, 425–434.
[40] B. Zalar, M. Mencinger, "On stability of critical points of quadratic differential equations in nonassociative algebras," *Glas. Mat. Ser.*, **38(58)**, no 1., 2003, pp. 19–27.