Rásegítő feladatok a *Differenciálegyenletek alkalmazásai*nak tanulmányozásához

Tóth János

2005. szeptember 21.

1. Bevezetés

Az alábbiakban az elemi analízis néhány olyan fogalmát és tételét ismételjük át – többnyire példákon keresztül – amelyek szükségesek a differenciálegyenletek tanulmányozásához.

A feladatok és megoldásaik is időnként bővülnek és javulnak, ehhez kérem a T. Olvasó segítségét is.

2. Feladatok

1. Legyen $y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x \in D_y$ mellett: (a) $(\mathrm{id}, y)(x)$, (b) $(y \circ \mathrm{id})(x)$, (c) $(\mathrm{id} \circ y)(x)$.

2. Legyen $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x, y \in D_f$ mellett: (a) $(f \circ \mathrm{pr}_1)(x, y)$, (b) $(f \circ \mathrm{pr}_2)(x, y)$.

3. Legyen $g = (h, k) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x \in D_g$ mellett: (a) $(\mathrm{pr}_1 \circ g)(x)$, (b) $(\mathrm{pr}_2 \circ g)(x)$.

4. Legyen $\tau \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy a τ pontot tartalmazó nyílt intervallumok egyesítése τ pontot tartalmazó nyílt intervallum.

5. Legyen tetszőleges $a \in \mathbb{R}^+$ mellett $y_a(x) := \exp(-2x) \quad (x \in]0, a[.)$ Számítsuk ki: $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} y_a$.

6. Legyen $z_a(t) := a\exp(-t) \quad (t \in \mathbb{R})$. Számítsuk ki: $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} z_a$.

7. Adjuk meg az $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni \xi \mapsto \dfrac{1}{\xi}$ függvény néhány szigorúan monoton csökkenő leszűkítését.

8. Mit mond ki Newton II. axiómája?

9. Lehet-e egy függvény deriváltfüggvénye
   (a) az előjelfüggvény?
   (b) a Heaviside-féle egységugrás-függvény?

10. Számítsuk ki a deriváltját (hol van értelmezve, hol deriválható?):
   (a) $x \mapsto \ln(\mathrm{tg}(\frac{x}{2}))$,
   (b) $t \mapsto \dfrac{L}{\frac{L-m_0}{m_0}\exp(-\lambda L t) + 1} \quad (L, m_0 \in \mathbb{R}^+$ rögzített$)$,

11. Számítsuk ki az első három deriváltját:
   (a) $t \mapsto y(-\exp(t)) \quad (y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}))$,
   (b) $s \mapsto z(\cos(s)) \quad (z \in \mathcal{C}^3([0,1], \mathbb{R}))$,

12. Igaz-e, hogy ha egy kétszer deriválható függvény
   (a) deriváltja mindenütt nulla, akkor a függvény állandó?
   (b) deriváltja mindenütt pozitív, akkor a függvény szigorúan monoton növekedő?
   (c) második deriváltja mindenütt negatív, akkor a függvény (alulról) konkáv?

13. Hol értelmezhető és mi a deriváltfüggvénye az alábbi függvény inverz függvényének: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x + \ln(x)$,

14. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\mathbb{R}^+ \ni \varphi(t) := \cosh(t) \quad \text{és} \quad \mathbb{R}^+ \ni \psi(t) := \sinh(t),$$

akkor a φ, ψ függvénypár egy valós-valós y függvény paraméteres megadásának tekinthető, azaz $y := \psi \circ \varphi^{-1}$ függvényt definiál. Határozzuk meg az y függvény értelmezési tartományát, és – ahol deriválható, ott – számítsuk ki a deriváltfüggvényét.

15. (a) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot: $p \mapsto 2(p-1) + \exp(-p)$.
    (b) Legyen $A, B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, és vizsgáljuk a $\varphi \mapsto Ae^{-\ \varphi} - Be^{-\ \varphi}$ függvényt.

16. Legyen

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto V(x, y) := x^2 + y^2$$
$$\varphi(t) := \cos(t), \quad \psi(t) := \sin(t), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Számítsuk ki a $V \circ (\varphi, \psi)$ összetett függvény deriváltfüggvényét!

17. Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele határozatlan integrálokra, és mint mond ki határozott integrálokra?

18. Hogyan szól (pontosan!) a Newton–Leibniz-tétel?

19. Legyen $u(p) := 3\exp(p+1) \quad (p \in \mathbb{R})$ és $f(p, q) := q \quad ((p, q) \in \mathbb{R}^2)$. Igazoljuk, hogy $u = 3 + \int_{-1} f \circ (\mathrm{id}, u)$.

20. Határozzuk meg az alábbi függvények 1 pontban eltűnő primitív függvényét: (a) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \quad (x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+))$ (b) $\mathbb{R} \ni k \mapsto \cos^3(k)\sin(k)$.

21. Határozzuk meg az alábbi függvények -2 pontban eltűnő integrálfüggvényét: (a) sign (b) $t \mapsto \cos^3(t)\sin(t)$. Ezek közül melyik primitív függvénye valamely függvénynek?

22. Adjunk elégséges feltételt arra, hogy egy integrálfüggvény megfeleljen primitív függvénynek!

23. Vannak-e az alábbi függvénypároknak primitív függvényeik? Ha igen, határozzuk meg közülük azt, amelyik az $(1, 1)$ pontban eltűnik.
    (a) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := (\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$,
    (b) $(\mathbb{R}^+)^2 \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$,

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y)) := (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

24. Számítsuk ki az alábbi függvény elsőrendű parciálisderivált-függvényeit: $(x,y) \mapsto u(x,y) := \ln(3y^2 - x)\varphi(x + y^2)$, φ tetszőleges deriválható függvény. Ha φ értelmezési tartománya az $]\alpha, \beta[$ nyílt intervallum ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha < \beta$), akkor melyik az a legbővebb halmaz a síkon, amely a fenti függvény értelmezési tartományának vehető?

25. Számítsuk ki az alábbi függvények összes első- és másodrendű parciálisderivált-függvényét (előtte: értelmezési tartomány!):
(a) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $\mathrm{tg}(\frac{x^2}{y})$, (c) x^y.

26. Tegyük fel, hogy (alkalmas halmazon)

$$x\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = xy. \tag{1}$$

Mit mondhatunk akkor az (alkalmas halmazon; hol?)

$$u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1+y^2}) := z(x,y)$$

összefüggéssel értelmezett u függvényről?

27. Mikor nevezzük vektorok egy halmazát lineárisan függetlennek?

28. Számítsuk ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

29. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a minden $t \in \mathbb{R}$ mellett értelmezett d_1, d_2 függvényekre:

$$\begin{aligned} -d_1(t)\exp(2t) + 4d_2(t)\exp(-3t) &= 1 + 4t, \quad (2)\\ d_1(t)\exp(2t) + d_2(t)\exp(-3t) &= \frac{3}{2}t^2. \quad (3) \end{aligned}$$

3. Megoldások

1. Figyelembe véve, hogy $\mathrm{id}(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$, és felhasználva a függvénypár és az összetett függvény értelmezését, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ mellett kapjuk, hogy
   (a) $(\mathrm{id}, y)(x) = (x, y(x))$,
   (b) $(y \circ \mathrm{id})(x) = y(\mathrm{id}(x)) = y(x)$,
   (c) $(\mathrm{id} \circ y)(x) = \mathrm{id}(y(x)) = y(x)$.

2. Figyelembe véve a projekciók (vetítések) értelmezését:

$$\mathrm{pr}_1(x, y) := x, \quad \mathrm{pr}_2(x, y) := y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

   és

   (a) ismét használva az összetett függvény definícióját:

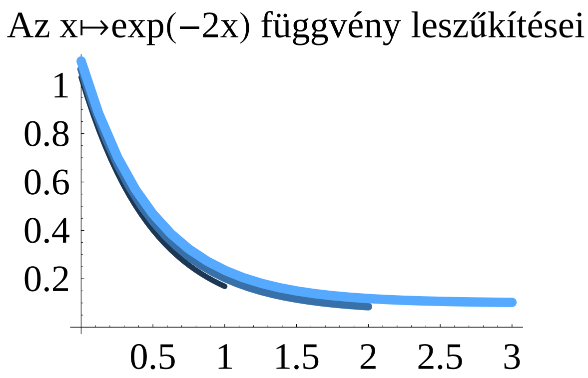
$$(f \circ \mathrm{pr}_1)(x, y) = f(\mathrm{pr}_1(x, y)) = f(x),$$

   (b) illetve

$$(f \circ \mathrm{pr}_2)(x, y) = f(\mathrm{pr}_2(x, y)) = f(y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in D_f).$$

3. Felhasználva a fentieket kapjuk, hogy
   (a) $(\mathrm{pr}_1 \circ g)(x) = \mathrm{pr}_1(g(x)) = h(x)$,
   (b) $(\mathrm{pr}_2 \circ g)(x, y) = \mathrm{pr}_2(g(x)) = k(x)$.

4. Egyrészt, közös pontot tartalmazó nyílt intervallumok egyesítése nyílt intervallum. Másrészt, a $\tau \in \mathbb{R}$ pontot tartalmazó halmazok egyesítése tartalmazza a τ pontot.



1. ábra. a $]0,1[$, $]0,2[$ és $]0,3[$ intervallumra

5. $\bigcup_{a\in\mathbb{R}^+} y_a = (]0,+\infty[\ \ni x \mapsto \exp(-2x))$. Részletezve: belátható, hogy mindkét oldal részhalmaza a másiknak.

6. $\bigcup_{a\in\mathbb{R}^+} z_a = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, ugyanis a megadott függvények grafikonjának minden pontja a felső félsíkban van, és a felső félsík minden pontja rajta van valamelyik függvényen.

7. Az $\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni\xi\mapsto\dfrac{1}{\xi}$ függvény két szigorúan monoton csökkenő leszűkítése például: $\mathbb{R}^+\ni\xi\mapsto\dfrac{1}{\xi}, \mathbb{R}^-\ni\xi\mapsto\dfrac{1}{\xi}$.

8. Newton II. axiómája szerint a mozgásmennyiség változása arányos a ható mozgató erővel, és annak az egyenes vonalnak az irányában megy végbe, amelyben az erő hat. Képlettel:

$$(mv)' = F, \quad \text{avagy} \quad \frac{d(m(t)v(t))}{dt} = F(t, s(t), v(t)),$$

ahol $v := s'$. (Az arányossági tényező – a **tömeg** – igen gyakran állandónak vehető.)

9. Mivel egyik függvény sem rendelkezik a Bolzano–Darboux-féle tulajdonsággal, ezért mindkét kérdésre tagadó a válasz.

10. (a) Az $x\mapsto\ln(\mathrm{tg}(\frac{x}{2}))$ képlettel például a $]0,\pi[$ nyílt intervallumon lehet deriválható függvényt értelmezni, mivel, ha $x\in\ ]0,\pi[$, akkor

$\frac{x}{2} \in D_{\mathrm{tg}}$, és $\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) \in D_{\ln}$. Az így értelmezett függvény deriváltfüggvénye pedig az összetett függvény deriválási szabálya szerint: $]0, \pi[\ni x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} = \csc(x)$.

(b) A $t \mapsto \dfrac{L}{\frac{L-m_0}{m_0} \exp(-\lambda L t) + 1}$ képlettel értelmezett függvény az L, m_0 paraméterekre tett megszorítás mellett az egész számegyenesen értelmezve van, hiszen $(\frac{L}{m_0} - 1) \exp(-\lambda L t) > -1$, továbbá differenciálható is; deriváltfüggvénye $t \mapsto \frac{\exp(\ \ Lt)L^2\ \ (L-m_0)m_0}{(L+(\exp(\ \ Lt)-1)m_0)^2}$. Vegyük észre (inkább: lássuk be), hogy a derivált másrészt tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ mellett ezzel egyenlő: $\lambda f(t)(L - f(t))$.

11. (a) A $\varphi : t \mapsto y(-\exp(t)) \quad (y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}))$ akárhányszor deriválható függvény egymás után következő deriváltjai:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}), \\
\varphi''(t) &= y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}), \\
\varphi'''(t) &= -y'''(-e^t)e^{3t} + 3y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

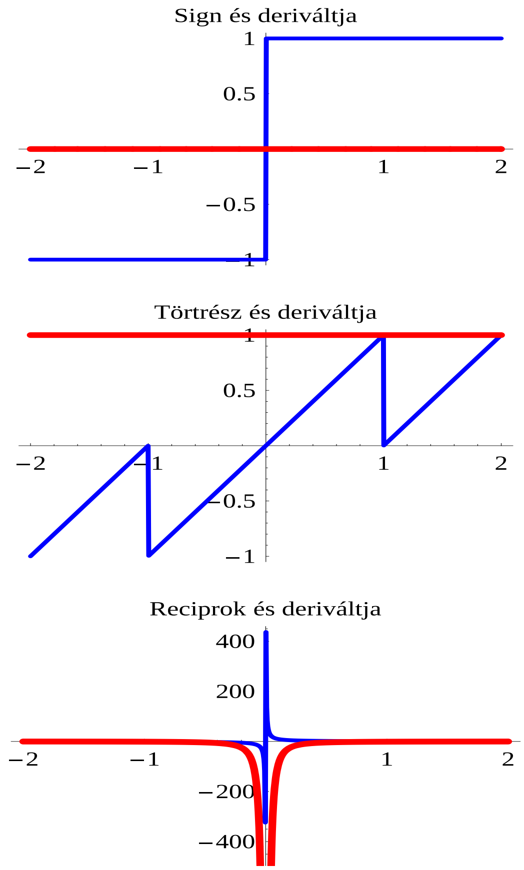
(b) A $\psi : s \mapsto z(\cos(s)) \quad (z \in \mathcal{C}^3([0,1], \mathbb{R}))$ akárhányszor deriválható függvény egymás után következő deriváltjai:

$$\begin{aligned}
\psi'(s) &= -z'(\cos(s))\sin(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \\
\psi''(s) &= z''(\cos(s))\sin^2(s) - z'(\cos(s))\cos(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \\
\psi'''(s) &= -z'''(\cos(s))\sin^3(s) + 3z''(\cos(s))\sin(s)\cos(s) \\
&+ z'(\cos(s))\sin(s) \quad (s \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Zárt intervallumon a deriválhatóságot a szokásnak megfelelően úgy értjük, hogy a függvény a végpontokban „belülről" deriválható.

12. Mindhárom állítás igaz **intervallumon értelmezett** függvényekre. Mindhárom állításra könnyű ellenpéldát adni, ha az értelmezési tartomány nem intervallum, például az előjelfüggvény, a törtrészfüggvény és a reciprokfüggvény segítségével, amint az ábra mutatja.

13. Mivel az $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto f(x) := x + \ln(x)$ függvény deriválható, deriváltja szigorúan pozitív, ezért szigorúan monoton növekedő, így invertálható.



2. ábra. Értelmezési tarományok!

Mivel $R_f = \mathbb{R}$, ezért inverzének – legyen ez g – értelmezési tartománya az egész valós számegyenes, és inverze mindenütt deriválható, ugyanis az eredeti függvény deriváltja sehol sem nulla. Továbbá:

$$g'(y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{g(y)}}.$$

Jól látható, hogy a deriváltfüggvény értékét egy adott helyen nem tudjuk explicite előállítani, csak a g inverz függvény segítségével fölírni. Esetenként ez a formula mégis használható.

14. Mivel a $\varphi = \cosh|_{\mathbb{R}^+}$ függvény deriválható, deriváltja szigorúan pozi-

tív, ezért szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Mivel $R_\varphi = [1, +\infty[$, ezért ez lesz inverzének értelmezési tartománya, s ezen az inverz deriválható, hiszen φ deriváltja sehol sem nulla. Az $y : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ függvény tehát differenciálható függvények kompozíciója lévén maga is differenciálható, és deriváltja az összetett és az inverz függvény deriválására vonatkozó tételek felhasználásával:

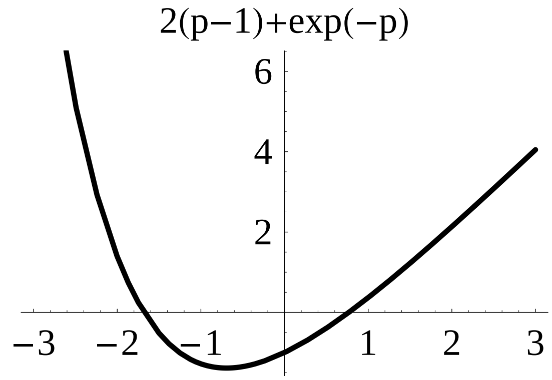
$$y'(x) = \frac{(\psi' \circ \varphi^{-1})(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\sinh \circ \sinh^{-1}(x)}{\cosh(\sinh^{-1}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (x \in [1, +\infty[).$$

Ha nem használtuk volna a hipebolikus függvényekre és inverzeikre vonatkozó tudásunkat, akkor csak idáig jutottunk volna:

$$y'(\cosh(t)) = \coth(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

15. (a) Numerikus számolásból kiderül, hogy az $\mathbb{R} \ni p \mapsto f(p) := 2(p - 1) + \exp(-p)$ függvénynek két gyöke van: $p_0 = -1.67835, p_1 = 0.768039$ (szemben az előadáson elhangzottakkal...). A függvény az egész számegyenesen folyotons, sőt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai: $\mathbb{R} \ni p \mapsto f'(p) := 2 - \exp(-p)$, $\mathbb{R} \ni p \mapsto f''(p) := \exp(-p)$; s az első nullahelyei: $f'(p_2) = 0 \Longleftrightarrow p_2 = -\ln(2) = -0.693147$, míg a második mindig pozitív. Így a függvénynek a p_2 pontban minimuma van, attól balra szigorúan monoton csökkenő, jobbra pedig szigorúan monoton növő; továbbá mindenütt alulról konvex. Határértéke a $\pm\infty$-ben egyaránt $+\infty$. Mindezek alapján a függvény grafikonja:

    (b) Legyen tehát $A, B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Egyszerű számolás mutatja, hogy az $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f(\varphi) := \varphi \mapsto Ae^{- \ \varphi} - Be^{- \ \varphi}$ függvénynek egyetlen gyöke van: $\varphi_0 = \frac{\ln(A/B)}{-}$, amelyiknek az előjele megegyezik a $(A - B)(\lambda - \mu)$ (Feltehető, hogy $\lambda \neq \mu$, ugyanis ellenkező esetben egyetlen exponenciális függvényről van szó.) A függvény az egész számegyenesen folyotons, sőt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai: $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f'(\varphi) := -\lambda Ae^{- \ \varphi} + \mu Be^{- \ \varphi}$, $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f''(\varphi) := \lambda^2 Ae^{- \ \varphi} - \mu^2 Be^{- \ \varphi}$; s ezek nullahelyei: $f'(\varphi_1) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_1 = \frac{\ln(\frac{A}{B}\overline{\ \ })}{-}$, $f''(\varphi_2) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_1 = \frac{\ln(\frac{A}{B}\frac{2}{2})}{-}$. Így a függvénynek a φ_1 pontban pontosan akkor van minimumhelye, ha $\lambda > \mu$, és pontosan akkor van maximumhelye, ha $\lambda < \mu$. A függvény az első esetben a szélsőértékhelytől balra szigorúan monoton csökkenő, a



3. ábra. Egy lineáris és egy exponenciális függvény összege

szélsőértékhelytől jobbra pedig szigorúan monoton növekedő. A függvény a második esetben a szélsőértékhelytől balra szigorúan monoton növekedő, a szélsőértékhelytől jobbra pedig szigorúan monoton csökkenő. Mivel a φ_2 pontban a függvény harmadik deriváltja nem tűnik le, ezért ez a pont inflexiós pont. A függvény határértéke a $+\infty$ pontban nulla, a $-\infty$ pontban pedig $-\infty$. Mindezek alapján a függvény grafikonja:

16. Mivel V, φ és ψ egyaránt deriválható, ezért a vizsgált összetett függvény is. Továbbá

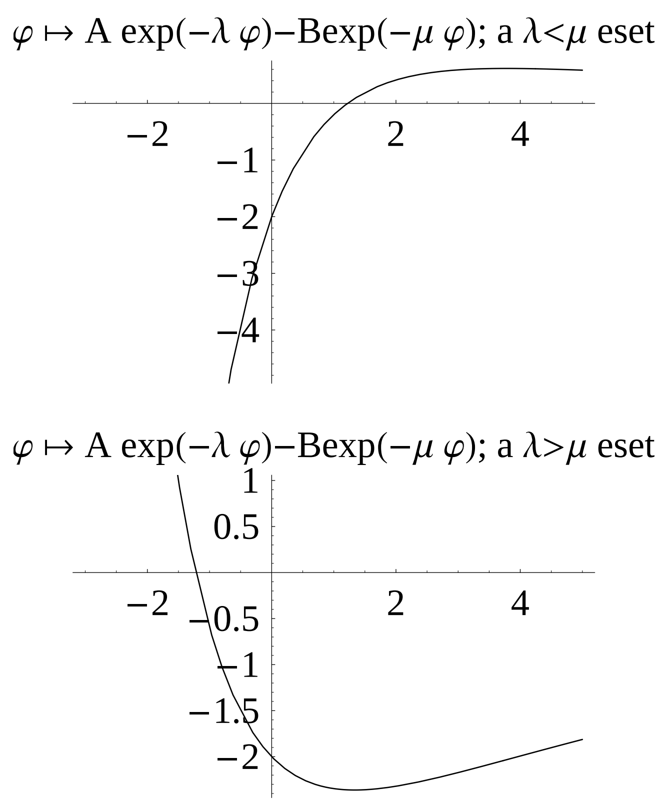
$$V(\varphi(t), \psi(t)) := \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

miatt a derivált az egész számegyenesen értelmezett nulla függvény.

17. Egy-egy gyakran használt változatot mondunk ki. Emlékeztetünk arra, hogy $\int_a f$ jelöli az $a \in \mathbb{R}$ valós számot tartalmazó intervallumon értelmezett f függvény a pontban eltűnő primitív függvényét, $\int f$ pedig az f függvény primitív függvényeiből álló halmazt.

    (a) Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum, és legyen $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$, továbbá legyen $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre $R_g \subset J$. Ha az f függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az $(f \circ g)g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és tetszőleges $a \in I$ esetén

$$\int_a (f \circ g)g' = \left(\int_{g(a)} f\right) \circ g.$$



4. ábra. Két exponenciális lineáris kombinációja

Következmény: a két primitív függvényekből álló **halmaz** megegyezése:

$$\int (f \circ g) g' = \left(\int f \right) \circ g,$$

ahol a jobb oldalon a kompozícióképzés elemenként értendő.

(b) Legyen $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\alpha < \beta, a < b$. Ha az f függvény folytonos az $]a, b[$ intervallumon, a $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow\,]a, b[$ függvény pedig folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{\varphi(\ )}^{\varphi(\ )} f = \int \ (f \circ \varphi)\varphi'.$$

18. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény

integrálható és **létezik primitív függvénye.** Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

ahol F az f függvény **bármely** primitív függvénye: $F \in \int f$ tetszőleges.

19. Írjuk föl a jobb oldalon szereplő, -1 pontban eltűnő primitív függvényt lokális alakban:

$$\int_{-1}^p (f \circ (\mathrm{id}, u))(s)\mathrm{d}s = \int_{-1}^p u(s)\mathrm{d}s = \int_{-1}^p 3\exp(s+1)\mathrm{d}s.$$

A végső integrál kiszámításával kapjuk a bizonyítandó állítást.

$$3 + 3[\exp(s+1)]_{-1}^p = 3 + 3(\exp(p+1) - 1) = 3\exp(p+1) = u(p).$$

20. (a) Nyilván a $\mathbb{R} \ni t \mapsto z(t) := \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \quad (x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+))$ függvény primitív függvényei $\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln(x(t)) + K$ alakúak, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ezek közül az 1 pontban a nullát pontosan az veszi föl, amelyre $\ln(x(1)) + K = 0$, vagyis, amelynél $K = -\ln(x(1))$, így a kívánt primitív függvény: $\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln\left(\frac{x(t)}{x(1)}\right)$.

    (b) A fentiekhez hasonló módon a primitív függvény:

$$\mathbb{R} \ni k \mapsto \frac{\cos^4(k) - \cos^4(1)}{4}.$$

21. (a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{abs}(x) - 2$, (b) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\cos^4(k) - \cos^4(2)}{4}$. A második esetben az integrálfüggvény egyúttal primitív függvény is.

22. Legyen $a, b \in \mathbb{R}; a < b$, és tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos. Akkor – akárhogyan is választjuk meg az $x_0 \in [a, b]$ számot, az f függvény x_0 pontban eltűnő F integrálfüggvénye, azaz

$$[a, b] \ni x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^x f$$

egyúttal az f függvény x_0 pontban eltűnő primitív függvénye is.

23. A megadott függvénypárokkal azonos tartományon értelmezett, valós értékű differenciálható függvényeket keresünk, amelyek parciálisderivált-függvényei éppen a megadott függvények.

   (a) Mivel $D_{(P,Q)} = \mathbb{R}^2$ **egyszeresen összefüggő** tartomány és
   $$\partial_2 P = \partial_1 Q, \tag{5}$$
   ezért létezik olyan $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, amelyre
   $$\partial_1 F = P$$
   és
   $$\partial_2 F = Q \tag{6}$$
   teljesül. Egy ilyen primitív függvényt például úgy kaphatunk meg, hogy tetszőleges rögzített y mellett kiindulunk $x \mapsto P(x,y)$ primitív függvényeiből, ezek nyilván $x\sin(xy) + \varphi(y)$ alakúak valamilyen φ differenciálható függvénnyel. Ezután megkövetelve az (6) összefüggést $x^2\cos(xy) + \varphi'(y) = x^2\cos(xy)$ adódik, hogy φ állandó, akár nullának is vehető. A keresett primitív függvény tehát $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2\cos(xy)$.

   (b) Figyelembe véve, hogy
   $$P(x,y) = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \quad Q(x,y) = \frac{1}{x}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2},$$
   nyilvánvalóan $(\mathbb{R}^+)^2 \ni (x,y) \mapsto F(x,y) := \arctan(\frac{y}{x})$ megfelel primitív függvénynek, s az összes primitív függvény halmaza $\{F + K; K \in \mathbb{R}\}$.

   (c) Itt éppúgy, mint az előbb, teljesül (5), viszont $D_{(P,Q)} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nem egyszeresen összefüggő. A primitív függvények most is csak $(x,y) \mapsto F(x,y) := \arctan(\frac{y}{x})$ alakúak lehetnének, de ezek a függvények az egész első koordinátatengelyen nincsenek értelmezve, így **ezen a halmazon** az adott függvénypárnak nem létezik primitív függvénye.

24. Az értelmezési tartomány a
$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 3y^2 - x > 0, \alpha < x + y^2 < \beta\}$$

halmaz tetszőleges részhalmaza, célszerűen leginkább a fenti halmaz rész**tartomány**a.

Amint az 5. ábráról leolvasható, tartományt pontosan akkor kapunk, ha $\alpha < 0$. Az egész H halmazon értelmezett parciálisderivált-függvények:

$$\partial_1 u(x,y) = \frac{\varphi(x+y^2)}{x-3y^2} + \ln(-x+3y^2)\varphi'(x+y^2) \tag{7}$$

$$\partial_2 u(x,y) = -\frac{6y\varphi(x+y^2)}{x-3y^2} + 2y\ln(-x+3y^2)\varphi'(x+y^2) \tag{8}$$

25. Értelmezési tartományként célszerű **tartomány**t (:=összefüggő, nyílt halmazt) választani.

    (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto a(x,y) := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned}
\partial_1 a(x,y) &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \partial_2 a(x,y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
\partial_1^2 a(x,y) &= -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \quad \partial_2^2 a(x,y) = \frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} \\
\partial_{12} a(x,y) &= \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

    (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > \frac{2x^2}{\pi}\} \mapsto b(x,y) := \tan(\frac{x^2}{y})$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned}
\partial_1 b(x,y) &= \frac{2x}{y\cos^2(x^2/y)} \quad \partial_2 b(x,y) = -\frac{x^2}{y^2\cos^2(x^2/y)} \\
\partial_1^2 b(x,y) &= 2\frac{y+4x^2\tan(x^2/y)}{y^2\cos^2(x^2/y)} \\
\partial_2^2 b(x,y) &= 2x^2\frac{y\cos(x^2/y)+x^2\sin(x^2/y)}{y^4\cos^3(x^2/y)} \\
\partial_{12} b(x,y) &= -2x\frac{y\cos(x^2/y)+2x^2\sin(x^2/y)}{y^3\cos^3(x^2/y)}.
\end{aligned}$$

(c) $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto c(x,y) := x^y$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned} \partial_1 c(x,y) &= x^{y-1} & \partial_2 c(x,y) &= x^y \ln^2(x) \\ \partial_1^2 c(x,y) &= x^{y-2}(y^2 - y) & \partial_2^2 c(x,y) &= x^y \ln^2(x) \\ \partial_{12} c(x,y) &= x^{y-1}(1 + y\ln(x)) \end{aligned}$$

26. Legyen

$$\Xi(x,y) := \ln(x) \quad H(x,y) := \ln(y + \sqrt{1 = y^2}) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

A (Ξ, H) függvénypár invertálható, és inverze az

$$X(\xi,\eta) := \exp(\xi) \quad Y(\xi,\eta) := \mathrm{sh}(\eta) \quad ((\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$$

összefüggéssel értelmezett fügvénypár. Ezekkel $z =: u \circ (\Xi, H)$, vagyis $u =: z \circ (X, Y)$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint (globális alakban) ezt kapjuk: $z' = u' \circ (\Xi, H).(\Xi, H)'$, aminek megszokottabb (lokális) alakja:

$$(\partial_1 z(x,y), \partial_2 z(x,y)) = (\partial_1 u(\ln(x), \ln(y+\sqrt{1+y^2}), \partial_2 u(\ln(x), \ln(y+\sqrt{1+y^2})) \cdot \begin{matrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{matrix} =$$

Mivel innen

$$x\partial_1 z(x,y) = \partial_1 u(\ln(x), \ln(y+\sqrt{1+y^2}) \quad \sqrt{1+y^2}\partial_2 z(x,y)) = \partial_2 u(\ln(x), \ln(y+\sqrt{1+y^2})),$$

ezért az eredeti egyenlet így **módosul/transzformálódik:**

$$\partial_1 u(\xi,\eta) + \partial_2 u(\xi,\eta) = \exp(\xi)\mathrm{sh}(\eta). \tag{9}$$

Részletesebben: az újonnan bevezetett u függvényre pontosan akkor áll fenn (9), amikor a z függvényre az (1).

27. Akkor, ha a vektorok valamely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nulla vektor, ha az együtthatók valamennyien nullák.

28. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

	Karakterisztikus polinom $\lambda \mapsto$	Sajátértékek	Sajátvektorok
(a)	$\lambda - \lambda^3$	-1	$(-1, -1, 2)$
		1	$(-1, 0, 1)$
		0	$(-1, -1, 1)$
(b)	$5 - 4\lambda + \lambda^2$	$2 + i$	$(2 + i, 1)$
		$2 - i$	$(2 - i, 1)$
(c)	$4 - 3\lambda^2 - \lambda^3$	-2	$(-1, 0, 1)$
		-2	$(-1, 1, 0)$
		1	$(1, 1, 1)$
(d)	$6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$	3	$(1, 0, 1)$
		2	$(1, 1, 1)$
		1	$(0, 1, 1)$

A (c) esetben a kétszeres sajátértékhez találtunk két lineárisan független sajátvektort. Keressünk példát arra az esetre, amikor egy kétszeres sajátértékhez nem létezik két lineárisan független sajátvektor.

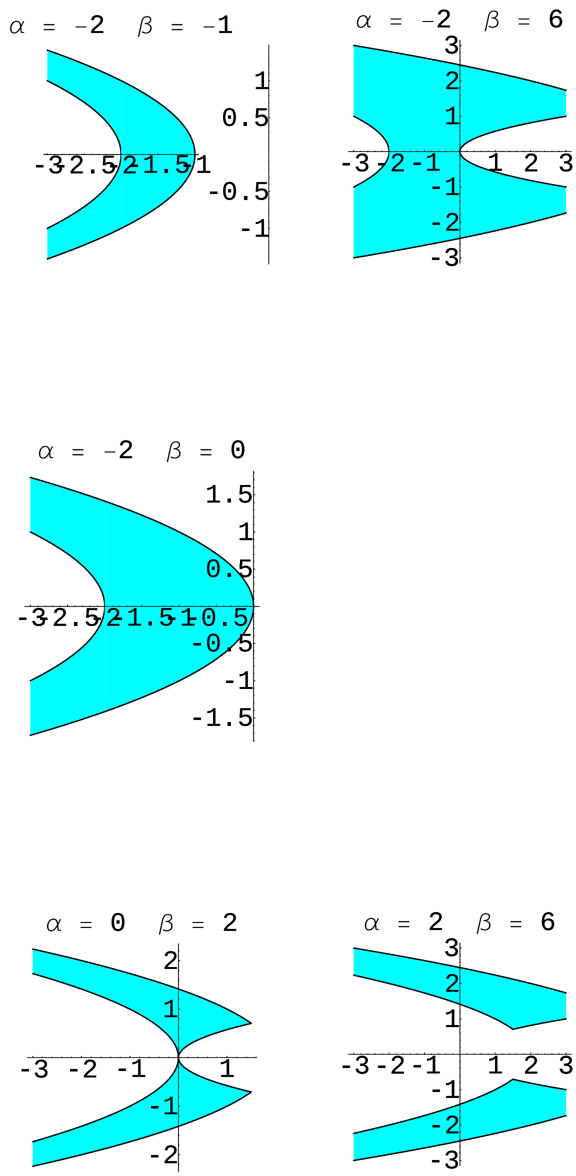
29. Az egyenletrendszer két egyenletét tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén összeadva kapjuk, hogy: $5d_2(t)\exp(-3t) = 1 + 4t + \frac{3}{2}t^2$, ahonnan

$$d_2(t) = \frac{\exp(3t)}{10}(2 + 8t + 3t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezt felhasználva akár az első, akár a második egyenletből adódik:

$$d_1(t) = \frac{\exp(-2t)}{5}(-1 - 4t + 6t^2)) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Némi nehézséget annak megértése szokott okozni ennél a feladatnál, hogy (3) **minden** $t \in \mathbb{R}$ **esetén** egy-egy lineáris algebrai egyenletrendszer.



5. ábra. A H halmaz α és β különféle értékeinél