

Differenciálegyenletek feladatgyűjtemény

Tóth János, Simon L. Péter, Csikja Rudolf

Tartalomjegyzék

Előszó	1
Jelölések	2
1. Bevezető feladatok	5
2. Alapok	10
2.1. Elemi kvalitatív vizsgálat	10
2.2. Elemi kvantitatív vizsgálat	11
2.3. Alapfogalmak	11
3. Néhány egyszerű típus	13
3.1. Közvetlenül integrálható egyenletek	13
3.2. Autonóm egyenletek	14
3.3. Szétválasztható változójú egyenletek	15
3.4. Elsőrendű lineáris egyenletek	15
4. Lineáris differenciálegyenletek	17
5. Magasabbrendű egyenletek	19
5.1. Kezdetiérték-feladatok	19
5.2. Lineáris peremérték-feladatok	22
6. Laplace-transzformáció	23
7. A stabilitás elmélet elemei	25
7.1. Lineáris rendszerek	25
7.1.1. Elmélet	25
7.1.2. Feladatok	29
8. Nemlineáris rendszerek	32
8.1. Lokális vizsgálat az egyensúlyi pontok körül	32

TARTALOMJEGYZÉK	2
8.1.1. Elmélet	32
8.1.2. Feladatok	36
8.2. Globális vizsgálat a síkon	39
8.2.1. Elmélet	39
8.2.2. Feladatok	44
9. Parciális differenciálegyenletek	46
10. Variációszámítás	50
11. Közelítő megoldások	52
12. Bevezető feladatok	54
13. Alapok	69
13.1. Elemi kvalitatív vizsgálat	69
13.2. Elemi kvantitatív vizsgálat	71
13.3. Alapfogalmak	72
14. Néhány egyszerű típus	76
14.1. Közvetlenül integrálható egyenletek	76
14.2. Autonóm egyenletek	79
14.3. Szétválasztható változójú egyenletek	84
14.4. Elsőrendű lineáris egyenletek	88
15. Lineáris differenciálegyenletek	92
16. Magasabbrendű egyenletek	101
16.1. Kezdetiérték-feladatok	101
16.2. Lineáris peremérték-feladatok	109
17. Laplace-transzformáció	111
18. A stabilitás elmélet elemei	116
18.1. Lineáris rendszerek	116
19. Nemlineáris rendszerek	130
19.1. Lokális vizsgálat az egyensúlyi pontok körül	130
19.2. Globális vizsgálat a síkon	152
20. Parciális differenciálegyenletek	178
21. Variációszámítás	190

TARTALOMJEGYZÉK	3
22.Közelítő megoldások	196
Irodalomjegyzék	210

Előszó

A jelen feladatgyűjtemény célja, hogy a Tóth–Simon könyv [26] használói számára gyakorlási lehetőséget nyújtson. Hosszú idő óta mindössze három, sok oktató által ismert és kedvelt példatár van forgalomban: Bege Antal [1], Farkas Miklós [2] és Filippov [4] gyűjteménye, ezek azonban korlátozott körben érhetők csak el.

Itt arra törekedtünk, hogy rutinfeladatok tömege helyett minél több (akár könnyű) gondolkodtató feladatot adjunk, mert egyrészt ezeket fontosabbnak tartjuk, másrészt pedig a számolásokat ma már (szimbolikusan vagy numerikusan) matematikai programcsomagokkal (amilyen például a Mathematica vagy a Maple) szokás elvégeztetni. Az így kapott eredmények értelmezéséhez és diszkussziójához azonban a fogalmak világos ismeretére van szükség.

Igyekezünk néhány ábrát is készíteni, ezek sokszor segítik a megértést. Adtunk alkalmazási feladatokat is.

A feladatok összeállításához az Irodalomjegyzékben felsorolt könyvekre és jegyzetekre erősen támaszkodtunk. Köszönettel tartozunk azoknak a kollégáinknak is, akik velünk együtt részt vettek a témakör oktatásában, ők: Karátson János, Kovács Ervin, Kupai József Attila, Mayer Zsuzsa, Nagy Ilona, illetve korábbi munkatársaink, akiket a tankönyv előszavában említettünk meg. Végül, de nem utolsó sorban megemlítjük, hogy lektorunk, Székely László számos hibát segített kiküszöbölni, a fennmaradókért természetesen mi vagyunk a felelősek. Kérjük az Olvasót, segítsen ezeket megtalálni, s egyéb megjegyzéseivel is járuljon hozzá a feladatgyűjtemény javításához és bővítéséhez.

Budapest, 2013. ősz

Tóth János, Simon L. Péter, Csikja Rudolf

Jelölések

$]a, b[$	$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén az $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ nyílt intervallum
\bar{A}	Az A halmaz lezártja
A^B	A B halmazon értelmezett, A -beli értékeket fölvevő függvények halmaza
$c(\cdot)$	tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto c(x) \in \mathbb{R}$ állandó függvény
\mathbb{C}	a komplex számok halmaza
\mathbb{C}^N	az N -dimenziós komplex vektorok halmaza
$\mathbb{C}^{N \times N}$	az $N \times N$ -es komplex elemű mátrixok halmaza
$\mathcal{C}(A, B)$	az A halmazon értelmezett, B halmazba képező folytonos függvények halmaza
$\mathcal{C}^N(A, B)$	az A halmazon értelmezett B halmazba képező, N -szer folytonosan differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{C}^N(A)$	az A halmazon értelmezett, valós értékű, N -szer folytonosan differenciálható függvények halmaza
$\det(A)$	Az A mátrix determinánusa
\mathcal{D}_f	az f függvény értelmezési tartománya
∂T	a T tartomány határa
$\partial_i f$	az f függvény i -edik változó szerinti parciálisderivált-függvénye
e_n	a standard bázis n -edik eleme
$f _A$	az f függvény leszűkítése az A halmazra; $\mathcal{D}_{f _A} := \mathcal{D}_f \cap A$
$(f, g)(x)$	$:= (f(x), g(x))$, ha $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
id	a valós számok identitásfüggvénye
$\text{Im}(z)$	a z komplex szám képzetes része
$\text{int}(\Sigma)$	a Σ halmaz belső pontjainak halmaza
$J \pm \{\tau\}$	a $J \subset \mathbb{R}$ valós számhalmaz és a $\tau \in \mathbb{R}$ valós szám elemenkénti összege, illetve különbsége; $:= \{x \in \mathbb{R}; x \mp \tau \in J\}$

$\ker(A)$	az A lineáris leképezés magtere
$\mathcal{K}_\rho(a)$	az a pont ρ sugarú (nyílt) környezete
$\lim_a f$	vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ az f függvény határértéke az a helyen
\mathbb{N}	a természetes (itt: pozitív egész) számok halmaza
\mathbb{N}_0	a nemnegatív egész számok halmaza
pr_1	vetítés az első tengelyre
pr_2	vetítés a második tengelyre
pr_i	vetítés az i -edik tengelyre
\mathbb{Q}	a racionális számok halmaza
$\text{rank}(A)$	az A mátrix rangja
$\text{Re}(z)$	a z komplex szám valós része
\mathbb{R}	a valós számok halmaza
\mathbb{R}^N	az N -dimenziós valós vektorok halmaza
$\mathbb{R}^{N \times N}$	az $N \times N$ -es valós elemű mátrixok halmaza
\mathbb{R}^-	a negatív valós számok halmaza
\mathbb{R}^+	a pozitív valós számok halmaza
$\overline{\mathbb{R}^+}$	$:= \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$
\mathbb{R}_0^+	a nemnegatív valós számok halmaza
\mathcal{R}_f	az f függvény értékkészlete
$\text{span}(A)$	az A vektorhalmaz elemei által kifeszített lineáris tér
$\langle u, v \rangle$	az u és a v vektor skaláris szorzata
$\text{tr}(A)$	az A mátrix nyoma $:= \sum_i a_{ii}$
\mathbb{Z}	az egész számok halmaza

1. fejezet

Bevezető feladatok

Az alábbiakban az elemi analízis néhány olyan fogalmát és tételét ismételjük át – többnyire példákon keresztül – amelyek szükségesek a differenciálegyenletek tanulmányozásához. Akinek valamelyik feladat megoldása vagy megoldásának megértése gondot okoz, az forduljon az analízis, vagy a lineáris algebra valamelyik tankönyvéhez.

1.1. Feladat (Megoldás) Legyen $y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x \in D_y$ mellett: $(\text{id}, y)(x)$, $(y \circ \text{id})(x)$, $(\text{id} \circ y)(x)$.

1.2. Feladat (Megoldás) Legyen $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x, y \in D_f$ mellett: $(f \circ \text{pr}_1)(x, y)$, $(f \circ \text{pr}_2)(x, y)$.

1.3. Feladat (Megoldás) Legyen $g = (h, k) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tetszőleges függvény. Számoljuk ki tetszőleges $x \in D_g$ mellett: $(\text{pr}_1 \circ g)(x)$, $(\text{pr}_2 \circ g)(x)$.

1.4. Feladat (Megoldás) Legyen $\tau \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tekintsük nyílt intervallumok tetszőleges olyan H halmazát, amelynek minden eleme tartalmazza a τ pontot. Bizonyítsuk be, hogy $\cup H$ nyílt intervallum, és tartalmazza a τ pontot.

1.5. Feladat (Megoldás) Legyen tetszőleges $a \in \mathbb{R}^+$ mellett $y_a(x) := \exp(-2x)$ ($x \in]0, a[$). Számítsuk ki: $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} y_a$.

1.6. Feladat (Megoldás) Legyen $z_a(t) := a \exp(-t)$ ($t \in \mathbb{R}$). Számítsuk ki: $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} z_a$.

1.7. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni \xi \mapsto \frac{1}{\xi}$ függvény összes szigorúan monoton leszűkítését.

1.8. Feladat (Megoldás) Mit mond ki Newton II. axiómája?

1.9. Feladat (Megoldás) Lehet-e egy függvény deriváltfüggvénye

1. az előjelfüggvény?
2. a Heaviside-féle egységugrás-függvény?

1.10. Feladat (Megoldás) Számítsuk ki a deriváltját (hol van értelmezve, hol deriválható?):

1. $x \mapsto \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$,
2. $t \mapsto \frac{L}{\frac{L - m_0}{m_0} \exp(-\lambda Lt) + 1}$ ($L, m_0, \lambda \in \mathbb{R}^+$ rögzített).

1.11. Feladat (Megoldás) Számítsuk ki az első három deriváltját:

1. $t \mapsto y(-\exp(t))$ ($y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R})$),
2. $s \mapsto z(\cos(s))$ ($z \in \mathcal{C}^3([0, 1], \mathbb{R})$).

1.12. Feladat (Megoldás) Igaz-e, hogy ha egy kétszer deriválható függvény

1. deriváltja mindenütt nulla, akkor a függvény állandó?
2. deriváltja mindenütt pozitív, akkor a függvény szigorúan monoton növekedő?
3. második deriváltja mindenütt negatív, akkor a függvény (alulról) konkáv?

1.13. Feladat (Megoldás) Hol értelmezhető és mi a deriváltfüggvénye az alábbi függvény inverz függvényének: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x + \ln(x)$?

1.14. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \varphi(t) := \operatorname{ch}(t) \quad \text{és} \quad \mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \psi(t) := \operatorname{sh}(t),$$

akkor a φ, ψ függvenypár egy valós-valós y függvény paraméteres megadásának tekinthető, azaz $y := \psi \circ \varphi^{-1}$ függvényt definiál. Határozzuk meg az y függvény értelmezési tartományát, és – ahol deriválható, ott – számítsuk ki a deriváltfüggvényét.

1.15. Feladat (Megoldás) Igazoljuk, hogy az

$$y(x) := \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } -6 \leq x \leq 0, \\ -\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2, & \text{ha } x \leq -6 \end{cases}$$

összefüggéssel értelmezett függvény folytonosan deriválható. Számítsuk ki az y' és a $\sqrt{|y|}$ függvényt.

1.16. Feladat (Megoldás)

- Végezzünk teljes függvényvizsgálatot: $p \mapsto 2(p-1) + \exp(-p)$.
- Legyen $A, B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, és vizsgáljuk a $\varphi \mapsto Ae^{-\lambda\varphi} - Be^{-\mu\varphi}$ függvényt.

1.17. Feladat (Megoldás) Hogyan szól (pontosan!) a Newton–Leibniz-tétel?

1.18. Feladat (Megoldás) Legyen $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto V(x, y) := x^2 + y^2$, és

- $\varphi(t) := \text{ch}(t)$, $\psi(t) := \text{sh}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$);
- $\varphi(t) := \cos(t)$, $\psi(t) := \sin(t)$ ($t \in \mathbb{R}$).

Számítsuk ki mindkét esetben a $V \circ (\varphi, \psi)$ összetett függvény deriváltfüggvényét.

1.19. Feladat (Megoldás) Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele határozatlan integrálokra, és mit mond ki határozott integrálokra?

1.20. Feladat (Megoldás) Legyen $u(p) := 3 \exp(p+1)$ ($p \in \mathbb{R}$) és $f(p, q) := q$ ($(p, q) \in \mathbb{R}^2$). Igazoljuk, hogy

$$u = 3 + \int_{-1}^{\cdot} f \circ (\text{id}, u).$$

1.21. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az alábbi függvények 1 pontban eltűnő (:=nulla értéket fölvevő) primitív függvényét:

- $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ ($x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$),
- $\mathbb{R} \ni k \mapsto \cos^3(k) \sin(k)$.

1.22. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az alábbi függvények -2 pontban eltűnő integrálfüggvényét:

1. sign ,
2. $t \mapsto \cos(t) \sin^4(t)$.

Ezek közül melyik primitív függvénye valamely függvénynek?

1.23. Feladat (Megoldás) Adjunk elégséges feltételt arra, hogy egy integrálfüggvény megfeleljen primitív függvénynek.

1.24. Feladat (Megoldás) Számítsuk ki az alábbi függvény elsőrendű parciálisderivált-függvényeit:

$$(x, y) \mapsto u(x, y) := \varphi(x + y^2) \ln(3y^2 - x),$$

φ tetszőleges deriválható függvény. Ha φ értelmezési tartománya az $]\alpha, \beta[$ nyílt intervallum ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha < \beta$), akkor melyik az a legbővebb halmaz a síkon, amely a fenti függvény értelmezési tartományának vehető?

1.25. Feladat (Megoldás) Számítsuk ki az alábbi képletekkel értelmezett függvények összes első- és másodrendű parciálisderivált-függvényét (előtte: értelmezési tartomány):

$$\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \text{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad x^y, \quad \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

1.26. Feladat (Megoldás) Tegyük fel, hogy (alkalmas halmazon)

$$x \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = xy.$$

Mit mondhatunk akkor az (alkalmas halmazon; hol?)

$$u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) := z(x, y)$$

összefüggéssel értelmezett u függvényről?

1.27. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ függvényre teljesül, hogy

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor az

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto w(x, y) := u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

összefüggéssel értelmezett w függvényre is fenáll, hogy

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

1.28. Feladat (Megoldás) Vannak-e az alábbi függvénypároknak primitív függvényeik? Ha igen, határozzuk meg közülük azt, amelyik az $(1, 1)$ pontban eltűnik.

1. $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy)),$

2. $(\mathbb{R}^+)^2 \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right),$

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$

1.29. Feladat (Megoldás) Mikor nevezzük vektorok egy halmazát lineárisan függetlennek?

1.30. Feladat (Megoldás) Számítsuk ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.31. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a minden $t \in \mathbb{R}$ mellett értelmezett d_1, d_2 függvényekre:

$$\begin{aligned} -d_1(t) \exp(2t) + 4d_2(t) \exp(-3t) &= 1 + 4t, \\ d_1(t) \exp(2t) + d_2(t) \exp(-3t) &= \frac{3}{2}t^2. \end{aligned}$$

1.32. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

lineárisan függetlenek \mathbb{R} fölött, és lineárisan összefüggők \mathbb{C} fölött.

1.33. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ egyenlet gyökeinek valós része pontosan akkor negatív, ha $p, q > 0$.

1.34. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az \mathbb{R} fölötti \mathbb{C}^2 vektortér egy bázisát, és a \mathbb{C} fölötti \mathbb{C}^2 vektortér egy bázisát.

2. fejezet

Alapok

2.1. Elemi kvalitatív vizsgálat

2.35. Feladat (Megoldás) Vizsgáljuk meg annak az $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvénynek a tulajdonságait (szélsőérték, inflexiós pont, konvexitás, monoton növekedés, csökkenés), amelyre teljesül, hogy

$$y'(x) = y(x) - x^2 + 2x - 2.$$

2.36. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az $y'(x) = x^2 + y^2(x)$, $y(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldásának egyetlen inflexiós pontja van: az origó.

2.37. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha y megoldása az

$$y'(x) = \frac{1}{x^2 + y^2(x)}, \quad y(1) = 1$$

feladatnak (ahol a jobb oldal értelmezési tartománya $[1, +\infty[\times \mathbb{R}$), akkor

$$\lim_{+\infty} y \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$

2.38. Feladat (Megoldás) Tekintsük az $y'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y(x) + 2$ egyenletet az $\Omega :=]0, 4[\times]0, 8[$ halmazon. Adjuk meg az $\Omega \times \mathbb{R}$ halmaz (p, q, r) pontjainak néhány olyan részalmazát, amelyekre teljesül, hogy a (p, q) párok függvényt definiálnak, ott legyen ez a függvény $\eta: q = \eta(p)$, és fenáll még az is, hogy

1. $r \neq \eta'(q)$,
2. $r = \eta'(q)$.

(A második esetben tehát a differenciálegyenlet megoldását adjuk meg.)

2.2. Elemi kvantitatív vizsgálat

2.39. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ számokkal

$$y(x) := C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $y''(x) + y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

2.40. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ számokkal

$$y(x) := C_1 \operatorname{ch}(x) + C_2 \operatorname{sh}(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $y''(x) - y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

2.41. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ számokkal

$$y(x) := C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $y''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)y'(x) + \lambda_1 \lambda_2 y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

2.42. Feladat (Megoldás) Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen $C_1, C_2, n \in \mathbb{R}$ számokkal

$$y(x) := x^n (C_1 \cos(\ln(x)) + C_2 \sin(\ln(x))) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

akkor $x^2 y''(x) + (1 - 2n)x y'(x) + (1 + n^2)y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

2.43. Feladat (Megoldás) Legyen $\Omega := \mathbb{R}^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y'(x) = \sqrt[3]{9(y(x) - 2)^2}, \quad y(x_0) = 2$$

kezdetiérték-problémának egyaránt megoldása a

$$\varphi(x) := 2 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és a} \quad \psi(x) := \frac{1}{3}(x - x_0)^3 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény.

2.3. Alapfogalmak

2.44. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $y'(x) = y^2(x) + 2x - x^4$ és az $y'(x) = -y^2(x) - y(x) + 2x + x^2 + x^4$ egyenlet közös megoldásait.

2.45. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $y'(x) = \sin(xy(x))$ egyenlet origón áthaladó φ megoldását.

2.46. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az $y'(x) = -y(x)/x$, $y(1) = 1$ egyenletet a fokozatos közelítés (szukcesszív approximáció) módszerével.

2.47. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az $(y'(x))^2 = 1$ implicit differenciálegyenlet megoldása egyetlen kezdeti feltétel mellett sem egyértelmű, de nincs szinguláris megoldása. Határozzuk meg az egyenlet általános megoldását és adjuk meg az általános integrálját.

2.48. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az $yy'' + y'^2 = 0$ egyenletet.

2.49. Feladat (Megoldás) Írjuk fel az $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-problémával egyenértékű integrálegyenletet.

2.50. Feladat (Megoldás) Tekintsük az $\dot{x}(t) = x^2(t)/t$ egyenletet az $\Omega := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ halmazon. Határozzuk meg az $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételhez tartozó teljes megoldás értelmezési tartományát.

2.51. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $\dot{x}(t) = x^2(t)t$, $x(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma teljes megoldásának értelmezési tartományát.

2.52. Feladat (Megoldás) Mutassunk arra példát, hogy nem folytonos jobb oldal esetén az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ differenciálegyenlet és a „neki megfelelő”

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

integrálegyenlet nem ekvivalens.

2.53. Feladat (Megoldás) Legyen $\Omega :=]-1, 1[\times]-1, 1[$ és legyen $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \Omega$. Igazoljuk, hogy bár $\partial_2 f$ nem folytonos, mégis elegendő tesz második változójában a Lipschitz-feltételnek.

2.54. Feladat (Megoldás) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon, $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$, és tegyük fel, hogy f második változójában kielégíti a lokális Lipschitz-féle feltételt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges $(x_0, y_0) \in \Omega$ esetén az

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték-problémának legfeljebb egy megoldása van.

3. fejezet

Néhány egyszerű típus

3.1. Közvetlenül integrálható egyenletek

3.55. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $y'(x) = 1/(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$ differenciálegyenlet lehetséges megoldásait.

3.56. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az $\dot{z}(t) = 1/(2 + 3t^2)$ differenciálegyenletet.

3.57. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg a $\varphi'(r) = 1/(2 - 3r^2)$ differenciálegyenlet lehetséges megoldásait.

3.58. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az $u'(p) = 1/\sqrt{2 - 3p^2}$ differenciálegyenletet.

3.59. Feladat (Megoldás) Adjuk meg a $z'(\xi) = 1/\sin(\xi)$ differenciálegyenlet lehetséges megoldásait.

3.60. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az $x'(y) = (1 + y)/(1 - y)$ differenciálegyenlet lehetséges megoldásait.

3.61. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a $\varphi'(r) = r^2/(1+r)$ differenciálegyenletet.

3.62. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a $p'(s) = 1/((s - 1)(s + 3))$ differenciálegyenletet.

3.63. Feladat (Megoldás) A szobába beropült két hógolyó, az egyik sugara éppen kétszer akkora mint a másiké. Tudjuk, hogy az olvadás sebessége egyenesen arányos a felülettel. Mekkora lesz a nagyobbik hógolyó abban a pillanatban, amikor a kisebbik teljesen elolvad?

3.2. Autonóm egyenletek

3.64. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az $y'(x) = \sqrt[3]{y^2(x)}$, $y(0) = 2$ kezdetiérték-problémát.

3.65. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a $z'(x) = 10^{x+z(x)}$ differenciálegyenletet.

3.66. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $y'(x) = \cos(y(x) - x)$ differenciálegyenlet összes megoldását.

3.67. Feladat (Megoldás) A kemencéből kivett kenyér 10 perc alatt 100°C -ról 60°C -ra hűlt le. A környező levegő hőmérséklete 20°C , Mikorra hűl le a kenyér 25°C hőmérsékletre?

3.68. Feladat (Megoldás) A 10 liter vizet tartalmazó edénybe literenként 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/min sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel, és a keverék ugyanilyen sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?

3.69. Feladat (Megoldás) Egy kőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje $4.5 \cdot 10^9$ év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a kőzet korát.

3.70. Feladat (Megoldás) A 200 m^3 térfogatú szobában 0.15 % szén-dioxid gáz van. A ventilátor percenként 20 m^3 0.04 % széndioxidot tartalmazó levegőt fúj be. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében lévő széndioxid mennyisége a harmadára?

3.71. Feladat (Megoldás) Írjuk le az ejtőernyős mozgását, feltéve, hogy a légellenállás egyenesen arányos a sebesség négyzetével.

3.72. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $y' = 1 + y^2$ differenciálegyenlet azon (teljes) megoldásának értelmezési tartományát, amely áthalad a

1. $(\pi/4, 1)$ ponton,
2. $(2\pi, 1)$ ponton.

3.73. Feladat (Megoldás) A folyadékcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog. Határozzuk meg a gömb alakú folyadékcsepp sugarát, mint az idő függvényét.

3.74. Feladat (Megoldás) Mekkora lesz az $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ reakcióban a C anyag keletkezésének sebessége abban az időpontban, amikor a B anyag koncentrációja a maximumát veszi fel?

3.3. Szétválasztható változójú egyenletek

3.75. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $x^2y'(x) - \cos(2y(x)) = 1$ differenciálegyenletnek azt a megoldását, amelyre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{9\pi}{4}.$$

3.76. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg a $3y^2(x)y'(x) + 16x = 2xy^3(x)$ differenciálegyenletnek azt a megoldását, amely a jobb félegyenesen korlátos.

3.77. Feladat (Megoldás) Mennyi idő alatt folyik ki az összes víz az 1.8 m átmérőjű és 2.45 m magasságú függőleges hengerből a fenekén lévő 6 cm átmérőjű lyukon keresztül? (A h vízszint mellett a kifolyási sebesség: $0.6\sqrt{2gh}$, ahol g a nehézségi gyorsulás.)

3.78. Feladat (Megoldás) Vezessük vissza az $y(x)f(xy(x)) + xg(xy(x))y'(x) = 0$ egyenletet az $u(x) = xy(x)$ helyettesítéssel szétválasztható változójúra.

3.79. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg azokat az $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^+)$ függvényeket, amelyekre

$$\left(\int_0^x f \right)^2 = f(0)x^2f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

teljesül.

3.80. Feladat (Megoldás) Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum; $\tau \in I$, $\xi \in J$; $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^+)$. Ekkor az $\dot{x}(t) = g(t)h(x(t))$, $x(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma teljes megoldása

$$J_2 + \{\tau\} \ni t \mapsto \left(\int_{\xi} \frac{1}{h} \right)^{-1} \circ \int_{\tau}^t g,$$

ahol $J_2 := \{t \in I; \int_{\tau}^t g \in \mathcal{R}_{f_{\xi} \frac{1}{h}}\}$. Bizonyítsuk be, hogy a J_2 halmaz nem üres nyílt intervallum.

3.4. Elsőrendű lineáris egyenletek

3.81. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az $x^2 + xy'(x) = y(x)$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását.

3.82. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az $y'(x) - y(x) \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^3(x)}$, $y(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását.

3.83. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az $y'(x) - y(x) = -2e^{-x}$ egyenletnek azt a megoldását, amelyre $\lim_{+\infty} y = 0$.

3.84. Feladat (Megoldás) Adjuk meg az $x^2 y'(x) + y(x) = (x^2 + 1)e^x$ egyenlet azon megoldását, melyre $\lim_{-\infty} y = 1$.

3.85. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg az $(x + y(x))y'(x) = y^2(x)$ egyenletet az első síknegyedben.

3.86. Feladat (Megoldás) Keressük meg az összes $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ függvényt, amelyre

$$x \int_0^x \varphi(t) dt = (x + 1) \int_0^x t \varphi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

3.87. Feladat (Megoldás) Adjuk meg a $\sin(x)y'(x) + \cos(x)y(x) = 1$ implicit egyenlet két olyan megoldását, amelyre $y(\pi/2) = 3$, illetve $\lim_0 y = 1$.

4. fejezet

Lineáris differenciálegyenletek

4.88. Feladat (Megoldás) Legyen $N \in \mathbb{N}$, $J \subset \mathbb{R}$ intervallum, és legyenek az $f_1, f_2, \dots, f_N : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvények négyzetesen integrálhatók. Bizonyítsuk be, hogy ezek a függvények pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha

$$\det \begin{pmatrix} \int_J f_1^2 & \int_J f_1 f_2 & \cdots & \int_J f_1 f_N \\ \int_J f_2 f_1 & \int_J f_2^2 & \cdots & \int_J f_2 f_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_J f_N f_1 & \int_J f_N f_2 & \cdots & \int_J f_N^2 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4.1)$$

4.89. Feladat (Megoldás) Legyen J nyílt intervallum, és legyen $N \in \mathbb{N}$ rögzített, továbbá legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^{N \times N})$. Mutassuk meg, hogy az $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ ($t \in J$) egyenlet alapmátrixa $\Psi(\tau, t) := \exp(\int_\tau^t \mathbf{A})$ (tetszőleges $\tau \in J$ számmal), feltéve, hogy

$$\forall t \in J : \mathbf{A}(t) \cdot \int_\tau^t \mathbf{A} = \int_\tau^t \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}(t). \quad (4.2)$$

4.90. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az előző feladat feltételei mellett (4.2) egyenértékű a következő feltétellel:

$$\forall s, t \in J : \mathbf{A}(s)\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{A}(s). \quad (4.3)$$

4.91. Feladat (Megoldás) Melyek azok az $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^{2 \times 2})$ mátrixok, amelyekre (4.3) teljesül?

4.92. Feladat (Megoldás) Legyenek az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mátrix sajátértékei a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ számok $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ multiplicitásokkal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlet alaprendszere

$$t \mapsto e^{\lambda_i t} \frac{t^m}{m!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^m \mathbf{w}_i \quad (m = 0, 1, \dots, \mu_i - 1; i = 1, 2, \dots, s),$$

ahol $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$ az $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{\mu_i} \mathbf{w} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldása.

Határozzuk meg az alábbi lineáris rendszerek, illetve a kezdetiérték-problémák megoldását.

4.93. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 5x - y, \dot{y} = 10x - y, x(0) = 0, y(0) = 3.$

4.94. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 8x + 5y, \dot{y} = -10x - 2y, x(0) = 0, y(0) = 1.$

4.95. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x + y, \dot{y} = 4y - 2x, x(0) = 0, y(0) = -1.$

4.96. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 8y, \dot{y} = -2z, \dot{z} = 2x + 8y - 2z, x(0) = -4, y(0) = 0, z(0) = 1.$

4.97. Feladat (Megoldás) $\ddot{x} = 2x - 3y, \ddot{y} = x - 2y.$

4.98. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = -x, x(0) = 0, y(0) = 1.$

Határozzuk meg az alábbi inhomogén lineáris rendszerek, illetve az adott kezdetiérték-probléma megoldását.

4.99. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t) + y(t) + 1, \dot{y}(t) = 4y(t) - 2x(t) - 2, x(0) = 0, y(0) = 0.$

4.100. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = -5y(t) - 10, \dot{y}(t) = x(t) - 2y(t), x(0) = 0, y(0) = 0.$

4.101. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t) - y(t) + 6, \dot{y}(t) = y(t) - 4x(t) - 12, x(0) = -2, y(0) = 4.$

4.102. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = y(t) + 2e^t, \dot{y}(t) = x(t) + t^2, x(0) = 1, y(0) = 1.$

4.103. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = y(t) + tg^2(t) - 1, \dot{y}(t) = -x(t) + tg(t), x(0) = 1, y(0) = 3.$

5. fejezet

Magasabbrendű egyenletek

5.1. Kezdetiérték-feladatok

5.104. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az $y''(x) - x^2y(x) = 0$ egyenlet $\lambda^2 - x^2 = 0$ „karakterisztikus egyenletének” segítségével fölírt $x \mapsto \varphi(x) := c_1e^{x^2} + c_2e^{-x^2}$ függvények az egyenletnek nem megoldásai, hacsak $c_1^2 + c_2^2 > 0$.

5.105. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 0$ egyenlet általános megoldását, felhasználva, hogy $\mathbb{R} \ni x \mapsto \varphi(x) := e^x$ megoldás.

5.106. Feladat (Megoldás) Egy eredetileg 100 kg össztömegű kis vitorlást 50 Newton erővel fúj a szél előre. A víz fékező ereje arányos a vitorlás aktuális össztömegével, az arányossági tényező k_1 . A vitorlásba léket fűrtak, amin az össztömeggel arányos sebességgel áramlik be a víz, az arányossági tényező $k_2 = 2$. A hajó gyorsulása álló helyzetből indulva 1 perc múlva fordul lassulásba. Mennyi k_1 értéke és mértékegysége? (Feltételezzük, hogy a hajó a kísérlet ideje alatt nem telik meg.) És ha azt tudjuk, hogy 1 perc múlva nem a gyorsulás, hanem a sebesség nulla?

Határozzuk meg az alábbi (lineáris, állandó együtthatós) másodrendű egyenletek általános megoldását.

5.107. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 9x(t) = 0$.

5.108. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$.

5.109. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 6x(t) = 0$.

5.110. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 7x(t) = 0$.

5.111. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 25x(t) = 0$.

Írjuk át az alábbi lineáris rendszereket másodrendű egyenletté, majd oldjuk meg a kapott egyenletet.

5.112. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = \omega y, \dot{y} = -\omega x$, ahol $\omega \in \mathbb{R}$.

5.113. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = -bx + ay$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

5.114. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = \mu x + y, \dot{y} = \mu y$, ahol $\mu \in \mathbb{R}$.

Határozzuk meg az alábbi inhomogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását. (A partikuláris megoldás meghatározásához használhatjuk a próbafüggvény módszerét.)

5.115. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 3x(t) = -9$.

5.116. Feladat (Megoldás) $2\ddot{x}(t) + x(t) = 9e^{2t}$.

5.117. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - x(t) = 3e^{-2t}$.

5.118. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = -2t^3 - 3t^2 + 8t + 1$.

5.119. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 6x(t) = te^t$.

5.120. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 9x(t) = t^2 + e^t$.

5.121. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) + 9x(t) = 3 \sin(3t)$.

5.122. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) - 5x(t) = 2e^{-t}$.

5.123. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{-t} \cos(t)$.

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat.

5.124. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, x(0) = 2, \dot{x}(0) = 1$.

5.125. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$.

5.126. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, x(\pi) = e^\pi, \dot{x}(\pi) = 0$.

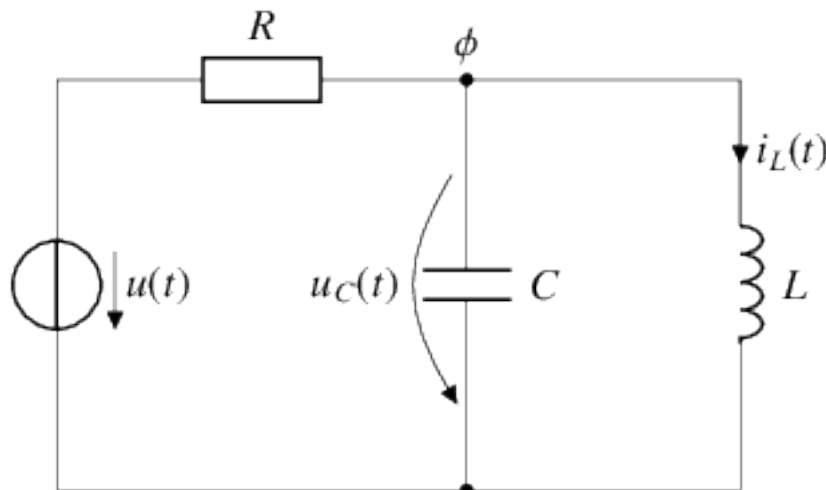
5.127. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1, x(0) = 5, \dot{x}(0) = 1$.

5.128. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1 + 14e^{-t}$, $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 1$.

5.129. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = 3 + 2\cos(t)$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

5.130. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az $\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szélsőértékeit $t \geq 0$ és $0 < \xi < 1$ esetén.

5.131. Feladat (Megoldás) Határozza meg az 5.1. ábrán látható áramkörben a kondenzátor u_C feszültségének és a tekercs i_L áramának időbeli alakulását, ha $u(t) = 10$ V konstans, illetve ha $u(t) = 10 \cos(2t)$ V. Az áramkör elemeinek értékei $R = 0.5$ k Ω , $C = 1$ μ F és $L = 0.1$ H.



5.1. ábra. RLC-áramkör sematikus rajza

5.132. Feladat (Megoldás) Jelöljük egy lengőajtónak a – nyugalmi állapothoz képest bezárt – szögét a t időpontban $\theta(t)$ -vel. Az ajtó lengésének dinamikáját a $I\theta''(t) + b\theta'(t) + k\theta(t) = 0$ egyenlettel modellezzük, ahol $I > 0$ az ajtó – forgási tengelyéhez viszonyított – tehetetlenségi nyomatéka, $b > 0$ a súrlódási tényező és $k > 0$ rugóállandó.

Tegyük fel, hogy I és k rögzített, a b súrlódási tényezőt pedig egy állítócsavarral tudjuk változtatni. Hogyan válasszuk meg b értékét úgy, hogy az ajtó ne lengjen oda-vissza (ne oszcilláljon)?

5.2. Lineáris peremérték-feladatok

Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatokat.

5.133. Feladat (Megoldás) $y''(x) + y(x) = 1, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$

5.134. Feladat (Megoldás) $y''(x) + y(x) = 2x - \pi, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$

5.135. Feladat (Megoldás) $y'''(x) - y''(x) + 4y'(x) - 4y(x) = 0, y(0) = 1 + e^{\pi/2}, y(\pi/2) = 1 + e^{\pi/2}, y(\pi) = 2e^{\pi} + e^{\pi/2} - 1.$

5.136. Feladat (Megoldás) $y'''(x) - y''(x) + 4y'(x) - 4y(x) = 0, y(0) = y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0.$

5.137. Feladat (Megoldás) $y'''(x) - y''(x) + 4y'(x) - 4y(x) = 0, y(0) = e^{\pi/2} + 1, y(\pi/2) = e^{\pi/2} + 1, y(\pi) = e^{\pi/2} - 1.$

5.138. Feladat (Megoldás) $x^2y''(x) - 6y(x) = 0, y(1) = 2, y(2) = 33/4.$

5.139. Feladat (Megoldás) $x^2y''(x) - 6y(x) = 0, y(1) = 2$ és $0 \in \mathcal{D}_y.$

5.140. Feladat (Megoldás) $x^2y''(x) - 6y(x) = 0, 3y(1) + 5y'(1) = 7, 2y(2) + 4y'(2) = 6.$

6. fejezet

Laplace-transzformáció

Oldjuk meg Laplace-transzformáció segítségével az alábbi kezdetiérték-problémákat.

6.141. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t)$, $x(0) = 3$.

6.142. Feladat (Megoldás) $2\dot{x}(t) - x(t) = 0$, $x(0) = \frac{1}{2}$.

6.143. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) = -x(t)$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -2$.

6.144. Feladat (Megoldás) $2\dot{x}(t) + x(t) = e^{2t}$, $x(0) = 1$.

Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris rendszerekre vonatkozó kezdetiérték-problémákat Laplace-transzformáció segítségével.

6.145. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 3x(t) - 2y(t)$, $\dot{y}(t) = 2x(t) + 5y(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

6.146. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 3x(t)$, $\dot{y}(t) = x(t) + 3y(t)$, $x(0) = 4$, $y(0) = 2$.

6.147. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 3x(t) + y(t)$, $\dot{y}(t) = -x(t) + y(t)$, $x(0) = 4$, $y(0) = 2$.

6.148. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t) + 3y(t)$, $\dot{y}(t) = -x(t) + 5y(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Oldjuk meg az alábbi inhomogén egyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémákat Laplace-transzformáció segítségével.

6.149. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) + x(t) = 2te^{-t}$, $x(0) = 1$.

6.150. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t) - y(t) + 6$, $\dot{y}(t) = y(t) - 4x(t) - 12$, $x(0) = -2$, $y(0) = 4$.

6.151. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 4y(t) + 1$, $\dot{y}(t) = x(t) + t$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

6.152. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = -5y(t) - 10$, $\dot{y}(t) = x(t) - 2y(t)$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

6.153. Feladat (Megoldás) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1$, $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 1$.

Írjuk át az alábbi inhomogén lineáris rendszereket egy másodrendű egyenletté, majd a kapott kezdetiérték-problémát oldjuk meg Laplace-transzformáció segítségével. A kapott eredmény segítségével határozzuk meg az eredeti egyenlet megoldásait is.

6.154. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t) + 3y(t) + 8$, $\dot{y}(t) = x(t) - y(t)$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

6.155. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 7x(t) - 9y(t) + 8t^2$, $\dot{y}(t) = 9x(t) - 11y(t)$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

7. fejezet

A stabilitás elmélet elemei

7.1. Lineáris rendszerek

7.1.1. Elmélet

Tekintsük az $\dot{x} = Ax$ lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ahol A $n \times n$ méretű mátrix. A rendszer fázisképét a stabilis, instabilis és centrális alterek segítségével lehet jellemezni, ezek definícióját és legfontosabb tulajdonságait foglaljuk össze először. Jelölje a mátrix sajátértékeit multiplicitással $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Jelölje u_1, u_2, \dots, u_n azt a bázist \mathbb{R}^n -ben, amely a mátrix valós Jordan-normálformáját adja. Ezen bázis általános meghatározása hosszabb előkészítést igényel, azonban a leggyakoribb és a továbbiakban előforduló esetekben a bázis az alábbi módon egyszerűen meghatározható. Ha a sajátértékek valósak és különbözők, akkor ezek éppen a megfelelő sajátvektorok. Ha vannak komplex konjugált sajátérték párok, akkor az ezeknek megfelelő komplex sajátvektor valós és képzetes része van a bázisban. Többszörös sajátértékek esetén az általánosított sajátvektorok kerülnek a bázisba, ha a sajátalter dimenziója kisebb, mint a sajátérték algebrai multiplicitása. Ha például λ kétszeres sajátérték, de csak egydimenziós sajátalter tartozik hozzá, akkor az általánosított v sajátvektort az $Av = \lambda v + u$ egyenlet határozza meg, ahol u az egydimenziós sajátalteret kifeszítő sajátvektor. Megjegyezzük, hogy ekkor v olyan u -től független vektor, melyre $(A - \lambda I)^2 v = 0$, ugyanis $(A - \lambda I)^2 v = (A - \lambda I)u = 0$. Ezen bázis segítségével az alábbi módon definiálható lineáris rendszerek stabilis, instabilis és centrális altere.

7.1. Definíció *Legyen egy, az A valós normálalakját meghatározó bázis $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Jelölje λ_k azt a sajátértéket, amelyhez az u_k bázisvektor tartozik (u_k nem feltétlenül sajátvektor). Az*

$$E_s = \text{span}\{u_k : \text{Re}\lambda_k < 0\}, \quad E_u = \text{span}\{u_k : \text{Re}\lambda_k > 0\}, \quad E_c = \text{span}\{u_k : \text{Re}\lambda_k = 0\}$$

alttereket rendre az $\dot{x} = Ax$ lineáris differenciálegyenlet-rendszer stabilis, instabilis, centrális alterének nevezzük.

Ezek legfontosabb tulajdonságai az alábbi tételben foglalhatók össze.

7.2. Tétel Az E_s , E_u , E_c altterek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

1. $E_s \oplus E_u \oplus E_c = \mathbb{R}^n$.
2. Invariánsak A -ra (azaz $A(E_i) \subset E_i$, $i = s, u, c$), és $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén e^{At} -re.
3. Minden $p \in E_s$ esetén $e^{At}p \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow +\infty$, sőt, van olyan $K, \alpha > 0$, hogy $|e^{At}p| \leq Ke^{-\alpha t}|p|$, ha $t \geq 0$.
4. Minden $p \in E_u$ esetén $e^{At}p \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow -\infty$, sőt, van olyan $L, \beta > 0$, hogy $|e^{At}p| \leq Le^{\beta t}|p|$, ha $t \leq 0$.

Kétdimenziós rendszerek esetén az invariáns altterekkel való jellemzés tovább finomítható. Nevezetesen, ha kétdimenziós a stabilis vagy instabilis altér, akkor megkülönböztethetjük a csomó és a fókusz típusú fázisképet. A kétdimenziós fázisképek alábbi típusait vezetjük be a mátrix sajátértékeinek megfelelően.

7.3. Definíció Legyenek a 2×2 méretű A mátrix sajátértékei $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Az $\dot{x} = Ax$ rendszer

- stabilis csomó, ha λ_1, λ_2 valósak és $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$,
- instabilis csomó, ha λ_1, λ_2 valósak és $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$,
- elfajult stabilis csomó, ha λ_1, λ_2 valósak és $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, és a hozzájuk tartozó sajátaltér egydimenziós,
- elfajult instabilis csomó, ha λ_1, λ_2 valósak és $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, és a hozzájuk tartozó sajátaltér egydimenziós,
- nyereg, ha λ_1, λ_2 valósak és $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- stabilis fókusz, ha λ_1, λ_2 nem valósak és $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$,
- instabilis fókusz, ha λ_1, λ_2 nem valósak és $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$,
- centrum, ha $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$, azaz λ_1 és λ_2 tiszta képzetesek.

Megjegyezzük, hogy négy olyan elfajult fáziskép van, melyeknél nem csak az origó az egyensúlyi pont (azaz a mátrix determinánsa 0), de ezek nem kaptak nevet. Ezen esetek a következők:

- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0,$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0,$
- $\lambda_1 = 0 = \lambda_2,$ és a hozzájuk tartozó sajátaltér kétdimenziós,
- $\lambda_1 = 0 = \lambda_2,$ és a hozzájuk tartozó sajátaltér egydimenziós.

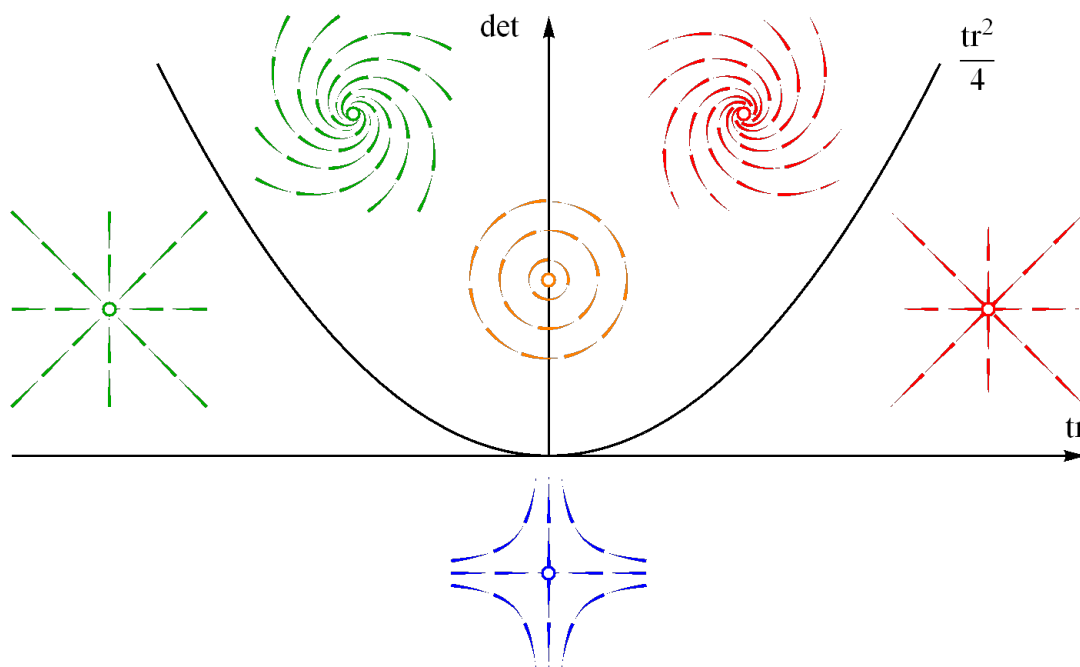
Érdemes észrevenni, hogy a fáziskép típusa a sajátértékek kiszámítása nélkül, pusztán a mátrix determinánsa (\det) és nyoma (tr) segítségével is meghatározható a következőképpen. A 2×2 méretű A mátrix sajátértékeit meghatározó karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - \text{tr} \lambda + \det = 0$. Tehát a sajátértékek

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm \sqrt{\text{tr}^2 - 4 \det} \right).$$

A képletből látható, hogy pontosan $\det < 0$ esetén lesznek a sajátértékek valósak és különböző előjelűek, azaz ekkor lesz a rendszer nyereg. Ha $\det > 0$, akkor a sajátértékek valós részének előjele megegyezik tr előjével. A sajátértékek pontosan akkor lesznek komplexek (pontosabban nem valósak), ha $\text{tr}^2 < 4 \det$. Tehát a következőképpen dönthető el a rendszer típusa a determináns és nyom ismeretében.

7.4. Lemma Jelölje a 2×2 méretű A mátrix determinánsát \det és nyomát tr . Az $\dot{x} = Ax$ rendszer

- *stabilis nem elfajult csomó*, ha $\text{tr}^2 > 4 \det$ és $\text{tr} < 0$,
- *instabilis nem elfajult csomó*, ha $\text{tr}^2 > 4 \det$ és $\text{tr} > 0$,
- *elfajult stabilis csomó*, ha $\text{tr}^2 = 4 \det$ és $\text{tr} < 0$,
- *elfajult instabilis csomó*, ha $\text{tr}^2 = 4 \det$ és $\text{tr} > 0$,
- *nyereg*, ha $\det < 0$,
- *stabilis fókusz*, ha $\text{tr}^2 < 4 \det$ és $\text{tr} < 0$,
- *instabilis fókusz*, ha $\text{tr}^2 < 4 \det$ és $\text{tr} > 0$,
- *centrum*, ha $\det > 0$ és $\text{tr} = 0$.

7.1. ábra. Az úgynevezett (tr, det) diagramm.

Az állítást az úgynevezett (tr, det) diagramm foglalja össze, melyet a 7.1 ábra mutat. Többdimenziós esetben különösen fontos eldönteni, hogy milyen feltételek mellett lesz az origó aszimptotikusan stabilis, azaz a stabilis altér n -dimenziós. Ez akkor következik be, amikor a karakterisztikus polinom minden gyöke negatív valós részű. Ennek eldöntésében segít a Routh-Hurwitz-kritérium.

7.5. Tétel (Routh–Hurwitz-kritérium) *Legyen $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ egy tetszőleges polinom. A p minden gyökének valós része pontosan akkor negatív, ha a (7.1) $n \times n$ -es mátrix pozitív definit, azaz főminorjai pozitívak.*

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

7.1.2. Feladatok

Határozzuk meg az alábbi A mátrixokhoz tartozó $\dot{x} = Ax$ lineáris rendszerek típusát, valamint stabil, instabil és centrális alterüket.

7.156. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

7.157. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

7.158. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.159. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7.160. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.161. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.162. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7.163. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.164. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.165. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.166. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7.167. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.168. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

7.169. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.170. Feladat (Megoldás) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Határozzuk meg a paraméter függvényében a megadott lineáris rendszer típusát azon paraméterértékekre, melyekre egy egyensúlyi pont van.

7.171. Feladat (Megoldás) $A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1+p \\ -1 & p \end{pmatrix}$

7.172. Feladat (Megoldás) $A(p) = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7.173. Feladat (Megoldás) $A(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos(p) & \sin(p) \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, $p \in [0, 2\pi]$

Határozzuk meg a paraméter(ek) függvényében az A mátrixszal megadott lineáris rendszer stabilis, instabilis és centrális alterének dimenzióját.

7.174. Feladat (Megoldás) $A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.175. Feladat (Megoldás) $A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-p & 1+p \end{pmatrix}$

7.176. Feladat (Megoldás) $A(p, q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ pq & -p+q-pq & 1+p+q \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az alábbi A mátrixokhoz tartozó $\dot{x} = Ax$ alakú négyváltozós lineáris rendszerek stabilis, instabilis és centrális alterét.

$$7.177. \text{ Feladat (Megoldás) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7.178. \text{ Feladat (Megoldás) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7.179. \text{ Feladat (Megoldás) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7.180. \text{ Feladat (Megoldás) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7.181. \text{ Feladat (Megoldás) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A Routh–Hurwitz-kritérium segítségével határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek nulla megoldásának stabilitását.

$$7.182. \text{ Feladat (Megoldás) } x^{(3)} + \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$$

$$7.183. \text{ Feladat (Megoldás) } x^{(3)} + 2\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$$

$$7.184. \text{ Feladat (Megoldás) } x^{(4)} + 2x^{(3)} + 4\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

$$7.185. \text{ Feladat (Megoldás) } x^{(4)} + 2x^{(3)} + 3\ddot{x} + 7\dot{x} + 2x = 0$$

7.186. Feladat (Megoldás) A Routh–Hurwitz-kritérium segítségével határozzuk meg, hogy az a és b paraméter mely értékeire lesz az $x^{(3)} + a\ddot{x} + b\dot{x} + 2x = 0$ differenciálegyenlet nulla megoldása aszimptotikusan stabilis.

7.187. Feladat (Megoldás) A Routh–Hurwitz-kritérium segítségével határozzuk meg, hogy az a paraméter mely értékeire lesz az $x^{(4)} + 2x^{(3)} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} + ax = 0$ differenciálegyenlet nulla megoldása aszimptotikusan stabilis.

8. fejezet

Nemlineáris rendszerek

8.1. Lokális vizsgálat az egyensúlyi pontok körül

8.1.1. Elmélet

Tekintsünk az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{8.1}$$

n -dimenziós autonóm rendszert. Ez általában képlettel nem oldható meg, így a legtöbb információt a megoldásokról a fáziskép szolgáltatja. Az $x(t) \equiv p$ konstans megoldásokat az $f(p) = 0$ algebrai egyenletrendszer megoldásával nyerhetjük. Ezen p pontokat nevezzük egyensúlyi, vagy stacionárius pontoknak. A trajektóriák viselkedése az egyensúlyi pontok kis környezetében linearizálással határozható meg. Ez szemléletesen a következőképpen magyarázható. Az $y(t) = x(t) - p$ függvényre a differenciálegyenlet

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(p) + f'(p)y(t) + r(y(t)) = f'(p)y(t) + r(y(t))$$

ahol r a maradéktagot jelöli. Mivel kis y esetén ez kisebb nagyságrendű, mint a lineáris tag (ha az nem túl kicsi, pl. nem zérus), azért várható, hogy a p egyensúlyi pont egy környezetében a fázisképet az

$$\dot{y}(t) = f'(p)y(t) \tag{8.2}$$

ún. linearizált egyenlet, melynek mátrixát **Jacobi-mátrix**nak nevezzük, határozza meg. Itt két dolgot kell pontosítani, egyrészt, hogy mi a nem túl kicsi lineáris tag, másrészt, hogy milyen értelemben határozza meg a fázisképet. Erre vonatkoznak az alábbi fogalmak és tételek. Jelölje a (8.1) rendszer $x(0) = p$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását $t \mapsto \varphi(t, p)$, ennek értelmezési tartományát $I(p)$.

8.1. Definíció A (8.1) rendszer $p \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontját **stabilisnak** nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\forall q \in \mathcal{D}_f, \quad |q - p| < \delta, \quad t \geq 0 \quad \text{esetén} \quad |\varphi(t, q) - p| < \varepsilon.$$

Az egyensúlyi pontot **aszimptotikusan stabilisnak** nevezzük, ha stabilis és q fenti választása mellett $t \rightarrow +\infty$ esetén $|\varphi(t, q) - p| \rightarrow 0$. Az egyensúlyi pontot **instabilisnak** nevezzük, ha nem stabilis.

Linearizálás segítségével a stabilitás következőképpen dönthető el.

8.2. Tétel

1. Ha az $A = f'(p)$ mátrix minden sajátértékének negatív a valós része, akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja a (8.1) rendszernek.
2. Ha az $A = f'(p)$ mátrixnak van pozitív valós részű sajátértéke, akkor p instabilis egyensúlyi pontja a (8.1) rendszernek.

A fenti tétel azon esetekre vonatkozik, amikor a stabilis altér n -dimenziós, illetve az instabilis altér legalább egy dimenziós. Ennél általánosabb állítás is megfogalmazható, mely szerint a stabilis, instabilis és centrális altérrel azonos dimenziós invariáns sokaságok léteznek a nem-lineáris rendszerben. Ezeket az állításokat nevezik stabilis, instabilis és centrális sokaság tételnek, ebben a jegyzetben azonban ezeket a tételeket nem tárgyaljuk.

Kétdimenziós rendszerek esetében a linearizálás segítségével a fáziskép pontosabban is jellemezhető. Ehhez először nemlineáris rendszerek egyensúlyi pontjaira is definiálni kell az egyensúlyi pont típusát. Ezt a lineáris rendszerekre definiált típusok geometriai tulajdonságai alapján tehetjük meg.

8.3. Definíció Tekintsünk egy $\dot{x}(t) = f(x(t))$ kétdimenziós autonóm rendszert. Írjuk fel a p egyensúlyi pont egy U környezetében a megoldásokat (r, φ) polárkoordinátákban. A p pont

- *stabilis csomó*, ha $\lim_{+\infty} r = 0$, $\lim_{+\infty} |\varphi| < \infty$,
- *instabilis csomó*, ha $\lim_{-\infty} r = 0$, $\lim_{-\infty} |\varphi| < \infty$,
- *nyereg*, ha létezik két olyan trajektória U -ban, melyek $t \rightarrow +\infty$ esetén p -hez tartanak, létezik két olyan trajektória U -ban, melyek $t \rightarrow -\infty$ esetén p -hez tartanak, a többi pontból induló trajektória pedig $t \rightarrow +\infty$ és $t \rightarrow -\infty$ esetén is elhagyja U -t,
- *stabilis fókusz*, ha $\lim_{+\infty} r = 0$, $\lim_{+\infty} |\varphi| = \infty$,

- *instabilis fókusz*, ha $\lim_{-\infty} r = 0$, $\lim_{-\infty} |\varphi| = \infty$,
- *centrum*, ha U -ban minden pálya (az egyensúlyi ponton kívül) periodikus.

Az egyensúlyi pont típusa a Jacobi-mátrix segítségével az alábbi módon határozható meg.

8.4. Tétel *Legyen $n = 2$. Ha $f \in \mathcal{C}^2$ és $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ az $f'(p)$ Jacobi-mátrix minden λ sajátértékére, akkor a (8.1) rendszer p egyensúlyi pontja ugyanolyan típusú, mint a (8.2) rendszerben az origó.*

A fenti két tételben fontos szerepet játszik a $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ feltétel. Ha ez teljesül, akkor az egyensúlyi pontot **hiperbolikusnak** nevezik. Ebben az esetben várható, hogy a linearizált rendszer a lokális fázisképet meghatározza. Nem hiperbolikus egyensúlyi pontok lokális vizsgálatában (és mint később látni fogjuk, a globális vizsgálatban is) fontos szerepet játszik a Ljapunov-módszer. Ennek lényegét először érdemes egy egyszerű példán bevezetni.

Tekintsük az $\dot{x} = -y - x^3$, $\dot{y} = x - y^3$ rendszert. Az egyensúlyi pontban (origó) a linearizált rendszer nem mutatja meg a lokális fázisképet, ugyanis a deriváltmátrix sajátértékei $\pm i$. Az iránymezőből is csak annyi látszik, hogy a trajektóriák körbejárnak az origó körül, de az nem, hogy közelednek hozzá, vagy távolodnak tőle. Tekintsük a $V(p, q) = p^2 + q^2$ függvényt, és vizsgáljuk meg, hogy a trajektóriák mentén csökken, vagy növekszik az értéke. Ez megmutathatja, hogy a trajektóriák közelednek az origóhoz, vagy távolodnak tőle. Legyen tehát (x, y) egy tetszőleges trajektória, és legyen $V^*(t) = V(x(t), y(t))$. Ennek deriváltjára azt kapjuk, hogy $V^{*'}(t) = -2(x^4(t) + y^4(t)) < 0$, tehát a trajektóriák közelednek az origóhoz. Ezzel nem csak az origó egy környezetében kaptuk meg a fázisképet, hanem globálisan, az egész fázissíkon. (Az origó aszimptotikus stabilitása Ljapunov stabilitási tételéből következik (lásd alább)).

A gondolat a (8.1) rendszerre általánosan is megfogalmazható.

8.5. Definíció *A $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_f, \mathbb{R})$ függvény deriváltja az f vektormező mentén (vagy a V függvény Lie-deriváltja, vagy a V rendszer szerinti deriváltja) az alábbi függvény*

$$L_f V = \langle V', f \rangle \quad \text{azaz} \quad (L_f V)(p) = \langle V'(p), f(p) \rangle, \quad p \in \mathcal{D}_f. \quad (8.3)$$

8.6. Lemma *Legyen x a (8.1) rendszer egy megoldása. Ekkor a $V^*(t) = V(x(t))$ képlettel definiált függvényre $\dot{V}^*(t) = (L_f V)(x(t))$, $t \in \mathcal{D}_x$.*

Tehát az $L_f V$ függvény előjele megmutatja, hogy a V függvény értéke a megoldások mentén növekszik, vagy csökken. Ljapunov módszerének lényege olyan V függvény választása, amely monoton a megoldások mentén, és monotonitása a megoldások kiszámítása nélkül eldönthető. Fontos speciális eset, amikor a V függvény értéke a megoldások mentén állandó.

8.7. Definíció *A V függvényt a (8.1) rendszer első integráljának nevezik, ha $L_f V \equiv 0$.*

A továbbiakban Ljapunov-függvény segítségével vizsgáljuk az egyensúlyi pontok stabilitását. Legyen $p \in \mathcal{D}_f$ a (8.1) rendszer egyensúlyi pontja ($f(p) = 0$).

8.8. Tétel *(Ljapunov stabilitási tétele) Ha van a p pontnak olyan $U \subset \mathcal{D}_f$ nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1. $V(p) < V(q)$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra,
2. $(L_f V)(q) \leq 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra,

akkor p stabilis egyensúlyi pont. Ha $(L_f V)(q) < 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra, akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

Sok esetben az $L_f V$ függvény negativitását nehéz biztosítani, de olyan V könnyen megadható, melyre $L_f V$ nem pozitív és csak megfelelően „kis” halmazokon nulla. Ezekről a „kis” halmazokról mindössze annyit kell feltenni, hogy nem invariánsak, azaz nem tartalmazznak teljes pályát. Ezt fogalmazzuk meg az alábbi tétel, amelyet **LaSalle-féle invarianciaelv**nek is neveznek.

8.9. Tétel *(Barbasin–Kraszovszkij-tétel) Ha van a p pontnak olyan $U \subset \mathcal{D}_f$ nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1. $V(p) < V(q)$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra,
2. $(L_f V)(q) \leq 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra,
3. létezik a p pontnak olyan környezete, amelyben a p ponton kívül minden pálya mentén V értéke nem állandó,

akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

Az egyensúlyi pont instabilitását az alábbi tétel segítségével lehet igazolni.

8.10. Tétel (*Ljapunov instabilitási tétele*) Ha van a p pontnak olyan $U \subset \mathcal{D}_f$ nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre

1. p nem lokális minimuma a V függvénynek,
2. $(L_f V)(q) < 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra,

akkor p instabilis egyensúlyi pont.

Nyereg típusú instabilitás esetében $L_f V$ pozitivitása az egyensúlyi pont teljes környezetében nem biztosítható. Instabilitásra vonatkozó elégséges feltételt ad Csetajev alábbi tétele, melyet egyszerűség kedvéért úgy fogalmazzunk meg, hogy $V(p) = 0$ fennáll, amelyet egyébként a többi tétel esetében is az általánosság megsejtése nélkül feltehetünk volna.

8.11. Tétel (*Csetajev tétele*) Legyen $U \subset \mathcal{D}_f$ a p pontnak nyílt környezete, $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és legyen D nyílt, összefüggő halmaz, melynek határát ∂D jelöli. Ha ezekre fennáll

1. $p \in \partial D$,
2. ha $q \in \partial D \cap U$, akkor $V(q) = 0$,
3. ha $q \in D \cap U$, akkor $V(q) > 0$ és $(L_f V)(q) > 0$,

akkor p instabilis egyensúlyi pont.

8.1.2. Feladatok

Mutassuk meg, hogy az origó egyensúlyi pont, és határozzuk meg típusát az alábbi kétdimenziós rendszerekben.

8.188. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2xy - x + y$, $\dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y$.

8.189. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x^2 + y^2 - 2x$, $\dot{y} = 3x^2 - x + 3y$.

8.190. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = \exp(x + 2y) - \cos(3x)$, $\dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2\exp(y)$.

8.191. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = \ln(4y + \exp(-3x))$, $\dot{y} = 2y - 1 + \sqrt{1 - 6x}$.

Határozzuk meg az egyensúlyi pontokat és azok típusát az alábbi kétdimenziós rendszerekben.

8.192. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x - 3y$.

8.193. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y^2 - 1, \dot{y} = x^2 + y^2 - 2$.

8.194. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x^2 + y^2 - 25, \dot{y} = xy - 12$.

8.195. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = -y, \dot{y} = x^3 - x + xy$.

8.196. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y - x^2 - x, \dot{y} = 3x - x^2 - y$.

8.197. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = (x - 1)(y - 1), \dot{y} = xy - 2$.

8.198. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = \sin(x + y)$.

8.199. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = \ln(y^2 - x), \dot{y} = x - y - 1$.

8.200. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 4y^2 - x^2, \dot{y} = 2xy - 4y - 8$.

8.201. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2y, \dot{y} = x^2 - y^3 - 1$.

8.202. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x^2 + y^2 - 2$.

8.203. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x + y + 1, \dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}$.

8.204. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = xy - 2, \dot{y} = (2x - y)(x - 2)$.

Határozzuk meg az egyensúlyi pontokat, és azokban a linearizált rendszer stabil, instabil és centrális alterének dimenzióját az alábbi háromdimenziós rendszerekben.

8.205. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = x^2 - yz - 1$.

8.206. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y + z, \dot{y} = x^2 - 2y, \dot{z} = x + y$.

8.207. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg az

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = -\beta z + xy \quad (8.4)$$

Lorenz-rendszerben a $\sigma, \rho, \beta > 0$ paraméterek függvényében az origóban, mint egyensúlyi pontban a linearizált rendszer stabil, instabil és centrális alterének dimenzióját.

8.208. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg a (8.4) Lorenz-rendszerben a $\sigma, \rho, \beta > 0$ paraméterek függvényében az egyensúlyi pontokat, és azok stabilitását.

Megfelelően választott Ljapunov-függvény segítségével határozzuk meg az origó, mint egyensúlyi pont típusát az alábbi kétdimenziós rendszerekben.

8.209. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x^3 - y$, $\dot{y} = x + y^3$.

8.210. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y - x + xy$, $\dot{y} = x - y - x^2 - y^3$.

8.211. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2y^3 - x^5$, $\dot{y} = -x - y^3 + y^5$.

8.212. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = xy - x^3 + y^3$, $\dot{y} = x^2 - y^3$.

8.213. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y - 3x - x^3$, $\dot{y} = 6x - 2y$.

8.214. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2y - x - y^3$, $\dot{y} = x - 2y$.

8.215. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x - y - x^3$, $\dot{y} = x + y + y^3$.

8.216. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = xy^2 - x^3$, $\dot{y} = -y^3 - 2x^2y$.

8.217. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = -xy^4$, $\dot{y} = x^6y$.

8.218. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = xy + x^3$, $\dot{y} = -y + y^2 - x^3 + x^4$.

8.219. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2y^5 - x^3$, $\dot{y} = -2xy^2$.

8.220. Feladat (Megoldás) Tekintsük a Liénard-egyenletet: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, ahol $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$; és minden $x \neq 0$ esetén $f(x) > 0$ és $xg(x) > 0$. Igazoljuk, hogy az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis.

8.221. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg a (8.4) Lorenz-rendszerben, hogy a $\sigma, \rho, \beta > 0$ paraméterek bármely értéke esetén a megoldások befutnak egy korlátos tartományba.

8.222. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg a (8.4) Lorenz-rendszerben, hogy $\rho < 1$ és bármely $\sigma, \beta > 0$ esetén az origó globálisan aszimptotikusan stabilis.

8.2. Globális vizsgálat a síkon

8.2.1. Elmélet

Tekintsük az $\dot{x} = P \circ (x, y)$, $\dot{y} = Q \circ (x, y)$ kétváltozós rendszert, melyben $P, Q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Célunk a teljes fáziskép jellemzése, melyhez például a következő módszerek alkalmazhatóak:

- az iránymező megrajzolása;
- transzformáció polárkoordinátákba, vagy komplex változóra;
- első integrál és Ljapunov-függvény keresése;
- a (P, Q) vektormező szimmetriájának felhasználása.

Ezen módszerek alkalmazásán túl a differenciálegyenletek (megfelelő kezdeti feltételekből indított) numerikus megoldásának ábrázolása is segít meghatározni a fázisképet. A feladatok kitűzése előtt először röviden ismertetjük a fenti módszereket.

Iránymező és nullavonalak

Az iránymező nem más, mint a $(P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény, amely a fázissík minden pontjához olyan kétdimenziós vektort rendel, amely éppen a ponton áthaladó trajektória érintője. A fáziskép elkészítéséhez sokszor elég annyit tudni, hogy az iránymező az egyes pontokban fel vagy le, illetve balra vagy jobbra mutat. Ennek eldöntésében segítenek az

$$N_1 := \{p \in \mathbb{R}^2 : P(p) = 0\}, \quad N_2 := \{p \in \mathbb{R}^2 : Q(p) = 0\}$$

nullavonalak. Az N_1 nullavonal két (nem feltétlenül összefüggő) részre osztja a fázissíkot. Az egyikben, melyben $P > 0$, a trajektóriák jobbra, a másikban, melyben $P < 0$, a trajektóriák balra haladnak. Hasonlóképpen az N_2 nullavonal két (nem feltétlenül összefüggő) részre osztja a fázissíkot. Az egyikben, melyben $Q > 0$, a trajektóriák felfelé, a másikban, melyben $Q < 0$, a trajektóriák lefelé haladnak. Így az N_1 és N_2 nullavonal négy részre bontja a fázissíkot, amelyek mindegyikében egyszerűen eldönthető, hogy a trajektória fel vagy le, illetve balra vagy jobbra mozog. (A trajektória mozgása kifejezést használjuk, valójában t növekedtével a $\varphi(t, p)$ pont mozog a trajektória mentén.)

A nullavonalak metszéspontjai az egyensúlyi pontok, ezekben P és Q értéke is zérus. Az egyensúlyi pontok környezetében a 8.4. tétel szerint lineárisálással határozhatjuk meg a fáziskép szerkezetét. A globális fázisképhez a

nyeregpontok szeparatrixainak (a nyeregpontba befutó, illetve onnan kiinduló két-két pályának) az elhelyezkedését kell meghatározni. Ebben is sokszor segít az iránymező. A fáziskép iránymezővel történő jellemzését egy példán szemléltetjük.

Tekintsük az

$$\dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = x^2 - y$$

rendszert. Az N_1 nullavonal egyenlete $x(1 - y) = 0$, azaz ez a nullavonal két egyenesből, az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ és az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 1\}$ egyenesből áll. Ezek négy tartományra osztják a fázissíkot. A jobb felső és bal alsó tartományban balra, a másik kettőben jobbra mozognak a trajektóriák. Mivel az $x = 0$ esetén $\dot{x} = 0$, ezért az $x = 0$ egyenes invariáns. Az N_2 nullavonal egyenlete $y = x^2$, ez tehát egy parabola. A parabola feletti részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a parabola alatt pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két **nullklína** együtt nyolc részre osztja a fázissíkot. A 8.1 ábra mindegyik tartományban egy-egy nyíl mutatja a trajektória érintővektorának irányát. A rendszer egyensúlyi pontjait és azok típusát a szokott módon határozhatjuk meg. A $(0, 0)$ pont nyereg, az $(1, 1)$ és $(-1, 1)$ pont pedig stabil fókusz. A nyeregpontba befutó szeparatrix az $x = 0$ invariáns egyenes, a nyeregpontból kiinduló pályákról pedig az iránymező alapján azt mondhatjuk, hogy a stabilis fókuszokba futnak bele (ez egyébként bizonyításra szorul, ugyanis az iránymező alapján az is elképzelhető lenne, hogy ezek a pályák végtelenbe tartanak). Hasonlóan igazolható, hogy a jobb félsíkból induló megoldások mind az $(1, 1)$ stabilis fókuszpontba futnak be ($t \rightarrow +\infty$ esetén, a bal félsíkból induló megoldások pedig a $(-1, 1)$ stabilis fókuszpontba jutnak). Ezzel megkaptuk a 8.1 ábrán látható fázisképet.

Transzformáció polárkoordinátákba, vagy komplex változóra

Az $\dot{x} = P \circ (x, y)$, $\dot{y} = Q \circ (x, y)$ rendszerhez vezessük be az r és φ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\varphi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$ transzformációs képletekkel. Ezekből

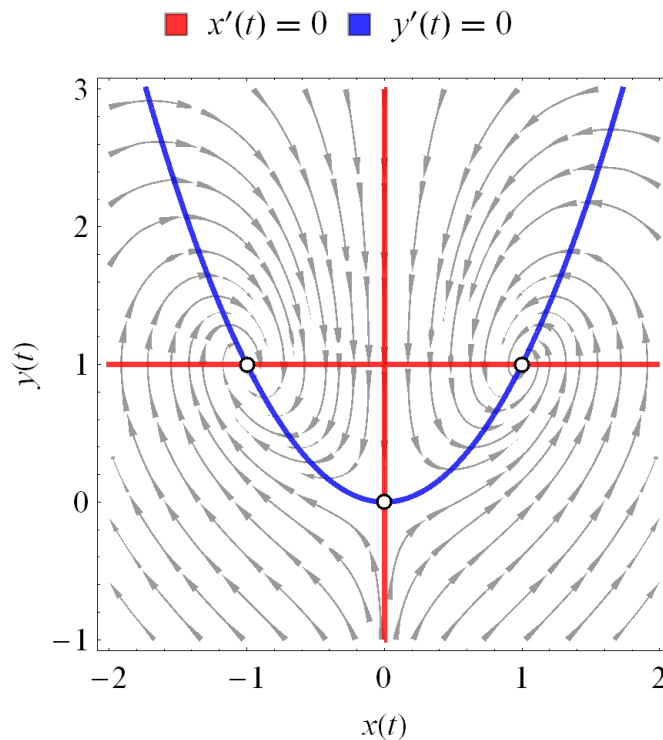
$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi} \sin(\varphi), \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\varphi) + r\dot{\varphi} \cos(\varphi).$$

Az első egyenletet $\cos(\varphi)$ -vel, a másodikat $\sin(\varphi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet összeadva és felhasználva a differenciálegyenleteket kapjuk, hogy

$$\dot{r} = P(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cos(\varphi) + Q(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \sin(\varphi).$$

Hasonlóképpen az első egyenletet $\sin(\varphi)$ -vel, a másodikat $\cos(\varphi)$ -vel szorozva, majd a két egyenletet kivonva és felhasználva a differenciálegyenleteket

$$\dot{\varphi} = Q(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cos(\varphi) - P(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \sin(\varphi)$$



8.1. ábra. Példa a globális vizsgálathoz.

adódik. Bizonyos esetekben az r és φ függvényekre felírt egyenletek egyszerű alakúak és lehetővé teszik a fáziskép meghatározását.

Komplex változó bevezetése is célravezető lehet számos esetben. Vezessük be a $z(t) = x(t) + iy(t)$ függvényt. Erre a differenciálegyenlet $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = P(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iQ(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$. A transzformáció akkor célravezető, ha a jobboldal közvetlenül z függvényeként fejezhető ki, a valós és képzetes rész használata nélkül.

Első integrál és Ljapunov-függvény keresése

A 8.7. definíció szerint a $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_f, \mathbb{R})$ függvény első integrálja az $\dot{x} = P \circ (x, y)$, $\dot{y} = Q \circ (x, y)$ rendszernek, ha $P\partial_1 V + Q\partial_2 V = 0$. Ilyen függvény képletének meghatározására nincs általános szabály, hiszen ehhez meg kellene oldani a $P\partial_1 V + Q\partial_2 V = 0$ elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet, ami lényegében az eredeti közönséges differenciálegyenlet megoldására vezet. Azonban egy fontos speciális esetben, nevezetesen, amikor a rendszer Hamilton-típusú, az első integrál megadható.

Az $\dot{x} = P \circ (x, y)$, $\dot{y} = Q \circ (x, y)$ kétváltozós rendszer Hamilton-rendszer,

ha van olyan $H : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre $P = \partial_2 H$ és $Q = -\partial_1 H$. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel szerint H létezésének szükséges feltétele $\partial_1 P = -\partial_2 Q$, azaz $\partial_1 P + \partial_2 Q = 0$, vagyis a rendszer divergenciája nulla. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} \partial_{12} H & \partial_{22} H \\ -\partial_{21} H & -\partial_{11} H \end{pmatrix}.$$

Ennek nyoma $\text{tr}(J) = 0$, így a linearizálás alapján Hamilton-rendszereknél az egyensúlyi pontok vagy nyereg-, vagy centrumtípusúak. Mivel $\det(J) = \det(H'')$, ezért ha az (p, q) egyensúlyi pontban $\det(H''(p, q)) < 0$, azaz $H''(p, q)$ indefinit, akkor az egyensúlyi pont nyereg. Ha a (p, q) egyensúlyi pontban $\det(H''(p, q)) > 0$, azaz (p, q) szélsőértéke H -nak, akkor ez a pont centrum, mivel a szélsőérték egy környezetében a szintvonalak zárt görbék.

A Hamilton-rendszerek fontos speciális esete az $\ddot{x} + U'(x) = 0$ alakú, egy szabadsági fokú mechanikai rendszer, ahol $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. A megfelelő elsőrendű rendszer $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -U'(x)$. Ezen rendszer első integrálja a $V(p, q) = q^2/2 + U(p)$ függvény, ugyanis ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(p, q) = qU'(p) - qU'(p) = 0$. Így a rendszer trajektóriái a V függvény szintvonalain fekszenek. Tehát a fáziskép elkészítéséhez csak V szintvonalait kell meghatározni, majd ezeken \dot{x} és \dot{y} előjele alapján a trajektória irányát kell megjelölni. V szintvonalainak felrajzolásához célszerű először az U függvény grafikonját megrajzolni az (x, U) síkban. Majd erre a síkra merőlegesen felvéve az y tengelyt az (y, U) síkkal párhuzamosan mozgatva egy $y^2/2$ típusú parabolát, olyan módon, hogy csúcsa az $U(x)$ függvény grafikonját fussa be, a V függvény felületét kapjuk meg. Ezután a szintvonalakat egyszerűen megkaphatjuk a felületet vízszintes síkokkal metszve. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nyoma $\text{tr}(J) = 0$, így a linearizálás alapján az egyensúlyi pontok vagy nyereg-, vagy centrumtípusúak. Mivel $\det(J) = U''(x)$, ezért ha az egyensúlyi pontban $U''(x) < 0$, akkor az nyereg. Ha az egyensúlyi pontban $U''(x) > 0$, akkor a pont minimuma a V első integrálnak, így az centrum.

A vektormező szimmetriájának felhasználása

A vektormező szimmetriája sok esetben segítheti az iránymezőből kapott információ felhasználását. Leggyakoribb példa a nemlineáris centrum esete, melynek létezését, sem a linearizálásból, sem az iránymezőből nem lehet megállapítani (hiszen csak annyit látunk, hogy a pályák az egyensúlyi pont körül

körbejárnak). Ilyen esetben előfordulhat, hogy a pályák tengelyesen szimmetrikusak egy, az egyensúlyi ponton áthaladó tengelyre. Ez a tény a megoldások ismerete nélkül, magukból a differenciálegyenletekből levezethető. Tekintsünk ehhez egy általános $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rendszert (nem kell feltétlenül kétdimenziósnak lennie). Legyen $T : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{D}_f$ egy olyan transzformáció, amely a pályákat önmagukba képezi. Ha egy $p \in \mathcal{D}_f$ pontból induló pálya pozitív t értékekhez tartozó részét a T leképezés a $T(p)$ pontból induló pálya negatív t értékekhez tartozó részre képezi, akkor fennáll a

$$\varphi(-t, T(p)) = T(\varphi(t, p))$$

azonosság minden t esetén. Ezt t szerint deriválva $-\dot{\varphi}(-t, T(p)) = T'(\varphi(t, p))\dot{\varphi}(t, p)$, mely a $t = 0$ esetben

$$-f(T(p)) = T'(p)f(p).$$

Ez utóbbi ellenőrzéséhez pedig nem szükséges a megoldások ismerete.

Nézzük meg a fenti képlet jelentését két fontos speciális, kétdimenziós esetben. Nevezetesen, hogy hogyan állapítható meg a differenciálegyenletekből, hogy a megoldások valamelyik koordinátatengelyre szimmetrikusak.

A függőleges tengelyre való tükrözés a $T(p, q) = (-p, q)^\top$ leképezés, melynek deriváltmátrixa

$$T' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Így a fenti képlet alapján, az $\dot{x} = P \circ (x, y)$, $\dot{y} = Q \circ (x, y)$ rendszer pályái a függőleges tengelyre szimmetrikusak, ha

$$-\begin{pmatrix} P(-x, y) \\ Q(-x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix},$$

azaz $P(-x, y) = P(x, y)$, és $-Q(-x, y) = Q(x, y)$.

A vízszintes tengelyre való tükrözés a $T(x, y) = (x, -y)$ leképezés, melynek deriváltmátrixa

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Így a fenti képlet alapján, az $\dot{x} = P \circ (x, y)$, $\dot{y} = Q \circ (x, y)$ rendszer pályái a vízszintes tengelyre szimmetrikusak, ha

$$-\begin{pmatrix} P(x, -y) \\ Q(x, -y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix},$$

azaz $-P(x, -y) = P(x, y)$, $Q(x, -y) = Q(x, y)$.

8.2.2. Feladatok

Az iránymező segítségével határozzuk meg az alábbi kétváltozós rendszerek fázisképét.

8.223. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2x + y^2 - 1, \dot{y} = 6x - y^2 + 1.$

8.224. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y^2 - 4x^2, \dot{y} = 8 - 4y.$

8.225. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 4 - 4x - 2y, \dot{y} = xy.$

8.226. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \dot{y} = 2x.$

8.227. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = xy - 4, \dot{y} = (x - 4)(y - x).$

8.228. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 2(x - 1)(y - 2), \dot{y} = y^2 - x^2.$

8.229. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = (x + y)^2 - 1, \dot{y} = 1 - x - y^2.$

8.230. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2.$

8.231. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9.$

Határozzuk meg az alábbi $\dot{x} = y, \dot{y} = -U' \circ x$ alakú kétváltozós rendszerek fázisképét.

8.232. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = x - x^2.$

8.233. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = 3x^2.$

8.234. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = -2x^3.$

8.235. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = 2x - 2x^3.$

8.236. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = y, \dot{y} = \sin \circ x.$

Mutassuk meg, hogy az alábbi kétváltozós rendszerek Hamilton-rendszerek, határozzuk meg a Hamilton-függvényt, majd ennek segítségével rajzoljuk meg a fázisképet.

8.237. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy.$

8.238. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x + 2 - y, \dot{y} = x^2 - y.$

Az alábbi rendszerekhez keressünk első integrált.

8.239. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x - xy$, $\dot{y} = xy - y$. (Lotka–Volterra-rendszer).

8.240. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x^2 - 1$, $\dot{y} = 3x^2 - 2x^2y$.

Polárkoordinátákra transzformálás segítségével határozzuk meg az alábbi rendszerek fázisképét.

8.241. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$, $\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$.

8.242. Feladat (Megoldás)

$$\dot{x} = x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) - y, \quad \dot{y} = y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + x.$$

8.243. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 - y$, $\dot{y} = y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + x$.

8.244. Feladat (Megoldás) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az $\dot{x} = xf(\sqrt{x^2 + y^2}) - y$, $\dot{y} = yf(\sqrt{x^2 + y^2}) + x$ rendszernek hol lehet stabilis, instabilis illetve félig stabilis határciklusa?

Komplex koordinátatranszformáció segítségével határozzuk meg az alábbi rendszerek fázisképét.

8.245. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2xy$.

8.246. Feladat (Megoldás) $\dot{x} = x^3 - 3xy^2$, $\dot{y} = 3x^2y - y^3$.

9. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

9.247. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varrho_0, K \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvények esetén az $\mathbb{R}^2 \ni (t, x) \mapsto \varrho(t, x) := \varrho_0(x - K(t))$ összefüggéssel értelmezett ϱ függvény megoldása a

$$\frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial t} + K'(t) \frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial x} = 0$$

parciális differenciálegyenletnek.

9.248. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a $\partial_{12}u(x, y) = 0$ parciális differenciálegyenletet.

9.249. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a

$$\partial_1 u(x, y) = u(x, y) + yu(x, y), \quad \partial_2 u(x, y) = u(x, y)^2 + 2xu(x, y)$$

parciális differenciálegyenlet-rendszert.

Határozzuk meg az alábbi elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletek olyan (többnyire u -val jelölt) megoldását, amely átmegy a \mathbf{g} paraméterezéssel megadott görbén.

9.250. Feladat (Megoldás)

$$5 \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0; \quad \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (2\xi, -\xi, 9\xi^2)^\top.$$

(Másképp: $u(2\xi, -\xi) = 9\xi^2$ teljesül.)

9.251. Feladat (Megoldás) Legyen $\varrho_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges, adott függvény. Oldjuk meg az alábbi feladatot.

$$\frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial t} + 2 \frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial x} = 0; \quad \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (0, \xi, \varrho_0(\xi))^\top.$$

(Másképp: $\varrho(0, \xi) = \varrho_0(\xi)$ teljesül.)

9.252. Feladat (Megoldás)

$$5x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + 2y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0; \quad \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (2\xi, -\xi, 9\xi^2)^\top.$$

(Másképp: $u(2\xi, -\xi) = 9\xi^2$ teljesül.)

9.253. Feladat (Megoldás)

$$u(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 1; \quad \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (-\xi, \xi, 1)^\top.$$

(Másképp: $u(-\xi, \xi) = 1$ teljesül.)

9.254. Feladat (Megoldás)

$$y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2xyu(x, y); \quad \mathbb{R}^+ \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (\xi, \xi, \xi)^\top.$$

(Azaz $u(\xi, \xi) = \xi$ teljesül.)

9.255. Feladat (Megoldás)

$$\partial_1 u(x, y) = u(x, y)^2; \quad \mathbb{R}^+ \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (\xi, \xi^2, \xi^3)^\top.$$

9.256. Feladat (Megoldás)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 1; \quad \mathbb{R}^+ \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (\xi, \xi, \xi)^\top.$$

(Vagyis $u(\xi, \xi) = \xi$ teljesül.)

9.257. Feladat (Megoldás)

$$x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0; \quad \mathbb{R}^+ \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (\xi, \xi, \xi)^\top.$$

(Vagyis $u(\xi, \xi) = \xi$ teljesül.)

9.258. Feladat (Megoldás)

$$x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 1 - x; \quad \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (\xi, 0, \xi)^\top.$$

(Azaz fennáll $u(\xi, 0) = \xi$.)

9.259. Feladat (Megoldás)

$$x \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + z \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0; \quad \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathbf{g}(\xi) := (\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4)^\top.$$

(Azaz fennáll $u(\xi, \xi^2, \xi^3) = \xi^4$.)

9.260. Feladat (Megoldás) Legyen $N \in \mathbb{N}$; $f \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}^+)^N, \mathbb{R})$ nulladfokú pozitív homogén függvény, azaz teljesüljön

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_f : f(\lambda \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (9.1)$$

Bizonyítsuk be, hogy (9.1) pontosan akkor áll fenn, ha

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_f : \sum_{n=1}^N x_n \partial_n f(\mathbf{x}) = 0. \quad (9.2)$$

9.261. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg a

$$(x-y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2(x-y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + F \left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = 0$$

egyenlet típusát a sík különböző tartományain.

9.262. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg a

$$-y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2x^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + F \left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = 0$$

egyenlet típusát a sík különböző tartományain.

9.263. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + F \left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = 0$$

egyenlet típusa nem változik, ha diffeomorfizmussal (:=invertálható és inverzével együtt differenciálható leképezéssel) új koordinátákat vezetünk be a síkon.

9.264. Feladat (Megoldás) (Fourier-módszer) Legyen $\Omega := [0, \pi] \times [0, \pi]$, és keressük meg a $\Delta u = \lambda u$ sajátérték-feladat $u(x, y) = X(x)Y(y)$ szorzatalakú sajátfüggvényeit (vagyis a **Helmholtz-egyenlet** megoldásait) és a hozzájuk tartozó sajátértékeket az $u|_{\partial\Omega} = 0$ (Dirichlet-féle) peremfeltétel mellett.

9.265. Feladat (Megoldás) Legyen Ω az origó középpontú, egységnyi sugarú körlap, és keressük meg a $\Delta u = \lambda u$ sajátérték-feladat $U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ szorzatalakú sajátfüggvényeit – ahol

$$U(r, \varphi) := u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \quad (9.3)$$

– és a hozzájuk tartozó sajátértékeket az $u|_{\partial\Omega} = 0$ peremfeltétel mellett.

9.266. Feladat (Megoldás) Határozzuk meg a síkbeli Laplace-egyenlet első-, másod- és harmadrendű polinom-alakú megoldásait.

9.267. Feladat (Megoldás) Keressük meg az $\partial_1^2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = 0$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) síkbeli Laplace-egyenletnek az

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 1 + 2x, \quad u(x, 2) = 9 - \frac{8}{3}x \quad (x \in [0, 3]), \\ u(0, y) = 1 + 4y, \quad u(3, y) = 7 - 3y \quad (y \in [0, 2]) \end{aligned}$$

peremfeltételeket kielégítő megoldását a legfeljebb harmadfokú polinomok körében.

10. fejezet

Variációszámítás

10.268. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy a

$$\{x \in C^1[0, 1] : x(1/2) = 0\} \ni x \mapsto J(x) := \int_0^1 \sin(x(t)) dt$$

képlettel értelmezett J funkcionálnak nincs maximuma.

Itt adunk néhány (többnyire implicit) közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó feladatot, és feladatként néhány megoldási módszert, mert a variációszámítási feladatok közben különösen gyakran merülnek fel ilyen egyenletek. Megjegyzendő, hogy a parciális differenciálegyenletek többsége is az implicit egyenletekkel mutat nagyobb rokonságot, hiszen az ismeretlen függvény deriváltjai közül legfeljebb egy fejezhető ki explicit módon, a többiek nem.

10.269. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a következő másodrendű egyenletet:

$$\frac{-2x\ddot{x} + \dot{x}^2 + 1}{2\sqrt{x}(\dot{x}^2 + 1)^{3/2}} = 0. \quad (10.1)$$

10.270. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a következő másodrendű egyenletet:

$$x\ddot{x} - \dot{x}^2 - 1 = 0. \quad (10.2)$$

10.271. Feladat (Megoldás) Oldjuk meg a következő másodrendű egyenletet:

$$2x\ddot{x} + \dot{x}^2 + 1 = 0. \quad (10.3)$$

Állítsuk elő az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet megoldásait (az úgynevezett **extremálisokat**) az alábbi (\mathbb{R}^3 -on értelmezett) alapfüggvények esetén. Vizsgáljuk meg a szükséges és elégséges feltételek teljesülését is.

10.272. Feladat (Megoldás) $f(t, p, q) := \sqrt{1 + q^2}$.

10.273. Feladat (Megoldás) $f(t, p, q) := 1/2(q^2 - p^2)$.

10.274. Feladat (Megoldás) $f(t, p, q) := tq^3 - 3pq$.

10.275. Feladat (Megoldás) Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ni (x, p, y, q) \mapsto f(x, p, y, q) := \frac{p \ln(y)}{2x} - \frac{q \ln(x)}{2y} - a \ln(y) - b \ln(x) + cx + dy$$

alapfüggvényhez tartozó Euler–Lagrange-egyenlet éppen az

$$\dot{x} = ax - dxy, \quad \dot{y} = cxy - by \quad (10.4)$$

Lotka–Volterra-egyenlet [14].

10.276. Feladat (Megoldás) Ramsey neoklasszikus növekedési modelljében (amely egyszektoros zárt gazdaságot ír le, és amely Solow modelljének alternatívája) a t időpontban az előállított összterméket $Y(t)$, a rendelkezésre álló tőkét $K(t)$, a fogyasztást pedig $C(t)$ jelöli. Kézenfekvő feltevés, hogy a beruházás (a tőke megváltozásának sebessége) a termelés és a fogyasztás különbsége:

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t),$$

továbbá az is, hogy a termelés a tőke függvénye, a legegyszerűbb feltevés szerint $Y = bK$ ($b \in \mathbb{R}^+$), tehát

$$\dot{K}(t) = bK(t) - C(t). \quad (10.5)$$

Az úgynevezett pillanatnyi hasznossági függvény (tulajdonképpen a hasznossági függvény megváltozásának sebessége), N , a C fogyasztástól függ, alakja vehető az alábbiak: $N(c) := -a(c - C^*)$ ($a, C^* \in \mathbb{R}^+$). (Azaz az ideális C^* fogyasztástól való eltérés nem kívánatos.) Szeretnénk (mondjuk a kormány szeretné) elérni, hogy a hasznosság a lehető legnagyobb legyen, azaz (és ez most az olvasó feladata) keressük a

$$\nu(K) := \int_0^T N(bK(t) - \dot{K}(t)) dt = -a \int_0^T (bK(t) - \dot{K}(t) - C^*)^2 dt$$

funkcionál maximumát. (Ha már meghatároztuk a K függvényt, akkor a fogyasztást a (10.5) egyenletnek megfelelően fogjuk előírni.)

11. fejezet

Közelítő megoldások

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák közelítő megoldását a fokozatos közelítés módszerével (legalább három iterációt végezzünk).

11.277. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 2x(t) - t, x(0) = 1$

11.278. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x(t)(3 - x(t)), x(0) = 1$

11.279. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = -x(t) + \cos(t), x(0) = 0$

Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák közelítő (numerikus) megoldását az Euler-módszer segítségével az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon a megadott h lépésközzel.

11.280. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = tx(t), x(0) = 1, I = [0, 1], h = 0.25$.

11.281. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = 3x(t)(1 - x(t)), x(0) = 0.1, I = [0, 2.5], h = 0.5$.

11.282. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = -2x(t) + 4, x(0) = 0, I = [0, 2], h = 0.4$.

11.283. Feladat (Megoldás) $\dot{x}(t) = x^2(t), x(0) = 1, I = [0, 1], h = 0.2$.

Keressük az alábbi kezdetiérték-problémák közelítő megoldását megfelelő (legfeljebb negyedfokú) Taylor-polinom alakjában.

11.284. Feladat (Megoldás) $y'(x) = y^2(x) - x, y(0) = 1$.

11.285. Feladat (Megoldás) $y'(x) = y(x) + e^{y(x)}, y(0) = 0$.

11.286. Feladat (Megoldás) $y'(x) = 2x + \cos(y(x)), y(0) = 0$.

11.287. Feladat (Megoldás) $y'(x) = x^2 + y^3(x)$, $y(1) = 1$.

11.288. Feladat (Megoldás) $y''(x) = xy'(x) - y^2(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

11.289. Feladat (Megoldás) $y''(x) = y'(x)^2 + xy(x)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

Határozzuk meg az alábbi egyenletek lineárisan független megoldásainak közelítését. Minden megoldást legalább az első három nem nulla tagjáig számoljuk ki.

11.290. Feladat (Megoldás) $y''(x) - x^2y(x) = 0$.

11.291. Feladat (Megoldás) $y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0$.

11.292. Feladat (Megoldás) $(1 - x^2)y''(x) - 4xy'(x) - 2y(x) = 0$.

11.293. Feladat (Megoldás) $(x^2 + 1)y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = 0$.

11.294. Feladat (Megoldás) $(1 - x)y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$.

11.295. Feladat (Megoldás) $(x^2 - x + 1)y''(x) + (4x - 2)y'(x) + 2y(x) = 0$.

11.296. Feladat (Megoldás) $y''(x) - xy'(x) + xy(x) = 0$.

11.297. Feladat (Megoldás) $y'''(x) - xy''(x) + (x - 2)y'(x) + y(x) = 0$.

12. fejezet

Bevezető feladatok

12.1. Megoldás (Feladat) Figyelembe véve, hogy $\text{id}(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$), és felhasználva a függvénypár és az összetett függvény értelmezését, tetszőleges $x \in D_y$ mellett kapjuk, hogy

$$(\text{id}, y)(x) = (x, y(x)), \quad (y \circ \text{id})(x) = y(\text{id}(x)) = y(x), \quad (\text{id} \circ y)(x) = \text{id}(y(x)) = y(x).$$

12.2. Megoldás (Feladat) Figyelembe véve a projekciók (vetítések) értelmezését:

$$\text{pr}_1(x, y) := x, \quad \text{pr}_2(x, y) := y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

és ismét használva az összetett függvény definícióját:

$$(f \circ \text{pr}_1)(x, y) = f(\text{pr}_1(x, y)) = f(x), \quad (f \circ \text{pr}_2)(x, y) = f(\text{pr}_2(x, y)) = f(y),$$

$$((x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in D_f).$$

12.3. Megoldás (Feladat) Felhasználva a fentieket kapjuk, hogy

$$(\text{pr}_1 \circ g)(x) = \text{pr}_1(g(x)) = \text{pr}_1(h(x), k(x)) = h(x),$$

$$(\text{pr}_2 \circ g)(x) = \text{pr}_2(g(x)) = \text{pr}_2(h(x), k(x)) = k(x).$$

12.4. Megoldás (Feladat) Egyrészt, közös pontot tartalmazó nyílt intervallumok egyesítése nyílt intervallum. Másrészt, a $\tau \in \mathbb{R}$ pontot tartalmazó halmazok egyesítése tartalmazza a τ pontot.

12.5. Megoldás (Feladat) $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} y_a =]0, +\infty[\ni x \mapsto \exp(-2x)$. Részletezve: belátható, hogy mindkét oldal részhalmaza a másiknak.

12.6. Megoldás (Feladat) $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} z_a = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, mert a megadott függvények grafikonjának minden pontja a felső félsíkban van, és a felső félsík minden pontja rajta van valamelyik függvényen.

12.7. Megoldás (Feladat) Az

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni \xi \mapsto \varphi(\xi) := \frac{1}{\xi}$$

függvény két szigorúan monoton csökkenő leszűkítése például:

$$\mathbb{R}^+ \ni \xi \mapsto \varphi \Big|_{\mathbb{R}^+} (\xi) = \frac{1}{\xi}; \quad \mathbb{R}^- \ni \xi \mapsto \varphi \Big|_{\mathbb{R}^-} (\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

Az összes szigorúan monoton leszűkítés pedig $\varphi|_A$, ahol $A \subset \mathbb{R}^+$ vagy $A \subset \mathbb{R}^-$ vagy pedig az $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmaz legfeljebb kételemű.

12.8. Megoldás (Feladat) Newton II. axiómája szerint egy test mozgásmennyiségének megváltozása arányos a testre ható erők eredőjével, és annak az egyenes vonalnak az irányában megy végbe, amelyben az eredő erő hat. Képlettel:

$$(mv) \cdot = F, \quad \text{avagy pontosabban} \quad \frac{d(m(t)v(t))}{dt} = F(t, s(t), v(t)),$$

ahol $v := \dot{s}$. (Az arányossági tényező – a *tömeg* – igen gyakran állandónak vehető, de vannak fontos kivételek, például a rakéta vagy jelentős relativisztikus hatások esetében sem tekinthető a tömeg állandónak.)

12.9. Megoldás (Feladat) Mivel egyik függvény sem rendelkezik a Darboux-féle tulajdonsággal (azaz nem vesz fel értékül bármely két függvényérték közé eső minden számot), ezért mindkét kérdésre tagadó a válasz.

12.10. Megoldás (Feladat)

1. Az

$$x \mapsto \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right)$$

képlettel például a $]0, \pi[$ nyílt intervallumon lehet deriválható függvényt értelmezni, mivel, ha $x \in]0, \pi[$, akkor $\frac{x}{2} \in D_{\operatorname{tg}}$, és $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \in D_{\ln}$. Az így értelmezett függvény deriváltfüggvénye pedig az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$]0, \pi[\ni x \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin(x)} (= \operatorname{csc}(x)).$$

2. A

$$t \mapsto f(t) := \frac{L}{\frac{L - m_0}{m_0} \exp(-\lambda Lt) + 1}$$

képlettel értelmezett függvény az L, m_0, λ paraméterekre tett megszorítás mellett az egész jobb félegyenesen értelmezve van, hiszen

$$\left(\frac{L}{m_0} - 1\right) \exp(-\lambda Lt) > -1, \quad \text{ha } t \in \mathbb{R}^+;$$

továbbá differenciálható is; deriváltfüggvénye

$$t \mapsto \frac{\exp(\lambda Lt) L^2 \lambda (L - m_0) m_0}{(L + (\exp(\lambda Lt) - 1) m_0)^2}.$$

Vegyük észre (inkább: lássuk be), hogy másrészt tetszőleges $t \in \mathbb{R}^+$ mellett f kielégíti a logisztikus egyenletet: $f'(t) = \lambda f(t)(L - f(t))$.

12.11. Megoldás (Feladat)

1. A $\varphi: t \mapsto y(-\exp(t))$ ($y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R})$) háromszor deriválható függvény első három deriváltja:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \varphi''(t) &= y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \varphi'''(t) &= -y'''(-e^t)e^{3t} + 3y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. A $\psi: s \mapsto z(\cos(s))$ ($z \in \mathcal{C}^3([0, 1], \mathbb{R})$) háromszor deriválható függvény első három deriváltja:

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= -z'(\cos(s)) \sin(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \\ \psi''(s) &= z''(\cos(s)) \sin^2(s) - z'(\cos(s)) \cos(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \\ \psi'''(s) &= -z'''(\cos(s)) \sin^3(s) + 3z''(\cos(s)) \sin(s) \cos(s) \\ &\quad + z'(\cos(s)) \sin(s) \quad (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Zárt intervallumon a deriválhatóságot a szokásnak megfelelően úgy értjük, hogy a függvény a végpontokban „belülről” deriválható.

12.12. Megoldás (Feladat) Mindhárom állítás igaz *intervallumon értelmezett* függvényekre. Mindhárom állításra könnyű ellenpéldát adni, ha az értelmezési tartomány nem intervallum, például az $x \mapsto \text{sign}(x)$ előjelfüggvény, az $x \mapsto \{x\}$ törtrészfüggvény és az $x \mapsto 1/x$ függvény alkalmas deriválható leszűkítéseinek segítségével.

12.13. Megoldás (Feladat) Mivel az $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto f(x) := x + \ln(x)$ függvény deriválható és deriváltja szigorúan pozitív, ezért szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Mivel $R_f = \mathbb{R}$, ezért inverzének – legyen ez g – értelmezési tartománya az egész valós számegegyenes, és mindenütt deriválható, ugyanis az eredeti függvény deriváltja sehol sem nulla. Továbbá:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g(y)}}.$$

Jól látható, hogy a deriváltfüggvény értékét egy adott $y \in D_g = \mathbb{R}$ helyen nem tudjuk explicite előállítani, csak a g inverz függvény segítségével fölírni. Ez a formula mégis használható, ha az $f(x)$ ($x \in D_f$) pontban akarjuk kiszámítani a deriváltat, ugyanis eszerint

$$g'(f(x)) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

12.14. Megoldás (Feladat) Mivel a $\varphi = \text{ch}|_{\mathbb{R}^+}$ függvény deriválható, és deriváltja szigorúan pozitív, ezért szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Mivel $R_\varphi =]1, +\infty[$, ezért ez lesz inverzének értelmezési tartománya, s ezen az inverz deriválható, hiszen φ deriváltja sehol sem nulla. Az $y :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény tehát differenciálható függvények kompozíciója lévén maga is differenciálható, és deriváltja az összetett és az inverz függvény deriválására vonatkozó tételek felhasználásával:

$$y'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\text{ch}(\text{ch}^{-1}(x))}{\text{sh}(\text{ch}^{-1}(x))} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \in]1, +\infty[).$$

Ha nem használtuk volna az utolsó lépésben a hiperbolikus függvényekre és inverzeikre vonatkozó tudásunkat, akkor – az $y(\text{ch}(t)) = \text{sh}(t)$ összefüggés deriválásával – csak idáig jutottunk volna, hogy

$$y'(\text{ch}(t)) = \text{coth}(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

12.15. Megoldás (Feladat) A függvény folytonos. Számítsuk ki a deriváltját az $\mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$ halmazon:

$$y'(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } -6 < x < 0, \\ -\frac{x}{2} - 3, & \text{ha } x < -6. \end{cases}$$

Továbbá

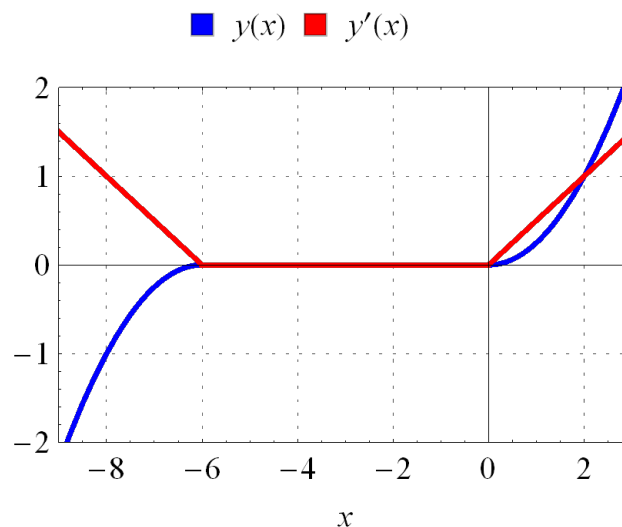
$$y'(-6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(-6+h) - y(-6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(-6+h)}{h} = 0,$$

$$y'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h)}{h} = 0.$$

Innen látható, hogy y folytonosan deriválható (12.1. ábra). Másrészt:

$$\sqrt{|y(x)|} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } -6 \leq x \leq 0, \\ -\frac{x}{2} - 3, & \text{ha } x < -6. \end{cases}$$

(Figyelembe vettük, hogy \sqrt{s} az a *nemnegatív* szám, amelynek négyzete s .) Így tehát $\sqrt{|y(x)|} = y'(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Gondoljuk meg, hogy ez az összefüggés



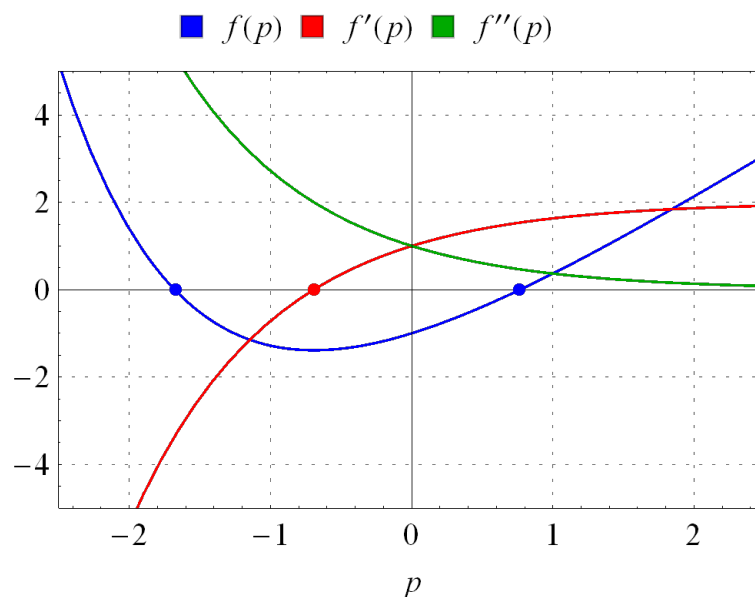
12.1. ábra. Az y függvény és deriváltja

változatlanul fennáll, ha $[-6, 0]$ helyett tetszőleges másik zárt intervallumon eltűnő függvényt veszünk, ezen kívül pedig a függvény értelmezését megfelelően módosítjuk.

12.16. Megoldás (Feladat)

1. Numerikus számolásból kiderül, hogy az $\mathbb{R} \ni p \mapsto f(p) := 2(p-1) + \exp(-p)$ függvénynek két gyöke van: $p_0 = -1.67835$, $p_1 = 0.768039$. A

függvény az egész számegyenesen folytonos, sőt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai: $\mathbb{R} \ni p \mapsto f'(p) = 2 - \exp(-p)$ és $\mathbb{R} \ni p \mapsto f''(p) = \exp(-p)$; s az elsőnek a nullahelyei: $f'(p_2) = 0$ akkor és csak akkor ha $p_2 = -\ln(2) = -0.693147$, míg a második derivált mindig pozitív. Így a függvénynek a p_2 pontban minimuma van, attól balra szigorúan monoton csökkenő, jobbra pedig szigorúan monoton növekvő; továbbá mindenütt alulról konvex. Határértéke a $\pm\infty$ -ben egyaránt $+\infty$. Mindezek alapján felvázolható a függvény grafikonja (12.2. ábra).



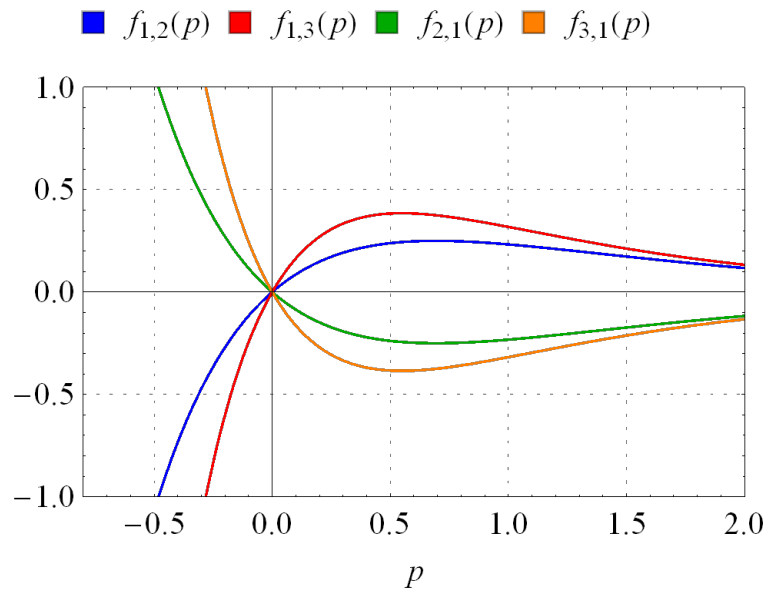
12.2. ábra. Az f függvény, annak első és második deriváltjának grafikonja

2. Legyen tehát $A, B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Egyszerű számolás mutatja, hogy az $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f(\varphi) := \varphi \mapsto Ae^{-\lambda\varphi} - Be^{-\mu\varphi}$ függvénynek egyetlen gyöke van: $\varphi_0 = \ln(A/B)/(\lambda - \mu)$, s ennek az előjele megegyezik az $(A - B)(\lambda - \mu)$ kifejezés előjével. (Feltehető, hogy $\lambda \neq \mu$, ugyanis ellenkező esetben egyetlen exponenciális függvényről van szó.) A függvény az egész számegyenesen folytonos, sőt végtelen sokszor deriválható, első két deriváltja: $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f'(\varphi) := -\lambda Ae^{-\lambda\varphi} + \mu Be^{-\mu\varphi}$, $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto f''(\varphi) := \lambda^2 Ae^{-\lambda\varphi} - \mu^2 Be^{-\mu\varphi}$; s ezek nullahelyei: $f'(\varphi_1) = 0$, akkor és csak akkor ha $\varphi_1 = \ln(A\lambda/(B\mu)) = (\lambda - \mu)$, illetve $f''(\varphi_2) = 0$ akkor

és csak akkor ha $\varphi_2 = \ln(A\lambda^2/(B\mu^2))/(\lambda - \mu)$. Mivel

$$\begin{aligned} f''(\varphi_1) &= \lambda^2 A \exp\left(\frac{-\lambda}{\lambda - \mu} \ln\left(\frac{A\lambda}{B\mu}\right)\right) - \mu^2 B \exp\left(\frac{-\mu}{\lambda - \mu} \ln\left(\frac{A\lambda}{B\mu}\right)\right) \\ &= B(\lambda - \mu)\mu \left(\frac{A\lambda}{B\mu}\right)^{-\frac{\mu}{\lambda - \mu}}, \end{aligned}$$

ezért a függvénynek a φ_1 pontban pontosan akkor van minimumhelye, ha $\lambda > \mu$, és pontosan akkor van maximumhelye, ha $\lambda < \mu$. A függvény az első esetben a szélsőértékhelytől balra szigorúan monoton csökkenő, a szélsőértékhelytől jobbra pedig szigorúan monoton növekedő. A függvény a második esetben a szélsőértékhelytől balra szigorúan monoton növekedő, a szélsőértékhelytől jobbra pedig szigorúan monoton csökkenő. Mivel a φ_2 pontban a függvény harmadik deriváltja nem tűnik el, ezért ez a pont inflexiós pont. A függvény határértéke a $+\infty$ -ben 0, a $-\infty$ -ben pedig $-\infty$. Mindezek alapján felhasználva azt is, hogy $\varphi_i = \frac{\ln(A/B) + i \ln(\lambda/\mu)}{\lambda - \mu}$ ($i = 0, 1, 2$) a különböző esetekben felvázolható a függvény grafikonja (12.3. ábra).



12.3. ábra. Az $f_{\lambda,\mu}$ függvény grafikonja különböző λ, μ paraméterek esetén, ($A = B = 1$)

12.17. Megoldás (Feladat) Legyen $a, b \in \mathbb{R}; a < b$, és tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *integrálható* és *létezik primitív függvénye*. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

ahol F az f függvény *bármely* primitív függvénye: $F \in \int f$ tetszőleges.

12.18. Megoldás (Feladat) Mivel V, φ és ψ mindkét esetben egyaránt deriválható, ezért a vizsgált összetett függvény is. Továbbá az első esetben

$$V(\varphi(t), \psi(t)) = \operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t) = 1 + 2 \operatorname{sh}^2(t)$$

miatt a derivált

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto 4 \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) = 2 \operatorname{sh}(2t),$$

a második esetben pedig

$$V(\varphi(t), \psi(t)) = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \quad (t \in \mathbb{R})$$

miatt a derivált az egész számegyenesen értelmezett nulla függvény.

12.19. Megoldás (Feladat) Egy-egy gyakran használt változatot mondunk ki. Emlékeztetünk arra, hogy $\int_a f$ jelöli az $a \in \mathbb{R}$ valós számot tartalmazó intervallumon értelmezett f függvény a pontban eltűnő primitív függvényét, $\int f$ pedig az f függvény primitív függvényeiből álló halmazt: az f függvény határozatlan integrálját.

1. Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallum, és legyen $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá legyen $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre $R_g \subset J$. Ha az f függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az $(f \circ g)g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és tetszőleges $a \in I$ esetén

$$\int_a (f \circ g)g' = \left(\int_{g(a)} f \right) \circ g.$$

Következmény: a két primitív függvényekből álló *halmaz* megegyezése:

$$\int (f \circ g)g' = \left(\int f \right) \circ g,$$

ahol a jobb oldalon a kompozícióképzés elemenként értendő.

2. Legyen $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$, $a < b$. Ha az f függvény folytonos az $]a, b[$ intervallumon, a $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow]a, b[$ függvény pedig folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'.$$

12.20. Megoldás (Feladat) Írjuk föl a jobb oldalon szereplő, -1 pontban eltűnő primitív függvényt lokális alakban (vagyis a – tetszőleges – $p \in \mathbb{R}$ helyen):

$$\int_{-1}^p (f \circ (\text{id}, u))(s) ds = \int_{-1}^p u(s) ds = \int_{-1}^p 3 \exp(s+1) ds.$$

A végső integrál kiszámításával kapjuk a bizonyítandó állítást.

$$3 + 3 \left[\exp(s+1) \right]_{-1}^p = 3 + 3(\exp(p+1) - 1) = 3 \exp(p+1) = u(p) \quad (p \in \mathbb{R}).$$

12.21. Megoldás (Feladat)

1. Nyilván a $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ ($x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$) függvény primitív függvényei $\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln(x(t)) + K$ alakúak, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ezek közül az 1 pontban a nullát pontosan az veszi föl, amelyre $\ln(x(1)) + K = 0$, vagyis amelynél $K = -\ln(x(1))$, így a kívánt primitív függvény:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln \left(\frac{x(t)}{x(1)} \right).$$

2. A fentiekhez hasonló módon a primitív függvény:

$$\mathbb{R} \ni k \mapsto \frac{\cos^4(1) - \cos^4(k)}{4}.$$

12.22. Megoldás (Feladat)

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \text{abs}(x) - 2$,
2. $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\sin^5(t) + \sin^5(2)}{5}$.

Az első esetben kapott függvény nem deriválható, tehát nem lehet primitív függvény. A második esetben az integrálfüggvény egyúttal primitív függvény is.

12.23. Megoldás (Feladat) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos. Akkor akárhogyan is választjuk meg az $x_0 \in [a, b]$ számot, az f függvény x_0 pontban eltűnő F integrálfüggvénye, azaz

$$[a, b] \ni x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^x f$$

egyúttal az f függvény x_0 pontban eltűnő primitív függvénye is.

12.24. Megoldás (Feladat) Az értelmezési tartomány a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y^2 - x > 0, \alpha < x + y^2 < \beta\}$$

halmaz tetszőleges részhalmaza, célszerűen leginkább a fenti halmaz *rész-tartománya* (összefüggő, nyílt részhalmaza). Tartományt pontosan akkor kapunk, ha $\beta < 0$; ekkor $3y^2 - x > 0$ automatikusan teljesül. Az egész H halmazon értelmezett parciálisderivált-függvények:

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x, y) &= \frac{\varphi(x + y^2)}{x - 3y^2} + \ln(-x + 3y^2)\varphi'(x + y^2), \\ \partial_2 u(x, y) &= -\frac{6y\varphi(x + y^2)}{x - 3y^2} + 2y \ln(-x + 3y^2)\varphi'(x + y^2). \end{aligned}$$

12.25. Megoldás (Feladat) Értelmezési tartományként célszerű tartományt választani.

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto a(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned} \partial_1 a(x, y) &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \partial_2 a(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_1^2 a(x, y) &= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, & \partial_2^2 a(x, y) &= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \partial_{12} a(x, y) &= \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \frac{2x^2}{\pi}\} \ni (x, y) \mapsto b(x, y) := \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned} \partial_1 b(x, y) &= \frac{2x}{y \cos^2(x^2/y)}, & \partial_2 b(x, y) &= -\frac{x^2}{y^2 \cos^2(x^2/y)}, \\ \partial_1^2 b(x, y) &= 2\frac{y + 4x^2 \operatorname{tg}(x^2/y)}{y^2 \cos^2(x^2/y)}, & \partial_2^2 b(x, y) &= 2x^2 \frac{y \cos(x^2/y) + x^2 \sin(x^2/y)}{y^4 \cos^3(x^2/y)}, \\ \partial_{12} b(x, y) &= -2x \frac{y \cos(x^2/y) + 2x^2 \sin(x^2/y)}{y^3 \cos^3(x^2/y)}. \end{aligned}$$

Adjunk meg további lehetséges értelmezési tartományokat.

3. $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto c(x, y) := x^y$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned}\partial_1 c(x, y) &= y^{y-1}, & \partial_2 c(x, y) &= x^y \ln(x), \\ \partial_1^2 c(x, y) &= x^{y-2}(y^2 - y), & \partial_2^2 c(x, y) &= x^y \ln^2(x), \\ \partial_{12} c(x, y) &= x^{y-1}(1 + y \ln(x)).\end{aligned}$$

4. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto d(x, y) := \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ mindenütt végtelen sokszor deriválható, deriváltjai:

$$\begin{aligned}\partial_1 d(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & \partial_2 d(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \partial_1^2 d(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \partial_2^2 d(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_{12} d(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

12.26. Megoldás (Feladat) Legyen $\Xi(x, y) := \ln(x)$ és $H(x, y) := \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$). A (Ξ, H) függvénpár invertálható, és inverze az $X(\xi, \eta) := \exp(\xi)$ és $Y(\xi, \eta) := \operatorname{sh}(\eta)$ ($(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ összefüggéssel értelmezett függvénpár. Ezekkel $z = u \circ (\Xi, H)$, vagyis $u = z \circ (X, Y)$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint (globális alakban) ezt kapjuk: $z' = u' \circ (\Xi, H) \cdot (\Xi, H)'$, aminek megszokottabb (lokális) alakja:

$$\begin{aligned}(\partial_1 z(x, y), \partial_2 z(x, y)) &= \\ &= \left(\partial_1 u \left(\ln(x), \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \right), \partial_2 u \left(\ln(x), \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{x} \partial_1 u \left(\ln(x), \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \right), \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \partial_2 u \left(\ln(x), \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \right) \right).\end{aligned}$$

Mivel innen $x \partial_1 z(x, y) = \partial_1 u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2}))$ és $\sqrt{1 + y^2} \partial_2 z(x, y) = \partial_2 u(\ln(x), \ln(y + \sqrt{1 + y^2}))$, ezért az eredeti egyenlet így módosul: $\partial_1 u(\xi, \eta) + \partial_2 u(\xi, \eta) = \exp(\xi) \operatorname{sh}(\eta)$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$.

12.27. Megoldás (Feladat) Definiáljuk a

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto g(x,y) := \frac{y}{x^2 + y^2}$$

kétszer folytonosan differenciálható függvényeket. Akkor ezekkel $w = u \circ (f, g)$, továbbá

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} &= \frac{(y^2 - x^2) \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} - 2xy \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} &= \frac{-2xy \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} + (x^2 - y^2) \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} (x^2 + y^2)^4 &= (x^2 + y^2)^2 \frac{\partial^2 u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x^2} + \\ &+ 4xy(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x \partial y} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y^2} + \\ &+ 2x(x^4 - 2x^2 y^2 - 3y^4) \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} + \\ &+ 2y(3x^4 + 2x^2 y^2 - y^4) \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} (x^2 + y^2)^4 &= 2xy^3 \frac{\partial^2 u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x^2} + \\ &+ 2y(y^2 - x^2) \frac{\partial^2 u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x \partial y} + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial^2 u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y^2} + \\ &+ 2x(-x^4 + 2x^2 y^2 + 3y^4) \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} + \\ &+ 2y(-3x^4 - 2x^2 y^2 + y^4) \frac{\partial u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Az utóbbiak összeadásával kapjuk a bizonyítandó állítást.

12.28. Megoldás (Feladat) A megadott függvénpárokkal azonos tartományon értelmezett, valós értékű differenciálható függvényeket keresünk, amelyek parciálisderivált-függvényei éppen a megadott függvények.

1. Mivel $D_{(P,Q)} = \mathbb{R}^2$ egyszerűen összefüggő (vagy mert konvex, illetve pontra nézve csillagszerű) tartomány és

$$\partial_2 P(x, y) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) = \partial_1 Q(x, y), \quad (12.1)$$

ezért létezik olyan $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, amelyre

$$\partial_1 F = P \quad \text{és} \quad \partial_2 F = Q$$

teljesül. Egy ilyen primitív függvényt például úgy kaphatunk meg, hogy tetszőleges rögzített y mellett kiindulunk $x \mapsto P(x, y)$ primitív függvényeiből, ezek nyilván(!)

$$x \sin(xy) + \varphi(y)$$

alakúak valamilyen φ differenciálható függvénnyel. Ezután – megkövetelve az $\partial_2 F = Q$ összefüggést: $x^2 \cos(xy) + \varphi'(y) = x^2 \cos(xy) -$ adódik, hogy φ állandó. A keresett primitív függvény tehát

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) := x^2 \cos(xy) + \varphi_0.$$

alakú, az $F(1, 1) = 0$ feltételből pedig következik, hogy $\varphi_0 = -\cos(1)$.

2. Figyelembe véve, hogy

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

nyilvánvalóan $(\mathbb{R}^+)^2 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) := \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ megfelel egy primitív függvénynek, s az összes primitív függvény halmaza $\{F + K; K \in \mathbb{R}\}$. Az $F(1, 1) + K = 0$ feltételből $K = -\pi/4$.

3. Itt éppúgy, mint az előbb, teljesül $\partial_2 P = \partial_1 Q$, viszont $D_{(P,Q)} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nem egyszerűen összefüggő, nem konvex, nem is csillagszerű. A primitív függvények most is csak $(x, y) \mapsto F(x, y) := \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + K$ alakúak lehetnének, de ezek a függvények az egész első koordinátengelyen nincsenek értelmezve, így ezen a halmazon az adott függvénpárnak nem létezik primitív függvénye.

12.29. Megoldás (Feladat) Akkor, ha a vektorok valamely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nulla vektor, ha az együtthatók valamennyien nullák.

12.30. Megoldás (Feladat) Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Karakterisztikus polinom	Sajátértékek	Sajátvektorok
$\lambda - \lambda^3$	-1	$(-1, -1, 2)^\top$
	1	$(-1, 0, 1)^\top$
	0	$(-1, -1, 1)^\top$
$5 - 4\lambda + \lambda^2$	$2 + i$	$(2 + i, 1)^\top$
	$2 - i$	$(2 - i, 1)^\top$
$4 - 3\lambda^2 - \lambda^3$	-2	$(-1, 0, 1)^\top$
	-2	$(-1, 1, 0)^\top$
	1	$(1, 1, 1)^\top$
$6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$	3	$(1, 0, 1)^\top$
	2	$(1, 1, 1)^\top$
	1	$(0, 1, 1)^\top$

A harmadik esetben a kétszeres sajátértékhez találtunk két lineárisan független sajátvektort. Keressünk példát arra az esetre, amikor egy kétszeres sajátértékhez nem létezik két lineárisan független sajátvektor.

12.31. Megoldás (Feladat) Az egyenletrendszer két egyenletét tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén összeadva kapjuk, hogy:

$$5d_2(t) \exp(-3t) = 1 + 4t + \frac{3}{2}t^2,$$

ahonnan

$$d_2(t) = \frac{\exp(3t)}{10} (2 + 8t + 3t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezt felhasználva akár az első, akár a második egyenletből adódik:

$$d_1(t) = \frac{\exp(-2t)}{5} (-1 - 4t + 6t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Némi nehézséget annak megértése szokott okozni ennél a feladatnál, hogy a megoldandó egyenletrendszer *minden* $t \in \mathbb{R}$ esetén egy-egy lineáris algebrai egyenletrendszer.

12.32. Megoldás (Feladat) A két vektor lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha $\lambda_1 = -i\lambda_2$. Nyilvánvaló, hogy a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetben ez az egyenlőség csak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ esetén áll fenn. Ha viszont $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, akkor a $\lambda_1 := \alpha + i\beta$ és $\lambda_2 := \beta - i\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ választással a lineáris kombináció a zérus vektort eredményezi.

12.33. Megoldás (Feladat) Az egyenlet diszkriminánsa $D := p^2 - 4q$. Ha $p, q > 0$, akkor a $D > 0$ esetben $\sqrt{p^2 - 4q} < \sqrt{p^2} = |p|$, vagyis $\lambda_{1,2} < (-p \pm |p|)/2 \leq 0$. A $D = 0$ esetben $\lambda_{1,2} = -p/2 < 0$, végül $D < 0$ esetén $\lambda_{1,2} = \operatorname{Re}(-p \pm i\sqrt{4q - p^2})/2 = -p/2 < 0$. Ha $p, q \leq 0$, akkor $D \geq 0$, továbbá $\lambda_1 = (-p + \sqrt{p^2 - q})/2 \leq 0$ és $\lambda_2 = (-p - \sqrt{p^2 - q})/2 \geq -p \geq 0$.

12.34. Megoldás (Feladat) Az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

vektorok \mathbb{R} fölött lineárisan függetlenek. Egy tetszőleges vektor előállítására:

$$\begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix},$$

tehát a fenti négy vektor generátorrendszert alkot. Hasonlóan

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

\mathbb{C} fölött lineárisan független, és

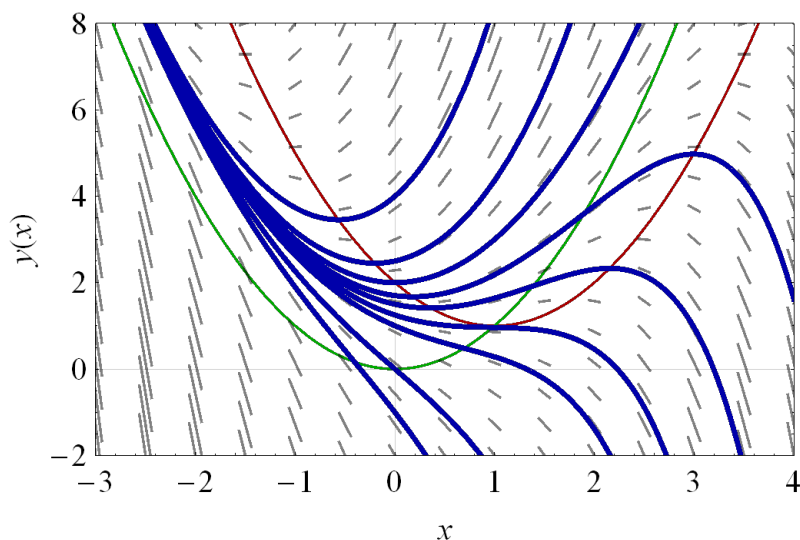
$$\begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = (a + bi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (d - ci) \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

13. fejezet

Alapok

13.1. Elemi kvalitatív vizsgálat

13.35. Megoldás (Feladat) Ha valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén $y'(x) = 0$ és $y''(x) \neq 0$, akkor az y függvénynek szélsőértéke van az x pontban. Az első feltételből a függvénynek az $y(x) = x^2 - 2x + 2$ egyenletet teljesítő pontokban lehetséges szélsőértéke. És mivel ezekben a pontokban $y''(x) = -2x + 2$, ezért az is kiderül, hogy a szélsőértékek minimumok $x < 1$ esetén, maximumok $x > 1$ esetén (13.1. ábra, piros parabola). Az $x = 1$ esetben $y'(1) = y''(1) = 0$



13.1. ábra. Iránymező, fontosabb görbék és néhány megoldás (kék színnel)

és mivel $y^{(3)}(x) = -2 \neq 0$, ezért annak a függvénynek, amelyre $y(1) = 1$ teljesül az $x = 1$ pontban inflexiós pontja van. Az $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ parabola

fölött a függvény monoton növekvő, alatta pedig monoton csökkenő. Mivel $y''(x) = y'(x) - 2x + 2 = y(x) - x^2$, ezért azon x pontokban amelyekre $y(x) > x^2$, a függvény konvex; amelyekre pedig $y(x) < x^2$, a függvény konkáv (13.1. ábra, zöld parabola).

13.36. Megoldás (Feladat) Az y függvény szigorúan monoton növekvő, mert ha $y'(x) > 0$ és $y(0) = 0$, akkor $y(x) > 0$, ha $x > 0$ és $y(x) < 0$, ha $x < 0$. A függvény második deriváltjára $y''(x) = 2x + 2y(x)(x^2 + y^2(x)) = 0$, akkor és csak akkor ha $x = 0$, és itt $y'''(0) = 2$, tehát a nulla valóban inflexiós pontja a kezdetiérték-probléma megoldásának.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy van a nullán kívül is inflexiós pont, nevezzük ezt x_* -nak. Ekkor $y''(x_*) = 0$ pontosan akkor teljesül, amikor $y(x_*) = -x_*/(x_*^2 + y^2(x_*))$, ez azonban ellentmondás, hiszen ha $x_* > 0$, akkor $y(x_*) < 0$, és ha $x_* < 0$, akkor $y(x_*) > 0$.

13.37. Megoldás (Feladat) Mivel $y'(x) > 0$, ha $x > 1$, ezért y szigorúan monoton növekvő, vagyis $y(x) > y(1) = 1$, ha $x > 1$. Ezért

$$y'(x) < \frac{1}{x^2 + 1} \quad (x > 1),$$

ahonnan integrálással

$$y(x) < 1 + \arctg(x) - \frac{\pi}{4} < 1 + \frac{\pi}{4},$$

ami azt mutatja, hogy y korlátos és mivel szigorúan monoton növekvő, létezik határértéke a $+\infty$ -ben, és erre (ismét a legutóbbi egyenlőtlenség miatt)

$$\lim_{+\infty} y \leq 1 + \frac{\pi}{4}$$

teljesül.

13.38. Megoldás (Feladat) Az első feltételnek eleget tevő halmazok például:

$$T_1 = \{(p, q, r) \in \Omega \times \mathbb{R} : p \in]0, 4[, p = q, r = 2\},$$

$$T_2 = \left\{ (p, q, r) \in \Omega \times \mathbb{R} : p \in]0, 4[, q = \frac{5}{2}\sqrt{p} + 1, r = \frac{1}{4}p - \frac{5}{8}\sqrt{p} + \frac{7}{4} \right\},$$

míg egy megoldás például

$$T_3 = \{(p, q, r) \in \Omega \times \mathbb{R} : p \in]0, 4[, q = p + 4, r = 1\}.$$

A feladat azt illusztrálja, hogy a differenciálegyenlet megoldása olyan függvény, amely illeszkedik az iránymezőhöz: deriváltját egy adott pontban a jobb oldal határozza meg.

13.2. Elemi kvantitatív vizsgálat

13.39. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg a függvény deriváltjait:

$$y'(x) = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x), \quad y''(x) = -C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x) = -y(x),$$

tehát valóban $y''(x) + y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

13.40. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg a függvény deriváltjait:

$$y'(x) = C_1 \operatorname{sh}(x) + C_2 \operatorname{ch}(x), \quad y''(x) = C_1 \operatorname{ch}(x) + C_2 \operatorname{sh}(x) = y(x),$$

tehát valóban $y''(x) - y(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

13.41. Megoldás (Feladat) A függvény n -edik deriváltja ($n = 0, 1, \dots$):

$$y^{(n)}(x) = C_1 \lambda_1^n e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^n e^{\lambda_2 x}.$$

A bizonyítandó kifejezésbe (megfelelő n értékek mellett) behelyettesítve:

(13.1)

13.42. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg a deriváltakat:

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^{n-1} [(nC_1 + C_2) \cos(\ln(x)) + (nC_2 - C_1) \sin(\ln(x))] \\ y''(x) &= x^{n-2} [(n^2 - n - 1)C_1 + (2n - 1)C_2] \cos(\ln(x)) + \\ &\quad + [(1 - 2n)C_1 + (n^2 - n - 1)C_2] \sin(\ln(x)). \end{aligned}$$

A bizonyítandó kifejezésbe behelyettesítve innen már belátható az azonosság.

13.43. Megoldás (Feladat) A φ függvény deriváltja nulla, így egyszerűen látható, hogy valóban megoldás. A második esetben pedig a

$$\psi'(x) = (x - x_0)^2 = \sqrt[3]{9 \left(\frac{1}{3}(x - x_0)^3 + 2 - 2 \right)^2}$$

egyenlőség is teljesül.

13.3. Alapfogalmak

13.44. Megoldás (Feladat) A közös megoldások deriváltja azonos, tehát

$$2y^2(x) + y(x) - (x^2 + 2x^4) = 0,$$

ebből kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8x^2 + 16x^4}}{4} = \begin{cases} x^2, \\ -x^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Behelyettesítéssel belátható, hogy mindkét függvény közös megoldás.

13.45. Megoldás (Feladat) Az $\mathbb{R}^2 \ni (p, q) \mapsto \sin(pq)$ jobb oldal második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, ezért az egyértelműség miatt: $\varphi(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

13.46. Megoldás (Feladat) A jobb oldal értelmezési tartományának vehető: $\Omega := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Legyen $y_0(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}^+$). A fokozatos közelítéshez azt az A operátort kell ismételtelen alkalmaznunk (először az y_0 függvényre), amelyet az

$$(A\varphi)(x) := 1 - \int_1^x \frac{\varphi(s)}{s} ds \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

képlet értelmez. Ezzel

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (Ay_0)(x) = 1 - \ln(x) \\ y_2(x) &= (Ay_1)(x) = 1 - \ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2}, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= (Ay_{n-1})(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-\ln(x))^k}{k!}, \end{aligned}$$

ahonnan adódik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \exp(-\ln(x)) = 1/x$, ($x \in \mathbb{R}^+$).

13.47. Megoldás (Feladat) A sík tetszőleges (x_0, y_0) pontján két megoldás halad át, de nem végtelen sok. Általános megoldás: $\{x \mapsto x + C : C \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mapsto -x + c : c \in \mathbb{R}\}$, általános integrál: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x - c)(y + x - c) = 0; c \in \mathbb{R}\}$.

13.48. Megoldás (Feladat) *Első megoldás.* Mivel $(yy')' = 0$, ezért $y(x)y'(x) = c_1/2$ ($x \in D_y$) és így $y^2(x) = c_1x + c_2$ minden $x \in D_y$ esetén, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy létezik olyan $J \in \mathbb{R}$ nyílt intervallum, amire $c_1x + c_2 \geq 0$, $x \in J$, és az ilyen intervallumokon csak $y(x) = \pm\sqrt{c_1x + c_2}$ lehet a megoldás. Behelyettesítés mutatja, hogy ezek a függvények valóban megoldásai az egyenletnek. A maximális J intervallumok és a c_1, c_2 számok kapcsolata:

$$\begin{array}{lll} c_1 = 0 & c_2 \geq 0 & J = \mathbb{R}, \\ c_1 = 0 & c_2 < 0 & J = \emptyset \\ c_1 < 0 & c_2 \in \mathbb{R} & J =] - \infty, -c_2/c_1 [\\ c_1 > 0 & c_2 \in \mathbb{R} & J =] - c_2/c_1, +\infty [\end{array}$$

Második megoldás. Olyan $y \in \mathcal{C}^2$ függvényt keresünk, amelynek értelmezési tartománya valamely $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és amelynek inverze létezik és folytonosan differenciálható. Mivel ekkor nincs olyan $x_1, x_2 \in J$, $x_1 \neq x_2$ amelyre $y(x_1) = y(x_2)$ és $y'(x_1) \neq y'(x_2)$ (hiszen már $y(x_1) = y(x_2)$ sem fordulhat elő), ezért van olyan, az $R_y = y(J)$ nyílt intervallumon értelmezett $p: R_y \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amellyel $y'(x) = p(y(x))$ teljesül. (Ugyanis adott z és y függvényekhez létezik olyan p függvény hogy $z = p \circ y$ pontosan akkor, ha nem fordul elő, hogy $y'(x_1) = y'(x_2)$, de $z(x_1) \neq z(x_2)$.) Ekkor viszont

$$y''(x) = p'(y(x))y'(x) = p'(y(x))p(y(x)) \quad (y \in J),$$

és ezek után az eredeti egyenletünk így alakul:

$$y(x)p'(y(x))p(y(x)) + (p(y(x)))^2 = 0 \quad (x \in J).$$

Ha $\tilde{y} \in R_y$ az az elem, amelyre $y(x) = \tilde{y}$, akkor

$$\tilde{y}p'(\tilde{y})p(\tilde{y}) + (p(\tilde{y}))^2 = 0 \quad (\tilde{y} \in R_y).$$

Ennek a szétválasztható változójú differenciálegyenletnek a megoldását a leggyorsabban úgy kapjuk meg, hogy bevezetjük a $q(\tilde{y}) := p(\tilde{y})^2$ ($\tilde{y} \in R_y$) összefüggéssel értelmezett q függvényt, amelyre

$$\tilde{y}\frac{1}{2}q'(\tilde{y}) = -q(\tilde{y})$$

áll, ahonnan $q(\tilde{y}) = c_1/\tilde{y}^2$ ($\tilde{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges). Így $p(\tilde{y}) = c_2/\tilde{y}$ ($\tilde{y} \in \mathbb{R}^+$; $c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges), tehát $y'(x) = c_2/y(x)$ ($x \in J$), vagyis $2y'(x)y(x) = 2c_2$, tehát $y^2(x) = 2(c_2x + c_3)$, és innen az előző megoldásnál leírt diszkusszió következik.

13.49. Megoldás (Feladat) Kétszeres integrálással az

$$y(x) = \int_0^x \left(1 - \int_0^t y(s) ds \right) dt = x + \int_0^x (t-x)y(t) dt$$

(Volterra¹-féle másodfajú) integrálegyenletet kapjuk.

13.50. Megoldás (Feladat) Ha $\xi = 0$, akkor a teljes megoldás $x(t) = 0$, $D_x = \mathbb{R}^+$, (és ennek az egész valós számegyenesre vett kiterjesztése megoldása a $t\dot{x}(t) = x^2(t)$ implicit egyenletnek). Ha $\xi \neq 0$, akkor

$$x(t) = \frac{\xi}{1 - \xi \ln(t/\tau)}, \quad \begin{cases} t \in]0, \tau e^{1/\xi}[, & \text{ha } \xi > 0, \\ t \in]\tau e^{1/\xi}, +\infty[, & \text{ha } \xi < 0. \end{cases}$$

13.51. Megoldás (Feladat) Ha megoldjuk az egyenletet a $\xi = 0$ kezdeti feltétellel, továbbá az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ és az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ halmazon, akkor azt kapjuk, hogy a teljes megoldás:

$$x(t, \tau, \xi) = \frac{2\xi}{2 + \xi(\tau^2 - t^2)},$$

aminek értelmezési tartománya

$$D_x = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } \frac{2}{\tau^2} < \xi \leq 0, \\ \left] -\sqrt{\frac{2}{\xi} + \tau^2}, \sqrt{\frac{2}{\xi} + \tau^2} \right[, & \text{ha } \xi > 0, \\ \left[\sqrt{\frac{2}{\xi} + \tau^2}, +\infty \right[, & \text{ha } \xi < -\frac{2}{\tau^2} \text{ és } \tau > 0, \\ \left] -\infty, -\sqrt{\frac{2}{\xi} + \tau^2} \right[, & \text{ha } \xi < -\frac{2}{\tau^2} \text{ és } \tau < 0. \end{cases}$$

13.52. Megoldás (Feladat) Legyen

$$\text{sign}(t) := \begin{cases} -1, & \text{ha } t < 0, \\ 0, & \text{ha } t = 0, \\ 1, & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

az előjelfüggvény és legyen $\Omega := \mathbb{R}^2$. Az $\dot{x}(t) = \text{sign}(t)$ differenciálegyenletnek nyilván semmilyen kezdeti érték mellett nincs megoldása, mert a sign függvény nem rendelkezik a Darboux-tulajdonsággal. Viszont tetszőleges $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ mellett $x(t) = x_0 + \text{abs}(t) - \text{abs}(t_0)$ ($t \in \mathbb{R}$) a megfelelő integrálegyenlet megoldása (tudniillik, ez éppen maga a megfelelő integrálegyenlet), tehát példánkban a két egyenlet megoldásainak halmaza különböző, a két egyenlet nem ekvivalens.

¹Volterra, Vito (1860–1940) olasz matematikus, a parciális differenciálegyenletek és az integálegyenletek művelője, a populációdinamika úttörője. Életrajz, fénykép: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>.

13.53. Megoldás (Feladat) Mivel $\partial_2 f(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$, ezért az (x, cx) , $x > 0$ alakú pontok mentén $\partial_2 f(x, cx) = 1/\sqrt{1 + c^2}$, vagyis a deriváltak az origóban nincs határértéke. Viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$\left| \sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2} \right| \leq |y_1 - y_2|,$$

tehát az $L = 1$ Lipschitz-állandóval teljesül a feltétel. Megjegyzendő, hogy analóg állítás igaz a $g(x) := \sqrt{x^2} = |x|$ összefüggéssel értelmezett g függvényre is.

13.54. Megoldás (Feladat) Bebizonyítjuk, hogy ha φ_1 és φ_2 különböző megoldása a feladatban szereplő kezdetiérték-problémának, akkor f nem elégíti ki a második változójában a Lipschitz-féle feltételt. Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 < x_1 \in \mathbb{R}$ szám, hogy $(x_1, \varphi_1(x_1)) \in \Omega$ és $(x_1, \varphi_2(x_1)) \in \Omega$ teljesül, de $\varphi_1(x_1) \neq \varphi_2(x_1)$, és legyen

$$\xi := \inf \{x^* > x_0; |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > 0, \text{ ha } x \in]x^*, x_1]\},$$

akkor $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) = 0$. Az ekvivalens integrálegyenletek

$$\varphi_i(x) = y_0 + \int_{\xi}^x f(t, \varphi_i(t)) dt \quad (x \in]\xi, x_1]; i = 1, 2).$$

Legyen $0 < \varepsilon < x_1 - \xi$, és az ilyen ε -ra legyen

$$x_\varepsilon := \arg(\max \{|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|; t \in [\xi, \xi + \varepsilon]\}).$$

Mivel $|f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_2(\xi))| = 0$, ezért $x_\varepsilon \neq \xi$, tehát $x_\varepsilon \in]\xi, x_1]$ és így $|\varphi_1(x_\varepsilon) - \varphi_2(x_\varepsilon)| \neq 0$. Az integrálegyenletekből

$$|f(x_\varepsilon, \varphi_1(x_\varepsilon)) - f(x_\varepsilon, \varphi_2(x_\varepsilon))| > \frac{\varphi_1(x_\varepsilon) - \varphi_2(x_\varepsilon)}{x_\varepsilon - \xi}.$$

Elegendően kicsiny ε mellett $1/(x_\varepsilon - \xi)$ tetszőlegesen nagy, azaz $(\xi, \varphi_1(\xi))$ bármely kicsi környezetében van $(x_\varepsilon, \varphi_1(x_\varepsilon)); (x_\varepsilon, \varphi_2(x_\varepsilon))$ pontpár, ahol a Lipschitz-feltétel nem teljesül.

14. fejezet

Néhány egyszerű típus

14.1. Közvetlenül integrálható egyenletek

14.55. Megoldás (Feladat) A megoldáshoz két alkalmas tartományt választhatunk: $\Omega_1 :=]-\infty, -a[\times \mathbb{R}$ és $\Omega_2 :=]-a, +\infty[\times \mathbb{R}$. A megoldás mindkét tartományon az

$$y(x) = \int \frac{1}{x+a} dx = \ln(c(x+a))$$

alakban írható, ahol $c < 0$, ha $x \in]-\infty, -a[$ és $c > 0$, ha $x \in]-a, +\infty[$.

14.56. Megoldás (Feladat) Legyen $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Az általános megoldás integrálással kapható:

$$z(t) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \frac{3}{2}t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t \right) + C \quad (t \in \mathbb{R}).$$

14.57. Megoldás (Feladat) Az egyenlet jobb oldalát figyelembe véve definiáljuk a következő tartományokat:

$$\Omega_1 := \left] -\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right[\times \mathbb{R}, \quad \Omega_2 := \left] -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right[\times \mathbb{R}, \quad \Omega_3 := \left] \sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty \right[\times \mathbb{R}.$$

Integráljuk mind a két oldalt:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{r^2 - \frac{2}{3}} dr.$$

Végezzük el az integrandus parciális törtekre bontását:

$$\frac{1}{r^2 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(r + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \left(r - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}{r + \sqrt{\frac{2}{3}}} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}{r - \sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

Tehát a megoldás:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \int \frac{1}{r + \sqrt{\frac{2}{3}}} dr - \frac{1}{2\sqrt{6}} \int \frac{1}{r - \sqrt{\frac{2}{3}}} dr = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left(c \frac{r + \sqrt{\frac{2}{3}}}{r - \sqrt{\frac{2}{3}}} \right),$$

ahol $(r, \varphi(r)) \in \Omega_1 \cup \Omega_3$ esetén $c > 0$, illetve $(r, \varphi(r)) \in \Omega_2$ esetén $c < 0$.

14.58. Megoldás (Feladat) Legyen $\Omega :=]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}[\times \mathbb{R}$. Mindkét oldalt integrálva a megoldás:

$$\begin{aligned} u(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{2}p^2}} dp = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}p\right)^2}} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{3}{2}}p \right) + C \quad \left(p \in]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}[\right). \end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy a megoldás értelmezve van az értelmezési tartomány végpontjaiban, de ott nem deriválható.

14.59. Megoldás (Feladat) Legyen $\Omega_1 :=]0, \pi[\times \mathbb{R}$, illetve $\Omega_2 :=]-\pi, 0[\times \mathbb{R}$. Természetesen még végtelen sok hasonló tartományt definiálhatnánk, de akkor az ittenihez hasonlóan lehet eljárni. Alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát:

$$\frac{1}{\sin(\xi)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}.$$

Mindkét oldalt integrálva a megoldás:

$$z(\xi) = -\ln \left(\cos \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) + \ln \left(\sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) + C = \ln \left(c \operatorname{tg} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right),$$

ahol $(\xi, z(\xi)) \in \Omega_1$ esetén $c > 0$, illetve $(\xi, z(\xi)) \in \Omega_2$ esetén $c < 0$.

14.60. Megoldás (Feladat) Legyen $\Omega_1 :=]1, +\infty[\times \mathbb{R}$, illetve $\Omega_2 :=]-\infty, 1[\times \mathbb{R}$. Integrálva mindkét oldalt kapjuk a megoldást:

$$x(y) = \int \frac{1+y}{1-y} dy = \int \left(-1 - \frac{2}{y-1} \right) dy = -y - 2 \ln(c(y-1)),$$

ahol $c > 0$, ha $(y, x(y)) \in \Omega_1$, illetve $c < 0$, ha $(y, x(y)) \in \Omega_2$.

14.61. Megoldás (Feladat) Legyen $\Omega_1 :=] - 1, +\infty[\times \mathbb{R}$, illetve $\Omega_2 :=] - \infty, -1[\times \mathbb{R}$. Integrálva mindkét oldalt a megoldás:

$$\varphi(r) = \int \frac{r^2}{r+1} dr = \int \left(r - 1 + \frac{1}{r+1} \right) dr = \frac{r^2}{2} - r + \ln(c(r+1)),$$

ahol $c > 0$, ha $(r, \varphi(r)) \in \Omega_1$, illetve $c < 0$, ha $(r, \varphi(r)) \in \Omega_2$.

14.62. Megoldás (Feladat) Legyen $\Omega_1 :=] - 1, +\infty[\times \mathbb{R}$, $\Omega_2 :=] - 3, 1[\times \mathbb{R}$, illetve $\Omega_3 :=] - \infty, -3[\times \mathbb{R}$. A jobb oldal parciális törtekre bontásával és integrálásával a megoldás:

$$p(s) = \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+3} \right) ds = \frac{1}{4} \ln(s-1) - \frac{1}{4} \ln(s+3) + C = \frac{1}{4} \ln \left(c \frac{s-1}{s+3} \right)$$

ahol $(s, p(s)) \in \Omega_1, \Omega_3$ esetén $c > 0$, illetve $(s, p(s)) \in \Omega_2$ esetén $c < 0$.

14.63. Megoldás (Feladat) Feltesszük, hogy a hógolyók szabályos gömb alakúak. Jelölje az $r(t)$ a hógolyó sugarát a t időpontban. A gömb és így a hógolyó térfogatát és felszínét a következő összefüggések írják le a t időpontban:

$$V(r(t)) = \frac{4\pi}{3} r^3(t), \quad A(r(t)) = 4\pi r^2(t).$$

Azt a tényt, hogy a hógolyó fogy, megfogalmazhatjuk úgy, hogy a hógolyó tömege csökken, a feladat szövege szerint a következőképpen:

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} (\rho V(r(t))) = -k A(r(t)),$$

ahol $\rho > 0$ a hógolyó sűrűsége, és $k > 0$ az olvadás sebességét jellemző állandó. Átalakítással kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} V(r(t)) = -\frac{k}{\rho} A(r(t)).$$

Az egyenlet baloldalán elvégezve a deriválást, mindaddig, amíg a hógolyó sugara pozitív:

$$4\pi r^2(t) \dot{r}(t) = -\frac{k}{\rho} 4\pi r^2(t),$$

azaz $\dot{r}(t) = -K$, ahol $K = k/\rho > 0$ állandó.

Tegyük fel, hogy a két hógolyó a $t = 0$ időpontban repült be. A megoldás integrálással adódik:

$$\int_0^t \dot{r}(s) ds = - \int_0^t K ds,$$

vagyis $r(t) = -Kt + r(0)$. Tehát azt kaptuk, hogy a fentiekben felállított modell szerint a hógolyó sugara az idő múlásával lineárisan csökken. Így ha a kisebbik hógolyó kezdeti sugara R , akkor a két hógolyóra vonatkozó egyenlet:

$$r_1(t) = -Kt + R, \quad r_2(t) = -Kt + 2R.$$

Jelölje T azt az időpontot, amikor a kisebbik hógolyó teljesen elfogy, ekkor: $r_1(T) = -KT + R = 0$, amiből $T = R/K$. Ebben az időpontban a nagyobbik hógolyó sugara: $r_2(T) = -KR/K + 2R = R$, vagyis pontosan akkora, mint amekkora a kisebbik volt az olvadás kezdetekor.

14.2. Autonóm egyenletek

14.64. Megoldás (Feladat) Az $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tartományt választva, majd integrálással:

$$\int_0^x \frac{y'(s)}{\sqrt[3]{y^2(s)}} ds = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^{2/3}} d\eta = 3\sqrt[3]{y(x)} - 3\sqrt[3]{2} = x.$$

A teljes megoldás így $y(x) = (x/3 + \sqrt[3]{2})^3$, $x \in]-3\sqrt[3]{2}, +\infty[$.

14.65. Megoldás (Feladat) A feladatot az $\Omega := \mathbb{R}^2$ tartományon oldhatjuk meg. Az egyenlet nem autonóm, de arra visszavezethető, ugyanis ha elvégezzük az $u(x) := z(x) + x$ helyettesítést, akkor az $u'(x) = 10^{u(x)} + 1$ egyenletet kapjuk, aminek megoldásához az

$$u(x) := \lg(s(x) - 1), \quad u'(x) = \frac{1}{\ln(10)(s(x) - 1)} \quad (s(x) \in]1, +\infty[)$$

helyettesítést alkalmazva

$$\begin{aligned} \int \frac{u'(x)}{10^{u(x)} + 1} dx &= \frac{1}{\ln(10)} \int \frac{s'(x)}{s(x)(s(x) - 1)} dx = \frac{1}{\ln(10)} \int \frac{1}{t(t-1)} dt \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{\ln(10)} \ln \left(\frac{t-1}{t} \right) = \lg \left(\frac{10^{u(x)}}{10^{u(x)} + 1} \right) = x + C. \end{aligned}$$

Ebből kifejezve $u(x)$ -et és behelyettesítve a $z(x) = u(x) - x$ kifejezésbe kapjuk a megoldást:

$$z(x) = \lg(c10^x / (1 - c10^x)) - x, \quad x \in]-\infty, -\lg(c)[,$$

ahol $c = 10^C > 0$.

14.66. Megoldás (Feladat) Az egyenlet az $\Omega := \mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában értelmezhető. Alkalmazva az $u(x) := y(x) - x$ helyettesítést az $u'(x) = \cos(u(x)) - 1$ egyenlethez jutunk. A megoldáshoz osszunk le a jobboldalon szereplő kifejezéssel, ezt azonban csak az $\Omega_k := \mathbb{R} \times]2\pi k, 2\pi(k+1)[$, $k \in \mathbb{Z}$ tartományok valamelyikén tehetjük meg:

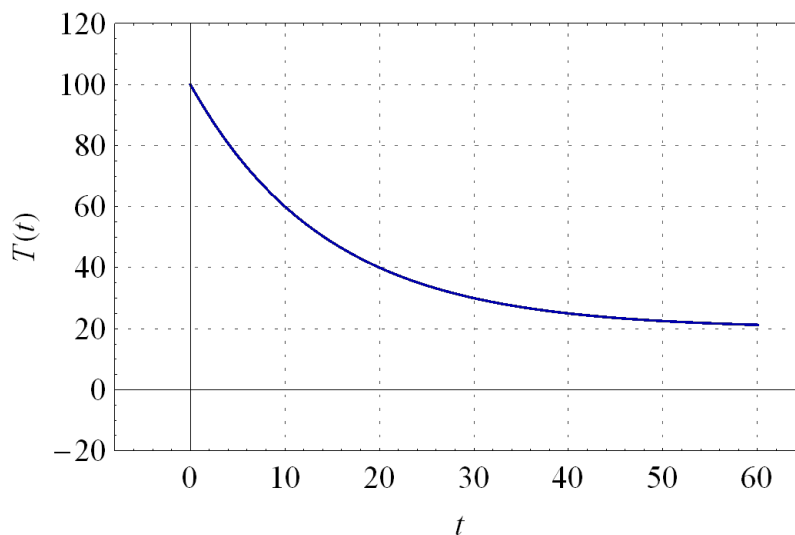
$$\begin{aligned} \int \frac{u'(x)}{\cos(u(x)) - 1} dx &= \int \frac{1}{\cos(s) - 1} ds = \int \frac{1}{\cos^2(s/2) - \sin^2(s/2) - 1} ds \\ &= \int \frac{1}{-2\sin^2(s/2)} ds = \frac{1}{\operatorname{tg}(s/2)} = x + C. \end{aligned}$$

Ebből az $s = u(x) = y(x) - x$ helyettesítéssel és invertálással a teljes megoldás:

$$y(x) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x + C} \right) + x + 2\pi k,$$

ahol k rögzített egész szám és $x \in]-\infty, -C[$, vagy $x \in]-C, +\infty[$.

14.67. Megoldás (Feladat) A Newton által megfogalmazott lehűlési törvény szerint; *egy test hőmérséklete időbeli változásának sebessége egyenesen arányos a környezet és a test hőmérsékletének különbségével.* Differenciálegyenlettel

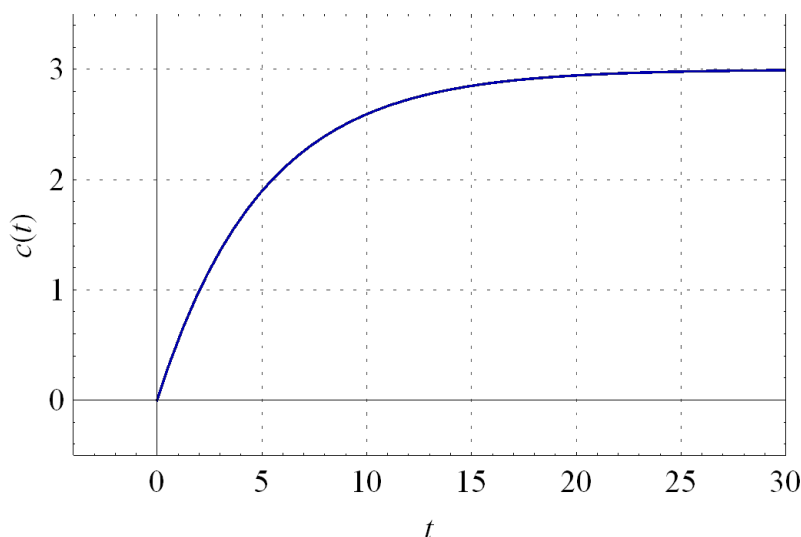


14.1. ábra. A kenyér hőmérséklete az idő függvényében

megfogalmazva: $T'(t) = k(T_k - T(t))$, ahol $T(t)$ a test hőmérséklete a t időpontban és $T_k = 20^\circ\text{C}$ az állandónak tekintett környezeti hőmérséklet, illetve $k > 0$ a hővezetési együttható. Mivel a feladat szövege szerint hűlésről

van szó, ezért feltehetjük, hogy $T(t) > T_k$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. A fenti egyenlet általános megoldása: $T(t) = T_k + ce^{-kt}$. A szövegben szereplő adatokat figyelembe véve: $T(0) = 100 = 20 + c$, és $T(10) = 60 = 20 + ce^{-10k}$, amiből $c = 80$, és $k = \ln(2)/10$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása: $T(t) = 20 + 80e^{-0.0693t}$. Jelölje t_* azt az időpontot, amikor a kenyér 25°C hőmérsékletű lesz: $T(t_*) = 25 = 20 + 80e^{-kt_*}$, amiből $t_* = 10 \ln(16)/\ln(2) = 10 \ln(2^4)/\ln(2) = 40$, vagyis a kenyerét 40 perc alatt hűl le az adott hőmérsékletre.

14.68. Megoldás (Feladat) Legyen az edényben lévő folyadék koncentrációja a t időpillanatban $c(t)$, a tömege $m(t)$, a befolyó folyadék állandó koncentrációja pedig c_{be} . A be-, illetve a kiáramlás sebessége k . Ezekről a következőket tudjuk: $c(t) = m(t)/10$, $c_{be} = 0.3$, és $k = 2/10$. A koncentrációra



14.2. ábra. A só koncentrációja az idő függvényében

vonatkozó egyenlet: $\dot{c}(t) = k(c_{be} - c(t))$, amiből a tömegre vonatkozó egyenlet $\dot{m}(t) = k(10c_{be} - m(t))$. Behelyettesítve az ismert adatokat a következő differenciálegyenlethez jutunk:

$$\dot{m}(t) = 0.2(3 - m(t)).$$

Mivel az edényben lévő folyadék sótartalma nem haladhatja meg a befolyó folyadék sótartalmát, ezért feltehetjük, hogy $0 \leq m(t) < 3$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ha kezdetben az edényben tiszta víz van, akkor ez azt jelenti, hogy $m(0) = 0$. Az egyenlet megoldása:

$$\int_0^t \frac{\dot{m}(s)}{3 - m(s)} ds = \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{1}{3 - p} dp = -\ln(3 - m(t)) + \ln(3) = 0.2t$$

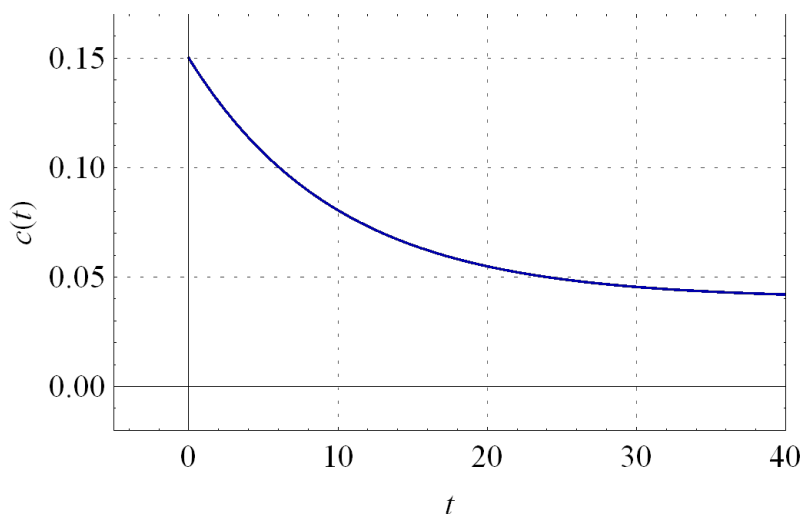
amiből a megoldás végül $m(t) = 3(1 - e^{-0.2t})$. Tehát 5 perc múlva $m(5) = 3(1 - e^{-1}) \approx 1.896$ kg sót tartalmaz az edényben lévő víz.

14.69. Megoldás (Feladat) A radioaktív bomlást leíró legegyszerűbb differenciálegyenlet

$$\dot{m}(t) = -km(t),$$

ahol $k > 0$ a bomlás sebességére jellemző állandó. Az $m(0) := m_0 > 0$ kezdeti értéket figyelembe véve az egyenlet megoldása: $m(t) = m_0 e^{-kt}$ azt mutatja, hogy a radioaktív anyag tömege exponenciálisan csökken. Az urán felezési ideje miatt $m(0) = 2m(4.5 \cdot 10^9)$, vagyis $m_0 = 2m_0 e^{-4.5 \cdot 10^9 k}$, amiből a bomlás sebességi együtthatója: $k = \ln(2)/(4.5 \cdot 10^9) \approx 0.154 \cdot 10^{-9}$. Most már kiszámítható, hogy eredetileg $m_0 = 100 + 14 \cdot 238/206 \approx 116.175$ g urán volt a kőzetben. Így ennek a kőzetnek a bomlását az $m(t) = 116.175 e^{-0.154 \cdot 10^{-9} t}$, függvény írja le. A kőzetben a jelenlegi t_* időpontban 100 g urán van, így $100 = 116.175 e^{-0.154 \cdot 10^{-9} t_*}$, amiből kifejezve $t_* = \ln(116.175/100)/(0.154 \cdot 10^{-9}) \approx 9.74 \cdot 10^8$, azaz körülbelül 974 millió éves kőzetről van szó.

14.70. Megoldás (Feladat) Jelölje $0 \leq c(t) \leq 1$ a szobában lévő széndioxid térfogatát a szoba térfogatához viszonyítva a t időpontban: $c(t) := V_{\text{CO}_2}(t)/V_{\text{szoba}}(t)$. Tegyük fel, hogy a szobába beáramló gáz térfogata egyenlő a szobából kiáramló gáz térfogatával. A szobába percenként $20 \cdot 0.04 \text{ m}^3$ széndioxid áramlik be, ugyanekkor $20 \cdot c(t) \text{ m}^3$ áramlik ki. Így a szoba szén-dioxid



14.3. ábra. A szoba szén-dioxid tartalma az idő függvényében

tartalmára a következő egyenlet írható fel:

$$\dot{c}(t) = \frac{20}{200}(0.04 - c(t)).$$

Kihhasználva, hogy $c(0) = 0.15$ és $0.04 < c(t) \leq 0.15$

$$\int_0^t \frac{\dot{c}(s)}{c(s) - 0.04} ds = \int_{c(0)}^{c(t)} \frac{1}{s - 0.04} ds = \ln(c(t) - 0.04) - \ln(0.11) = -0.1t,$$

tehát a megoldás: $c(t) = 0.11e^{-0.1t} + 0.04$. Legyen t_* az az időpont, amikor a szobában lévő kezdeti szén-dioxid mennyiség a harmadára csökken, ekkor: $c(t_*) = 0.15/3 = 0.11e^{-0.1t_*} + 0.04$, amiből kifejezve $t_* = 10 \ln(0.11/0.01) \approx 23.98$ min, vagyis körülbelül 24 perc alatt csökken a szén-dioxid a megadott értékre.

14.71. Megoldás (Feladat) Jelölje $x(t)$ az ejtőernyős függőleges helyzetét a földfelszíntől mérve. Az ejtőernyősre két erő hat; a gravitációs erő $-mg$, ahol m az ejtőernyős tömege, g pedig a gravitációs gyorsulás; a másik erő pedig a légellenállás, ami a sebességgel négyzetesen arányos kv^2 . Newton II. törvényét használva, az ejtőernyősre vonatkozó mozgásegyenlet: $\ddot{x} = -mg + k\dot{x}^2$. Elvégezve a $v := \dot{x}$ helyettesítést az alábbi egyenletet kapjuk a mozgásra: $\dot{v} = -mg + kv^2$.

14.72. Megoldás (Feladat) A feladatban szereplő differenciálegyenlet az $\Omega := \mathbb{R}^2$ halmazon egyenértékű az $y'/(1 + y^2) = 1$ egyenlettel, ahonnan integrálással adódik, hogy

$$\int_{\pi/4}^x \frac{y'(s)}{1 + y^2(s)} ds = \int_{y(1)}^{y(x)} \frac{1}{1 + p^2} dp = \arctg(y(x)) - \arctg(1) = x - \pi/4.$$

Innen pedig $y(x) = \text{tg}(x)$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ a kezdetiérték-probléma megoldása. A második kezdeti feltételnél hasonlóan kapjuk, hogy $\arctg(y(x)) - \arctg(1) = x - 2\pi$, vagyis $y(x) = \text{tg}(x - 7\pi/4)$ ($x \in]3\pi/2, 5\pi/2[$).

14.73. Megoldás (Feladat) Az $R \geq 0$ sugarú gömb felszíne $A(R) := 4\pi R^2$, és térfogata $V(R) := 4\pi R^3/3$. A folyadékcsepp párolgását kifejezhetjük a térfogat csökkenésével, vagyis a feladat szövege szerint a $(V(r(t)))' = -kA(r(t))$ egyenlet írható fel, ahol $r(t)$ a folyadékcsepp sugara a t időpontban, és $k > 0$ állandó; a párolgás sebessége együtthatója. A deriválást elvégezve: $V'(r(t))r'(t) = -kA(r(t))$, vagyis $4\pi r^2(t)r'(t) = -4\pi kr^2(t)$, ami az $r(t) > 0$ esetében írható az $r'(t) = -k$ alakban. Innen integrálással kapjuk, hogy $r(t) = r(0) - kt$.

14.74. Megoldás (Feladat) Jelölje az anyagok koncentrációját sorra a, b és c . A reakciót leíró kezdetiérték-probléma:

$$\dot{a} = -k_1 a, \quad \dot{b} = k_1 a - k_2 b, \quad \dot{c} = k_2 b, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = c(0) = 0.$$

A B anyag koncentrációjának szélsőértékhelye csak olyan t_* időpontban lehet, ahol deriváltja zérus, azaz $0 = k_1 a(t_*) - k_2 b(t_*)$. Ebben az időpontban b második deriváltja, $\ddot{b}(t_*) = k_1 \dot{a}(t_*) - k_2 \dot{b}(t_*) = -k_1^2 a(t_*)$ negatív lévén (mivel belátható, hogy $a(0) \geq 0$ esetén az egyenletrendszer megoldásai nemnegatívak, ezért ha $a(0) > 0$, akkor $a(t) > 0$ minden $t \in \mathbb{R}_0^+$ mellett), a b függvénynek t_* -ban valóban maximuma van és ekkor $\dot{c}(t_*) = k_1 a(t_*) = k_2 b(t_*)$.

14.3. Szétválasztható változójú egyenletek

14.75. Megoldás (Feladat) A határérték feltételt figyelembe véve, olyan tartományt szeretnénk választani, amelyben az $(x_*, 9\pi/4)$ alakú pontok minden elég nagy x_* esetén benne vannak, és ahol a megadott implicit egyenlet egyenértékű az explicit egyenlettel, ezért legyen $\Omega_1 := \mathbb{R}^+ \times]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, ekkor a változók szétválasztásával és mindkét oldal integrálásával:

$$\int \frac{y'(x)}{1 + \cos(2y(x))} dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

A bal oldalon lévő integrált helyettesítéses integrálás segítségével a következőképpen írhatjuk fel, és számolhatjuk ki:

$$\int \frac{1}{1 + \cos(2s)} ds = \int \frac{1}{1 + \cos^2(s) - \sin^2(s)} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2(s)} ds = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(s),$$

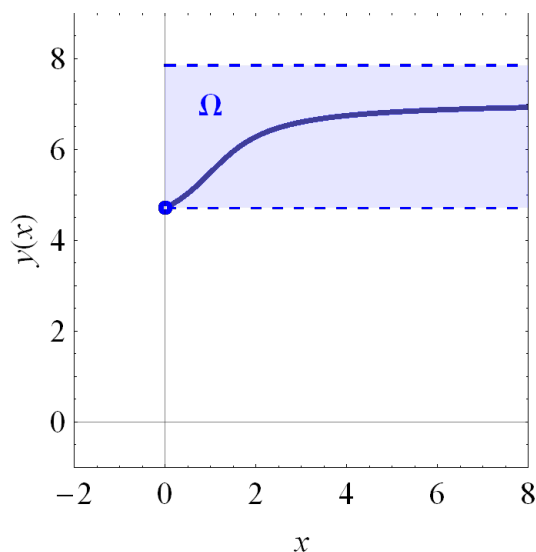
tehát azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}(y(x)) = -\frac{2}{x} + c$, ahol $c = 2C$. A feladatban megfogalmazott feltételnek eleget tevő megoldásra $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg}(y(x)) = \operatorname{tg}(9\pi/4) = 1 = c$. A megoldást a tg függvény megfelelő ágának invertálásával határozhatjuk meg (14.4. ábra):

$$y(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{x} + 1\right) + 2\pi \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

14.76. Megoldás (Feladat) Az egyenlet akkor explicit, ha $x \in \mathbb{R}$ esetén $y(x) \neq 0$. A változók szétválasztásához pedig a $\forall x : y(x) \neq 2$ feltételre is szükségünk van. Legyen tehát $\Omega_1 := \mathbb{R} \times]2, +\infty[$, $\Omega_2 := \mathbb{R} \times]0, 2[$ és $\Omega_3 :=]-\infty, 0[$, ekkor

$$\int \frac{3y^2(x)y'(x)}{y^3(x) - 8} dx = \ln(y^3(x) - 8) = x^2 + C, \quad (x, y(x)) \in \Omega_1,$$

$$\int \frac{3y^2(x)y'(x)}{y^3(x) - 8} dx = \ln(8 - y^3(x)) = x^2 + C, \quad (x, y(x)) \in \Omega_2 \cup \Omega_3.$$



14.4. ábra. A feladat megoldásának grafikonja

Így az általános megoldások a különböző tartományokon:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= \sqrt[3]{ce^{x^2} + 8} & (x, y(x)) \in \Omega_1, \\
 y_2(x) &= \sqrt[3]{8 - ce^{x^2}} & (x, y(x)) \in] -\sqrt{\ln(8/c)}, \sqrt{\ln(8/c)} [\times] 0, 2[\subset \Omega_2, \\
 y_3(x) &= \sqrt[3]{8 - ce^{x^2}} & (x, y(x)) \in \Omega_3,
 \end{aligned}$$

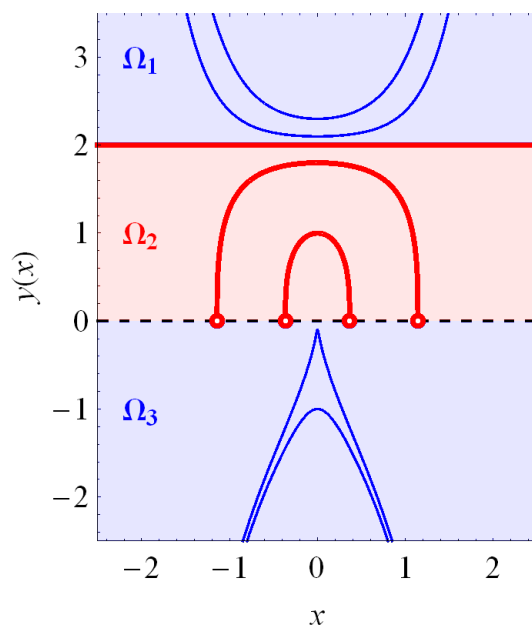
ahol $c > 0$ állandó. Továbbá behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2$ függvény is megoldása a differenciálegyenletnek. Tehát a jobb félegyenesen korlátos megoldások: y_2 , és az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2$ függvény (14.5 ábra).

14.77. Megoldás (Feladat) Jelölje $h(t)$ a víz magasságát a t időpontban méterben mérve. Ekkor a tartályban lévő víz térfogata a t időpontban: $V(t) = 0.9^2\pi \cdot h(t)$. A tartályban lévő víz térfogatának időbeli változásának sebessége: $V'(t) = 0.9^2\pi \cdot h'(t) = -0.03^2\pi \cdot 0.6\sqrt{20h(t)}$, ahol $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Ebből

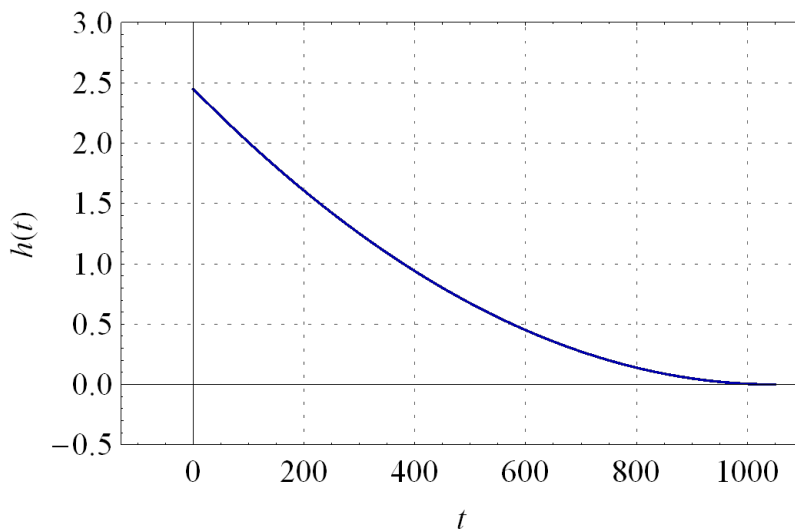
$$\int_0^t \frac{h'(s)}{\sqrt{h(s)}} ds = \int_{h(0)}^{h(t)} \frac{1}{\sqrt{p}} dp = 2\sqrt{h(t)} - 2\sqrt{2.45} = -0.00298t,$$

így a megoldás $h(t) = (1.56525 - 0.00149t)^2$. Legyen t_* az az időpont, amikor a tartály kiürül, ekkor $h(t_*) = 0$, vagyis $t_* = 1050$ s, ami 17.5 perc.

Megjegyzendő, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala a tartomány határán nem teljesíti a Lipschitz-feltételt.



14.5. ábra. A különböző tartományokban haladó néhány megoldás



14.6. ábra. A tartályban lévő víz magassága az idő függvényében

14.78. Megoldás (Feladat) Az $u(x) = xy(x)$ egyenlőség deriválásával és az $xg(u(x))$ -szel való szorzással azt kapjuk, hogy $xg(u(x))u'(x) = xg(u(x))y(x) + x^2g(u(x))y'(x) = g(u(x))u(x) + x^2g(u(x))y'(x)$. Az eredeti egyenletből kiolvasható, hogy $xg(u(x))y'(x) = -y(x)f(u(x))$, így tehát az előző összefüggés-

be helyettesítve

$$xg(u(x))u'(x) = u(x)g(u(x)) - xy(x)f(u(x)) = u(x)g(u(x)) - u(x)f(u(x)),$$

vagyis az $xg(u(x))u'(x) = u(x)(g(u(x)) - f(u(x)))$ implicit differenciálegyenletet kapjuk, ami egy megfelelő tartományon azonos az

$$u'(x) = \frac{1}{x} \cdot u(x) \left(1 - \frac{f(u(x))}{g(u(x))} \right)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlettel. A lépések megfordításával belátható, hogy ha u ennek megoldása, akkor $y(x) := u(x)/x$ megoldása az eredeti egyenletnek.

14.79. Megoldás (Feladat) Nyilvánvaló, hogy $f(0) > 0$. Az $F(x) := \int_0^x f$ ($x \in \mathbb{R}^+$) folytonosan differenciálható integrálfüggvényre az $\Omega := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tartományon az $F'(x) = \frac{F^2(x)}{f(0)x^2}$ homogén és szétválasztható változójú egyenlet áll fenn az $F(0) = 0$ kezdeti feltétellel. Ennek megoldása:

$$F(x) = \frac{f(0)x}{kf(0)x + 1}, \quad \begin{cases} x \in]0, -\frac{1}{kf(0)}[, & \text{ha } k < 0, \\ x \in \mathbb{R}^+, & \text{ha } k = 0, \\ x \in]0, +\infty[, & \text{ha } k > 0, \end{cases}$$

tehát $f(x) = F'(x) = f(0)/(kf(0)x + 1)^2$. Megjegyzendő, hogy a kapott függvény nemcsak az első negyedben (illetve annak egy részében) haladó megoldás, hanem $x \in]-\infty, -1/(kf(0))[,$ illetve $x \in]-1/(kf(0)), +\infty[$ esetén megoldása az eredeti integrálegyenletnek.

14.80. Megoldás (Feladat) A $H := \int_{\xi}^{\frac{1}{h}}$ függvényre $H(\xi) = 0$ teljesül, ezért i infimuma negatív, s szuprémuma pozitív szám (bármelyik lehet végtelen is):

$$i \leq H(\bar{x}) \leq s \quad (\bar{x} \in J).$$

A $G := \int_{\tau} g$ függvényre fennáll, hogy $G(\tau) = 0$. Jelölje az I intervallum τ pontot tartalmazó részintervallumai közül a legbővebb olyat, amelyre $i < G(\bar{t}) < s$ fennáll, ha $\bar{t} \in I^\circ$. Tehát $\tau \in I^\circ \subset I$. Mivel a $G(\bar{t})$ érték tetszőleges $\bar{t} \in I^\circ$ esetén $\inf H$ és $\sup H$ közé esik, a $G(\bar{t})$ értéket a szigorúan monoton és folytonos függvény felveszi, mégpedig pontosan egyszer.

14.4. Elsőrendű lineáris egyenletek

14.81. Megoldás (Feladat) *Első megoldás.* A feladatban szereplő egyenlettel ekvivalens egyenlet az $\Omega := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tartományon: $xy'(x) - y(x) = -x^2$. A homogén egyenlet megoldása $y_h(x) = cx$. A partikuláris megoldást az állandó variálásának módszerével határozhatjuk meg: $y_p(x) := g(x)x$, ekkor $y_p'(x) = g'(x)x + g(x)$. Az eredeti egyenletbe helyettesítve: $x^2g'(x) = -x^2$, amiből $g(x) = -x$ -nek választható, így egy partikuláris megoldás $y_p(x) = -x^2$. A teljes megoldás: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = cx - x^2$. A kezdeti értéket figyelembe véve $y(1) = 0 = c - 1$, amiből $c = 1$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = x - x^2$.

Második megoldás. A partikuláris megoldást a próbafüggvény módszerével is meghatározhatjuk. A próbafüggvény választható másodfokú polinomnak, azaz $y_p(x) := Ax^2 + Bx + C$, amiből $y_p'(x) = 2Ax + B$. Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe: $2Ax^2 + Bx - Ax^2 - Bx - C = Ax^2 - C = -x^2$. A két oldalon szereplő polinomok együtthatóinak összehasonlításából kapjuk, hogy $A = -1$, $C = 0$ és B tetszőleges, amit válasszunk nullának $B := 0$. Tehát a partikuláris megoldás: $y_p(x) = -x^2$, ami megegyezik a korábbival.

14.82. Megoldás (Feladat) A kezdetiérték-problémát az $\Omega :=]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R}$ tartományon értelmezzük. A homogén egyenlet megoldása $y_h(x) := c/\cos(x)$. A partikuláris megoldást az állandó variálásának módszerével határozzuk meg: $y_p(x) := g(x)/\cos(x)$, amiből $y_p'(x) = (g'(x)\cos(x) + g(x)\sin(x))/\cos^2(x)$, amit a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$\frac{g'(x)}{\cos(x)} + \frac{g(x)}{\cos(x)} \operatorname{tg}(x) - \frac{g(x)}{\cos(x)} \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^3(x)},$$

amiből integrálással kapjuk, hogy $g(x) = \operatorname{tg}(x) + K$. Egy partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = \operatorname{tg}(x)/\cos(x)$. A teljes megoldás: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c + \operatorname{tg}(x))/\cos(x)$. A kezdeti értéket figyelembe véve $y(0) = 0 = c$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása: $y(x) = \operatorname{tg}(x)/\cos(x)$.

14.83. Megoldás (Feladat) *Első megoldás.* Az egyenlet az $\Omega := \mathbb{R}^2$ tartományon van értelmezve. A homogén egyenlet megoldása $y_h(x) = ce^x$. A partikuláris megoldást az állandó variálásának módszerével határozzuk meg: $y_p(x) := g(x)e^x$, $y_p'(x) = g'(x)e^x + g(x)e^x$, ezt a differenciálegyenletbe helyettesítve $g'(x)e^x + g(x)e^x - g(x)e^x = g'(x)e^x = -2e^{-x}$, vagyis $g'(x) = -2e^{-2x}$, amiből $g(x) = -2 \int e^{-2x} dx = e^{-2x} + K$, tehát egy partikuláris megoldás $y_p(x) = e^{-x}$. A teljes megoldás így: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^x + e^{-x}$. A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ce^x + e^{-x}) = 0$$

feltétel csak úgy teljesülhet, ha $c = 0$. A feltételnek eleget tevő megoldás tehát: $y(x) = e^{-x}$.

Második megoldás. A próbafüggvény módszerével is meghatározhatjuk a partikuláris megoldást. Keressük a megoldást a következő alakban: $y_p(x) := Ae^{-x}$, ekkor $y_p'(x) = -Ae^{-x}$, amit behelyettesítve a differenciálegyenletbe: $-Ae^{-x} - Ae^{-x} = -2Ae^{-x} = -2e^{-x}$, ebből látszik, hogy $A = 1$. A partikuláris megoldás tehát ismét $y_p(x) = e^{-x}$.

14.84. Megoldás (Feladat) *Első megoldás.* A feladat megoldásához egy alkalmas tartomány $\Omega := \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$. Az $x^2 y_h'(x) + y_h(x) = 0$ homogén egyenlet megoldása: $y_h(x) = ce^{\frac{1}{x}}$. A partikuláris megoldást az állandó variálásának módszerével határozzuk meg: $y_p(x) := g(x)e^{\frac{1}{x}}$, amiből $y_p'(x) = g'(x)e^{\frac{1}{x}} - g(x)e^{\frac{1}{x}}/x^2$. A differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$x^2 g'(x)e^{\frac{1}{x}} - x^2 \frac{g(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + g(x)e^{\frac{1}{x}} = x^2 g'(x)e^{\frac{1}{x}} = (x^2 + 1)e^x,$$

amiből

$$g'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} e^{x - \frac{1}{x}}, \quad \text{tehát} \quad g(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x^2} e^{\frac{x^2 - 1}{x}} dx.$$

Az integrál kiszámításához vegyük észre, hogy

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)' = \frac{2xx - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

ezért $g(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{x}} + K$, és így egy partikuláris megoldás $y_p(x) = e^x$. Az általános megoldás tehát $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{\frac{1}{x}} + e^x$. A feltételt kiértékelve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ce^{\frac{1}{x}} + e^x \right) = c = 1,$$

vagyis a kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = e^{\frac{1}{x}} + e^x$, $x < 0$.

Második megoldás. A partikuláris megoldást a próbafüggvény módszerével is meghatározhatjuk. Mivel az eredeti egyenlet jobboldalán egy másodfokú polinom és egy exponenciális függvény szorzata áll, ezért a próbafüggvényt hasonló, a legáltalánosabb formában kell keresnünk: $y_p(x) := (Ax^2 + Bx + C)e^x$, amiből $y_p'(x) = (Ax^2 + (B + 2A)x + C)e^x$, amit behelyettesítve a differenciálegyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & x^2(Ax^2 + (B + 2A)x + C)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x \\ &= (Ax^4 + (B + 2A)x^3 + (A + C)x^2 + Bx + C)e^x = (x^2 + 1)e^x, \end{aligned}$$

amiből a két oldal összehasonlításával: $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, tehát a partikuláris megoldás ismét $y_p(x) = e^x$.

14.85. Megoldás (Feladat) Az $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ első síknegyedben egyenletünk egyenértékű az

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x + y(x)}$$

explicit egyenlettel, amely viszont mutatja, hogy y szigorúan monoton növekvő, tehát invertálható. Jelöljük inverzét ξ -vel, akkor – kihasználva, hogy $(y^{-1})' = 1/(y' \circ y^{-1})$ – erre az első síknegyedben a

$$\xi'(\eta) = \frac{\xi(\eta) + \eta}{\eta^2}$$

lineáris egyenlet írható fel, aminek megoldásai

$$\xi(\eta) = ce^{-\frac{1}{\eta}} + e^{-\frac{1}{\eta}} \int_1^\eta \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} dz.$$

Az eredeti egyenlet megoldásai ezek inverzei; explicit képlettel, elemi függvényekkel nem írhatók fel.

14.86. Megoldás (Feladat) *Első megoldás.* Az egyenlet a $\Phi(x) := \int_0^x \varphi$ integrálfüggvény bevezetésével és parciális integrálással:

$$x\Phi(x) = (x+1) \int_0^x t\Phi'(t) dt = (x+1) \left(x\Phi(x) - \int_0^x \Phi \right).$$

Vagyis $x^2\Phi(x) = (x+1) \int_0^x \Phi$, ez viszont a $\Psi(x) := \int_0^x \Phi$ jelöléssel a

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} = \frac{x+1}{x^2}$$

differenciálegyenletet adja, ahonnan $\Psi(x) = Cxe^{-1/x}$, tehát $\Phi(x) = Ce^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, vagyis $\varphi(x) = ce^{-1/x}/x^3$ ($x \in \mathbb{R}^+$), és ez utóbbi függvény valóban megoldás tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ szám mellett. A $\varphi(0) := 0$ definícióval az egész számegetesen értelmezett megoldást kapunk.

Második megoldás. Két deriválás után (ami a φ folytonossága miatt megtehető) kapjuk, hogy

$$x^2\varphi'(x) + (3x-1)\varphi(x) = 0,$$

aminek a megoldásai: $\varphi(x) = ce^{-1/x}/x^3$ ($x \in \mathbb{R}^+$).

14.87. Megoldás (Feladat) *Első megoldás.* A megoldáshoz megfelelő tartomány az $\Omega :=]0, \pi[\times \mathbb{R}$, itt a differenciálegyenlet átírható az alábbi alakra:

$$y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

A homogén egyenlet megoldása: $y_h(x) = c/\sin(x)$. A partikuláris megoldást keressük az $y_p(x) := g(x)/\sin(x)$ alakban. A differenciálegyenletbe helyettesítés után kapjuk, hogy $g(x) = x$, és így a teljes megoldás $y(x) = (c + x)/\sin(x)$.

Második megoldás. Vegyük észre, hogy $\sin(x)y'(x) + \cos(x)y(x) = (\sin(x)y(x))' = 1$, amiből rögtön kapjuk, hogy $\sin(x)y(x) = x + c$.

Az $y(\pi/2) = 3$ feltételt kielégítő megoldást a $c = 3 - \pi/2$ esetén kapjuk meg. A $\lim_0 y = 1$ feltétel pontosan akkor teljesül ha $c = 0$.

15. fejezet

Lineáris differenciálegyenletek

15.88. Megoldás (Feladat) Azt fogjuk belátni, hogy a függvények pontosan akkor lineárisan összefüggőek, ha a fenti determináns nulla.

A) Tegyük fel, hogy f_1, f_2, \dots, f_N lineárisan összefüggő, az azt jelenti, hogy léteznek olyan $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ számok, amelyek közül nem mindegyik nulla, és amelyekkel

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_N f_N = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} c_1 f_1^2 + c_2 f_1 f_2 + \dots + c_N f_1 f_N &= 0, \\ c_1 f_2 f_1 + c_2 f_2^2 + \dots + c_N f_2 f_N &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_N f_1 + c_2 f_N f_2 + \dots + c_N f_N^2 &= 0. \end{aligned} \tag{15.1}$$

(15.1) viszont azt fejezi ki, hogy az

$$\begin{vmatrix} f_1^2 & f_1 f_2 & \dots & f_1 f_N \\ f_2 f_1 & f_2^2 & \dots & f_2 f_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N f_1 & f_N f_2 & \dots & f_N^2 \end{vmatrix}$$

determináns sorai lineárisan összefüggnek, vagyis a determináns értéke nulla, tehát minden $x \in J$ esetén

$$\begin{vmatrix} f_1^2(x) & f_1(x)f_2(x) & \dots & f_1(x)f_N(x) \\ f_2(x)f_1(x) & f_2(x)^2 & \dots & f_2(x)f_N(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N(x)f_1(x) & f_N(x)f_2(x) & \dots & f_N^2(x) \end{vmatrix} = 0,$$

s így

$$\det \begin{pmatrix} \int_J f_1^2 & \int_J f_1 f_2 & \cdots & \int_J f_1 f_N \\ \int_J f_2 f_1 & \int_J f_2^2 & \cdots & \int_J f_2 f_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_J f_N f_1 & \int_J f_N f_2 & \cdots & \int_J f_N^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (15.2)$$

is fennáll.

B) Tegyük fel, hogy (15.2) fennáll, és bizonyítsuk be, hogy a függvények lineárisan összefüggők. Ha (15.2) fennáll, akkor az integrálokból álló determináns sorai (*számokból* álló vektorok) lineárisan összefüggnek, tehát valamilyen $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ számokkal, amelyek nem mindannyian nullák, teljesül, hogy

$$\begin{aligned} c_1 \int_J f_1^2 + c_2 \int_J f_1 f_2 + \cdots + c_N \int_J f_1 f_N &= 0, \\ c_1 \int_J f_2 f_1 + c_2 \int_J f_2^2 + \cdots + c_N \int_J f_2 f_N &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 \int_J f_N f_1 + c_2 \int_J f_N f_2 + \cdots + c_N \int_J f_N^2 &= 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \int_J f_1 (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_N f_N) &= 0, \\ \int_J f_2 (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_N f_N) &= 0, \\ &\vdots \\ \int_J f_N (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_N f_N) &= 0. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Szorozzuk meg (15.3) első egyenletét a c_1 számmal, a másodikat c_2 -vel, sít., az utolsót c_N -nel, és adjuk össze a szorzatokat:

$$\begin{aligned} c_1 \int_J f_1 \left(\sum_{n=1}^N c_n f_n \right) + c_2 \int_J f_2 \left(\sum_{n=1}^N c_n f_n \right) + \cdots + c_N \int_J f_N \left(\sum_{n=1}^N c_n f_n \right) = \\ \int_J \left(\sum_{n=1}^N c_n f_n \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

ami csak úgy teljesülhet, ha $\sum_{n=1}^N c_n f_n = 0$, vagyis úgy, hogy a függvények lineárisan összefüggnek.

Megjegyzés. A J intervallumon négyzetesen integrálható függvények $\mathcal{L}_2(J, \mathbb{R})$ halmazán a $\langle g, h \rangle := \int_J gh$ képlettel **skaláris szorzatot** értelmezhetünk. Az állítás $\mathcal{L}_2(J, \mathbb{R})$ helyett tetszőleges skaláris szorzattal ellátott térre (úgynevezett **eukleidészi térre**) érvényes, ha a determinánsban a szorzatin-tegrálok helyébe a skaláris szorzatot tesszük.

15.89. Megoldás (Feladat) Elegendő belátnunk, hogy $\Psi(\tau, \cdot)$ megoldása a mátrixértékű függvényekre vonatkozó $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$ ($t \in J$), $\mathbf{X}(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^N}$ kezdetiérték-problémának. A kezdeti feltétel teljesülése nyilvánvaló. Lássuk be, hogy $\Psi(\tau, \cdot)$ megoldása a differenciálegyenletnek. Az $\exp(\int_{\tau}^t \mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^n$ sor n -edik tagjának deriválásánál használjuk fel a (4.2) tulajdonságot:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^k \mathbf{A}(t) \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}(t) \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^{n-1} = n\mathbf{A}(t) \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

ahonnan a derivált sor:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}(t) n \frac{1}{n!} \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^{n-1} &= \mathbf{A}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right)^{n-1} \\ &= \mathbf{A}(t) \exp\left(\int_{\tau}^t \mathbf{A}\right). \end{aligned}$$

15.90. Megoldás (Feladat) A (4.3) összefüggés két oldalát s szerint integrálva a $[\tau, t]$ intervallumon épp az (4.2) összefüggést kapjuk. Ha pedig az (4.2) összefüggést deriváljuk τ szerint, akkor ezt kapjuk: $-\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(\tau) = -\mathbf{A}(\tau)\mathbf{A}(t)$, ami egyenértékű a bizonyítandó (4.3) összefüggéssel.

15.91. Megoldás (Feladat) Legyen

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix},$$

akkor (4.3) azt jelenti, hogy $\forall s, t \in J$:

$$\begin{aligned} a(s)a(t) + b(s)c(t) &= a(t)a(s) + b(t)c(s), \\ a(s)b(t) + b(s)d(t) &= a(t)b(s) + b(t)d(s), \\ c(s)a(t) + d(s)c(t) &= c(t)a(s) + d(t)c(s), \\ c(s)b(t) + d(s)d(t) &= c(t)b(s) + d(t)d(s). \end{aligned}$$

Ezen egyenletek közül csak az első három független, a negyedik következményként adódik; átrendezve őket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} b(s)c(t) &= b(t)c(s), \\ b(t)(a(s) - d(s)) &= b(s)(a(t) - d(t)), \\ c(t)(a(s) - d(s)) &= c(s)(a(t) - d(t)). \end{aligned}$$

Ezen összefüggések mindegyike

$$\alpha(t)\beta(s) = \alpha(s)\beta(t) \quad (15.4)$$

alakú. Mi következik egy ilyen függvényegyenletből? Tegyük fel, hogy létezik olyan $\tau \in J$, amelyre $\alpha(\tau) = 0$, de $\beta(\tau) \neq 0$. Ekkor $0 = \alpha(\tau)\beta(s) = \alpha(s)\beta(\tau)$, tehát $\forall s \in J \alpha(s) = 0$. Így a lehetséges esetek:

1. $\forall t \in J : \alpha(t) = 0$.
2. $\forall t \in J : \beta(t) = 0$.
3. Van egy olyan $\emptyset \neq J_1 \subset J$ halmaz, amelyen $\alpha(t)\beta(t) \neq 0$, de ha $t \in J \setminus J_1$, akkor $\alpha(t) = \beta(t) = 0$.

A legutóbbi esetben $s, t \in J_1$ esetén

$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}, \quad (15.5)$$

tehát $\alpha(t)/\beta(t) = C$ valamilyen C állandóval, azaz $\alpha(t) - C\beta(t) = 0$, ha $t \in J_1$. A fenti három eset úgy foglalható össze, hogy vannak olyan $c_1, c_2 : c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ számok, amelyekkel $\forall t \in J : c_1\alpha(t) + c_2\beta(t) = 0$, azaz a (15.4) pontosan akkor teljesül, ha α és β lineárisan összefügg.

Az eddigieket az egyenletrendszerre alkalmazva a következőket kapjuk: $\exists c_1^i, c_2^i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3)$ számok, amelyekre $(c_1^i)^2 + (c_2^i)^2 \neq 0$, és amelyekkel

$$\begin{aligned} c_1^1 b(t) + c_2^1 c(t) &= 0, \\ c_1^2 b(t) + c_2^2 (a(t) - d(t)) &= 0, \\ c_1^3 c(t) + c_2^3 (a(t) - d(t)) &= 0, \end{aligned}$$

azaz a következő esetek lehetségesek:

1. b, c és $a - d$ közül legalább kettő a nulla függvény;
2. $b = 0, c \neq 0, a \neq d$, és $\exists \gamma \neq 0 : c = \gamma(a - d)$;

3. $c = 0, b \neq 0, a \neq d$, és $\exists \gamma \neq 0 : b = \gamma(a - d)$;
4. $a = d, b \neq 0, c \neq 0$, és $\exists \gamma \neq 0 : c = \gamma b$;
5. $b \neq 0, c \neq 0, a \neq d$, és $\exists \gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0 : b = \gamma_1(a - d), c = \gamma_2(a - d)$.

Összegezve, (4.3) pontosan az

$$\mathbf{A}(t) = u(t) \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 \end{pmatrix} + v(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú mátrixokra teljesül, tetszőleges $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ számokkal és $u, v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ függvényekkel.

Ha az \mathbf{A} mátrixértékű függvényről feltesszük, hogy folytonos, akkor az u és a v függvény is folytonos.

Fölmerül az a kérdés, hogy milyen szerkezetű lehet a J_1 halmaz. A következő két állítás igaz. Folytonos függvény nullahelyeinek halmaza zárt, és tetszőleges zárt halmazhoz van olyan folytonos függvény, amelyiknek nullahelyei éppen az adott halmazt alkotják.

15.92. Megoldás (Feladat) Ezeknek a függvényeknek a száma N , függetlenek, és mindannyian megoldásai a differenciálegyenletnek.

15.93. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, amiből a sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, és $v_{1,2} = (1, 3 \mp i)^\top$. A megoldás ebből $x(t) = \operatorname{Re}((c_1 + ic_2)1e^{(2+i)t}) = e^{2t}(c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t))$, és $y(t) = \operatorname{Re}((c_1 + ic_2)(3 - i)e^{(2+i)t}) = e^{2t}((3c_1 + c_2) \cos(t) + (c_1 - 3c_2) \sin(t))$. A kezdetiérték-probléma megoldása $x(0) = 0 = c_1$ és $y(0) = 3 = 3c_1 + c_2$, tehát $c_1 = 0$ és $c_2 = 3$, és így $x(t) = -e^{2t} \sin(t)$ és $y(t) = e^{2t}(3 \cos(t) - 9 \sin(t))$.

15.94. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$, amiből a sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 5i$, és $v_{1,2} = (1 \pm i, -2)^\top$. A megoldás ebből $x(t) = \operatorname{Re}((c_1 + ic_2)(1 + i)e^{(3+5i)t}) = e^{3t}((c_1 - c_2) \cos(5t) - (c_1 + c_2) \sin(5t))$, és $y(t) = \operatorname{Re}(-2(c_1 + ic_2)e^{(3+5i)t}) = e^{3t}(-2c_1 \cos(5t) + 2c_2 \sin(5t))$. A kezdetiérték-probléma megoldása $x(0) = 0 = c_1 - c_2$ és $y(0) = 1 = -2c_1$, tehát $c_1 = c_2 = -1/2$, és így $x(t) = e^{3t} \sin(5t)$ és $y(t) = e^{3t}(\cos(5t) - \sin(5t))$.

15.95. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, amiből a sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_1 = 3$, $v_1 = (1, 2)^\top$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (1, 1)^\top$. Az általános megoldás ebből $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$, és $y(t) = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$. A kezdeti értéket figyelembe véve: $x(0) = 0 = c_1 + c_2$ és $y(0) = -1 = 2c_1 + c_2$, amiből $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát: $x(t) = -e^{3t} + e^{2t}$ és $y(t) = -2e^{3t} + e^{2t}$.

15.96. Megoldás (Feladat) A rendszer együtthatómátrixa és annak karakterisztikus polinomja, sajátértékei és sajátvektorai:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}; \quad p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2+16); \quad \lambda_{1,2} = \pm 4i, \quad v_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ \pm i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -2, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az általános megoldás tehát a következőképpen áll elő:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} \{ (c_1 + ic_2) 2e^{i4t} \} - 4c_3 e^{-2t} = 2c_1 \cos(4t) - 2c_2 \sin(4t) - 4c_3 e^{-2t}, \\ y(t) &= \operatorname{Re} \{ (c_1 + ic_2) i e^{i4t} \} + c_3 e^{-2t} = -c_2 \cos(4t) - c_1 \sin(4t) + c_3 e^{-2t}, \\ z(t) &= \operatorname{Re} \{ (c_1 + ic_2) 2e^{i4t} \} + c_3 e^{-2t} = 2c_1 \cos(4t) - 2c_2 \sin(4t) + c_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$

Figyelembe véve a kezdeti értékeket: $x(0) = -4 = 2c_1 - 4c_3$, $y(0) = 0 = -c_2 + c_3$, $z(0) = 1 = 2c_1 + c_3$, amiből $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ és $c_3 = 1$, így a megoldás: $x(t) = -2 \sin(4t) - 4e^{-2t}$, $y(t) = -\cos(4t) + e^{-2t}$, $z(t) = -2 \sin(4t) + e^{-2t}$.

15.97. Megoldás (Feladat) Vezessük be az $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$, $x_3 := y$, $x_4 := \dot{y}$ változókat, ekkor az eredeti egyenletrendszer az új változókkal így írható: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = x_1 - 2x_3$. Ehhez a rendszerhez tartozó együtthatómátrix, annak karakterisztikus polinomja, sajátértékei és sajátvektorai:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = \lambda^4 - 1, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i, \quad \lambda_4 = 1,$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{2,3} = \begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \\ \mp i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A megoldás tehát a következőképpen állítható elő:

$$\begin{aligned} x_1(t) = x(t) &= -3c_1 e^{-t} + \operatorname{Re} \{ (c_2 + ic_3)(-i)e^{it} \} + 3c_4 e^t, \\ x_3(t) = y(t) &= -c_1 e^{-t} + \operatorname{Re} \{ (c_2 + ic_3)(-i)e^{it} \} + c_4 e^t, \end{aligned}$$

amiből végül az általános megoldás:

$$\begin{aligned} x(t) &= -3c_1 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_2 \sin(t) + 3c_4 e^t, \\ y(t) &= -c_1 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_4 e^t. \end{aligned}$$

15.98. Megoldás (Feladat) A arakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 1 = 0$, amiből a sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_{1,2} = \pm i$, $v_{1,2} = (\pm i, -1)$. Az általános megoldás így: $x(t) = \operatorname{Re}\{(c_1 + ic_2)ie^{it}\} = -c_2 \cos(t) - c_1 \sin(t)$, $y(t) = \operatorname{Re}\{(c_1 + ic_2)(-1)e^{it}\} = -c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. A kezdeti értéket figyelembe véve: $x(0) = 0 = -c_2$, $y(0) = 1 = -c_1$, amiből $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, és a kezdetiérték-probléma megoldása: $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

15.99. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása; a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, amiből a sajátértékek $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, és a sajátvektorok $v_1 = (1, 2)^\top$, $v_2 = (1, 1)^\top$ így a megoldás $x_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$, $y_h(t) = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$. Konstans inhomogenitás esetében a partikuláris megoldást kereshetjük az $x_p(t) := a$ és $y_p(t) := b$ alakban, ekkor: $\dot{x}_p(t) = \dot{y}_p(t) = 0$. Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy $0 = a + b + 1$, $0 = 4b - 2a - 2$. Ezt a lineáris egyenletrendszert (kedvenc módszerünkkel) megoldva kapjuk a partikuláris megoldást: $x_p(t) = -1$, $y_p(t) = 0$. Így tehát az általános megoldás: $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} - 1$, $y(t) = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$. A kezdeti értéket figyelembe véve kapjuk, hogy $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, és így a kezdetiérték-probléma megoldása: $x(t) = -e^{3t} + 2e^{2t} - 1$, $y(t) = -2e^{3t} + 2e^{2t}$.

15.100. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása; a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, amiből $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ és a sajátvektorok $v_{1,2} = (1 \pm 2i, 1)^\top$, így a megoldás

$$x_h(t) = \operatorname{Re}((c_1 + ic_2)(1 + 2i)e^{(-1+2i)t}) = e^{-t}((c_1 - 2c_2) \cos(2t) - (2c_1 + c_2) \sin(2t)),$$

$$y_h(t) = \operatorname{Re}((c_1 + ic_2)e^{(-1+2i)t}) = e^{-t}(c_1 \cos(2t) - c_2 \sin(2t)).$$

A partikuláris megoldást konstans alakban kereshetjük $x_p(t) := a$, $y_p(t) := b$, amiből $0 = -5b - 10$, $0 = a - 2b$, és így $a = -4$, $b = -2$. A kezdeti értéket figyelembe véve: $x(0) = 0 = c_1 - 2c_2 - 4$, $y(0) = 0 = c_1 - 2$, amiből $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$. Végül a megoldás: $x(t) = e^{-t}(4 \cos(2t) - 3 \sin(2t)) - 4$, $y(t) = e^{-t}(2 \cos(2t) + \sin(2t)) - 2$.

15.101. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 2\lambda - 4$. A sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (1, 2)$; $\lambda_2 = 3$, $v_2 = (-1, 2)$, amiből a homogén egyenlet megoldása $x_h(t) = c_1 e^{-t} - c_2 e^{3t}$, $y_h(t) = 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t}$. A próbafüggvények $x_p(t) := a$, $y_p(t) := b$, így $0 = a - b + 6$ és $0 = -4a + b - 12$, aminek a megoldása $a = -2$ és $b = 4$. A kezdeti értéket figyelembe véve: $x(0) = -2 = c_1 - c_2 - 2$, $y(0) = 4 = 2c_1 + 2c_2 + 4$, amiből $c_1 = c_2 = 0$, tehát $x(t) = -2$, $y(t) = 4$.

15.102. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 1 = 0$, így a sajátértékek és sajátvektorok: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ és $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 =$

(1, 1). A homogén egyenlet megoldása tehát így írható: $x_h(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$. A partikuláris megoldást az állandók variálásának módszerével határozzuk meg, tehát legyen $x_p(t) = -g_1(t)e^{-t} + g_2(t)e^t$, $y_p(t) = g_1(t)e^{-t} + g_2(t)e^t$, amit visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= -\dot{g}_1(t)e^{-t} + \dot{g}_1(t)e^{-t} + \dot{g}_2(t)e^t + g_2(t)e^t = g_1(t)e^{-t} + g_2(t)e^t + 2e^t, \\ \dot{y}_p(t) &= \dot{g}_1(t)e^{-t} - g_1(t)e^{-t} + \dot{g}_2(t)e^t + g_2(t)e^t = -g_1(t)e^{-t} + g_2(t)e^t + t^2.\end{aligned}$$

Az egyszerűsítések után a következő egyenletet tudjuk felírni:

$$\begin{pmatrix} -e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}, \text{ amiből } \begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ -e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + \frac{t^2}{2}e^t \\ 1 + \frac{t^2}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ez két közvetlenül integrálható differenciálegyenlet, melyek megoldása:

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \int \left(-e^{2t} + \frac{t^2}{2}e^t \right) dt = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{t^2}{2}e^t - \int te^t dt = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{t^2}{2}e^t - te^t + \int e^t dt = \\ &= -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{t^2}{2}e^t - te^t + e^t, \\ g_2(t) &= \int \left(1 + \frac{t^2}{2}e^{-t} \right) dt = t - \frac{t^2}{2}e^{-t} + \int te^{-t} dt = t - \frac{t^2}{2}e^{-t} - te^{-t} + \int e^{-t} dt = \\ &= t - \frac{t^2}{2}e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}.\end{aligned}$$

A g_1 és g_2 függvényekből most már meghatározhatjuk a partikuláris megoldásokat: $x_p(t) = \frac{1}{2}e^t + te^t - t^2 - 2$, $y_p(t) = -\frac{1}{2}e^t + te^t - 2t$. Az általános megoldás a homogén és a partikuláris megoldás összege:

$$\begin{aligned}x(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^t + \frac{1}{2}e^t + te^t - t^2 - 2, \\ y(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{2}e^t + te^t - 2t.\end{aligned}$$

A kezdeti értékeket figyelembe véve; $x(0) = 1 = -c_1 + c_2 - 3/2$, $y(0) = 1 = c_1 + c_2 - \frac{1}{2}$, amiből $c_1 = -1/2$ és $c_2 = 2$, így a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^t + te^t - t^2 - 2, \\ y(t) &= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^t + te^t - 2t.\end{aligned}$$

15.103. Megoldás (Feladat) A feladat az $\Omega :=]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R}^2$ tartományon értelmezhető. Jól látható, hogy az egyenlet homogén része nem más, mint a harmonikus oszcillátor, aminek megoldása: $x_h(t) = -c_2 \cos(t) - c_1 \sin(t)$, $y_h(t) = -c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. A partikuláris megoldást az állandók variálásával határozzuk meg, tehát legyen $x_p(t) = -g_2(t) \cos(t) - g_1(t) \sin(t)$, $y_p(t) = -g_1(t) \cos(t) + g_2(t) \sin(t)$. Ezt behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= -\dot{g}_2(t) \cos(t) + g_2(t) \sin(t) - \dot{g}_1(t) \sin(t) - g_1(t) \cos(t) \\ &= -g_1(t) \cos(t) + g_2(t) \sin(t) + \operatorname{tg}^2(t) - 1, \\ \dot{y}_p(t) &= -\dot{g}_1(t) \cos(t) + g_1(t) \sin(t) + \dot{g}_2(t) \sin(t) + g_2(t) \cos(t) \\ &= g_2(t) \cos(t) + g_1(t) \sin(t) + \operatorname{tg}(t).\end{aligned}$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2(t) - 1 \\ \operatorname{tg}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2(t) - 1 \\ \operatorname{tg}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

A g_1 és g_2 függvény integrálással határozható meg:

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \int \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} dt = \int \frac{\sin(t)(1 - \cos^2(t))}{\cos^2(t)} dt \\ &= \int \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt - \int \sin(t) dt = \frac{1}{\cos(t)} + \cos(t), \\ g_2(t) &= - \int \cos(t) dt = -\sin(t).\end{aligned}$$

Most már fel tudjuk írni a partikuláris megoldást $x_p(t) = \operatorname{tg}(t)$, $y_p(t) = 2$, így a teljes megoldás:

$$\begin{aligned}x(t) &= -c_2 \cos(t) - c_1 \sin(t) + \operatorname{tg}(t), \\ y(t) &= -c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + 2.\end{aligned}$$

A kezdeti értékeket figyelembe véve $x(0) = 1 = -c_2$, $y(0) = 3 = -c_1 + 2$, amiből $c_1 = c_2 = -1$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \operatorname{tg}(t)$, $y(t) = \cos(t) - \sin(t) + 2$.

16. fejezet

Magasabbrendű egyenletek

16.1. Kezdetiérték-feladatok

16.104. Megoldás (Feladat) Mivel $\varphi'(x) = 2c_1xe^{x^2} - 2c_2xe^{-x^2}$, és $\varphi''(x) = (2c_1 + 4c_1x^2)e^{x^2} + (-2c_2 + 4c_2x^2)e^{-x^2}$, ezért behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\varphi''(x) - x^2\varphi(x) = (2c_1 + 4c_1x^2 - c_1x^2)e^{x^2} + (-2c_2 + 4c_2x^2 - c_2x^2)e^{-x^2},$$

ami csak akkor nulla minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ha $c_1 = c_2 = 0$.

16.105. Megoldás (Feladat) Behelyettesítés mutatja, hogy φ valóban megoldás. Keressünk másikat $\mathbb{R} \ni x \mapsto d(x)\varphi(x)$ alakban. Behelyettesítés után felhasználva, hogy φ megoldás, a d függvényre ezt az egyenletet kapjuk $g''(x)x + g'(x)(x-1) = 0$, ahonnan $g'(x) = C_1xe^{-x}$, tehát $g(x) = -C_1(x+1)e^{-x} + c_2$. Tehát egy (!) további megoldás: $\mathbb{R} \ni x \mapsto \psi(x) := x+1$. Mivel φ és ψ lineárisan független, az egyenlet általános megoldása

$$x \mapsto \alpha e^x + \beta(x+1) \quad (x \in \mathbb{R}^+ \text{ vagy } x \in \mathbb{R}^-)$$

16.106. Megoldás (Feladat) Az m tömeg időbeli változását leíró egyenlet $\dot{m} = k_2m$, ahonnan $m(t) = 100e^{2t}$, ahol a t időt percben mérjük. A vitorlás s elmozdulására vonatkozó Newton-egyenlet pedig

$$m(t)\ddot{s}(t) = 50 \times 3600 - k_1m(t), \text{ vagyis } 100e^{2t}\ddot{s}(t) = 50 \times 3600 - k_1100e^{2t},$$

amihez az $s(0) = \dot{s}(0) = 0$ kezdeti feltételek tartoznak. Innen látható, hogy k_1 gyorsulás jellegű mennyiség, mértékegysége m/s^2 . Mivel a kezdetiérték-probléma megoldása $s(t) = 450(e^{-2t} + 2t - 1) - k_1t^2/2$, ezért az $\ddot{s}(1) = 0$ feltételből $k_1 = \frac{1800}{e^2}$ adódik. Az $\dot{s}(1) = 1$ feltevés hasonló módon a $k_1 = 900(1 - e^{-2})$ eredményre vezet.

16.107. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 9 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, és így az általános megoldás: $x(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$.

16.108. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$, és így az általános megoldás: $x(t) = e^{3t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))$.

16.109. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}i$, és így az általános megoldás: $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t))$.

16.110. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$, ebből $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$ és így az általános megoldás: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{7t}$.

16.111. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda + 5)^2 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = -5$, és így az általános megoldás: $x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t}$.

16.112. Megoldás (Feladat) Az első egyenlet deriválásával: $\ddot{x} = \omega \dot{y} = -\omega^2 x$, vagyis az $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ homogén egyenletet kapjuk, aminek a karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, így $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ és a megoldás: $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$.

16.113. Megoldás (Feladat) Először az első egyenletből kifejezzük y -t: $y = (\dot{x} - ax)/b$, majd deriválva az első egyenletet: $\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y} = a\dot{x} + b(-bx + ay) = a\dot{x} - b^2x + ab(\dot{x} - ax)/b = 2a\dot{x} - (a^2 + b^2)x$, tehát az $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 + b^2)x = 0$ egyenletet kapjuk. A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, így az általános megoldás $x(t) = e^{at}(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))$.

16.114. Megoldás (Feladat) Az első egyenletből kifejezhető $y = \dot{x} - \mu x$, majd az első egyenlet deriválásával $\ddot{x} = \mu\dot{x} + \dot{y} = \mu\dot{x} + \mu y = \mu\dot{x} + \mu(\dot{x} - \mu x) = 2\mu\dot{x} - \mu^2 x$, tehát az $\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + \mu^2 x = 0$ homogén egyenletet kapjuk. A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = \mu$, így a megoldás $x(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 t e^{\mu t}$.

16.115. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása:

$$x_h(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t).$$

A partikuláris megoldás: $x_p(t) := a$, $\dot{x}_p(t) = \ddot{x}_p(t) = 0$, amiből a $3a = -9$ egyenlet adódik, és így $a = -3$, tehát $x_p(t) = -3$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) - 3.$$

16.116. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása:

$$x_h(t) = c_1 \cos(t/\sqrt{2}) + c_2 \sin(t/\sqrt{2}).$$

A partikuláris megoldás: $x_p(t) := ae^{2t}$, $\dot{x}_p(t) = 2ae^{2t}$ és $\ddot{x}_p(t) = 4ae^{2t}$, amiből a $9ae^{2t} = 9e^{2t}$ egyenlet adódik, és így $a = 1$, tehát $x_p(t) = e^{2t}$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 \cos(t/\sqrt{2}) + c_2 \sin(t/\sqrt{2}) + e^{2t}.$$

16.117. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása: $x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. A partikuláris megoldás: $x_p(t) := ae^{-2t}$, $\dot{x}_p(t) = -2ae^{-2t}$ és $\ddot{x}_p(t) = 4ae^{-2t}$, amiből a $3ae^{-2t} = 3e^{-2t}$ egyenlet adódik, és így $a = 1$, tehát $x_p(t) = e^{-2t}$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + e^{-2t}.$$

16.118. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása: $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$. A partikuláris megoldás: $x_p(t) := at^3 + bt^2 + ct + d$, $\dot{x}_p(t) = 3at^2 + 2bt + ct$ és $\ddot{x}_p(t) = 6at + 2b$, amiből a $-2at^3 + (-2b - 3a)t^2 + (-2c - 2b + 6a)t - 2d - c + 2b = -2t^3 - 3t^2 + 8t + 1$ egyenlet adódik, és így $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ és $d = 0$, tehát $x_p(t) = t^3 - t$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + t^3 - t.$$

16.119. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása: $x_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$. A partikuláris megoldás: $x_p(t) := (a + bt)e^t$, $\dot{x}_p(t) = (a + b + bt)e^t$ és $\ddot{x}_p(t) = (a + 2b + bt)e^t$, amiből a $(2a - 3b + 2bt)e^t = te^t$ egyenlet adódik, és így $a = 3/4$, $b = 1/2$, tehát $x_p(t) = (3/4 + t/2)e^t$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t\right)e^t.$$

16.120. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása: $x_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$. A partikuláris megoldás: $x_p(t) := at^2 + bt + c + de^t$, $\dot{x}_p(t) = 2at + b + de^t$ és $\ddot{x}_p(t) = 2a + de^t$, amiből a $9at^2 + (9b - 12a)t + 9c - 6b + 2a + 4de^t = t^2 + e^t$ egyenlet adódik, és így $a = 1/9$, $b = 4/27$, $c = 2/27$ és $d = 1/4$, tehát $x_p(t) = (3t^2 + 4t + 2)/27 + 1/4 e^t$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{1}{27}(3t^2 + 4t + 2) + \frac{1}{4}e^t.$$

16.121. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása:

$$x_h(t) = e^{t/2}(c_1 \cos(\sqrt{35}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{35}t/2)).$$

A partikuláris megoldás: $x_p(t) := a \cos(3t) + b \sin(3t)$, $\dot{x}_p(t) = -3a \sin(3t) + 3b \cos(3t)$, $\ddot{x}_p(t) = -9a \cos(3t) - 9b \sin(3t)$ amiből a $3a \sin(3t) - 3b \cos(3t) = 3 \sin(3t)$ egyenlet adódik, és így $a = 1$, $b = 0$ tehát $x_p(t) = \cos(3t)$. A teljes megoldás:

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t}(c_1 \cos(\sqrt{35}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{35}t/2)) + \cos(3t).$$

16.122. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása: $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$. Rezonancia miatt a partikuláris megoldás: $x_p(t) := ate^{-t}$, $\dot{x}_p(t) = (a - at)e^{-t}$ és $\ddot{x}_p(t) = (-2a + at)e^{-t}$, amiből a $-6ae^{-t} = 2e^{-t}$ egyenlet adódik, és így $a = -1/3$, tehát $x_p(t) = te^{-t}/3$. A teljes megoldás:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} - \frac{1}{3}te^{-t}.$$

16.123. Megoldás (Feladat) A homogén egyenlet megoldása: $x_h(t) = e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))$. Rezonancia miatt a partikuláris megoldás: $x_p(t) := te^{-t}(a \cos(t) + b \sin(t))$, $\dot{x}_p(t) = e^{-t}((a - at + bt) \cos(t) + (b - at - bt) \sin(t))$ és $\ddot{x}_p(t) = e^{-t}((-2a + 2b - 2bt) \cos(t) + (-2a - 2b + 2at) \sin(t))$, amiből az $e^{-t}(2b \cos(t) - 2a \sin(t)) = e^{-t} \cos(t)$ egyenlet adódik, és így $a = 0$, $b = 1/2$ tehát $x_p(t) = te^{-t} \sin(t)/2$. A teljes megoldás:

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) + \frac{1}{2}te^{-t} \sin(t).$$

16.124. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, és így az általános megoldás: $x(t) = e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))$. A kezdetiérték-probléma megoldásához: $\dot{x}(t) = e^{-t}((c_2 - c_1) \cos(t) - (c_1 + c_2) \sin(t))$. Tehát a következő egyenletek adódnak: $x(0) = 2 = c_1$, $\dot{x}(0) = 1 = c_2 - c_1$, amiből $c_1 = 2$ és $c_2 = 3$, és így a megoldás:

$$x(t) = e^{-t}(\cos(t) - 5 \sin(t)).$$

16.125. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, és így az általános megoldás: $x(t) = c_1 e^{(2+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})t}$. A kezdetiérték-probléma megoldásához:

$$\dot{x}(t) = (2 + \sqrt{2})c_1 e^{(2+\sqrt{2})t} + (2 - \sqrt{2})c_2 e^{(2-\sqrt{2})t}.$$

Tehát a következő egyenletek adódnak: $x(0) = 0 = c_1 + c_2$, $\dot{x}(0) = 1 = (2 + \sqrt{2})c_1 + (2 - \sqrt{2})c_2$, amiből $c_1 = 1/(2\sqrt{2})$ és $c_2 = -1/(2\sqrt{2})$, és így a megoldás:

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{(2+\sqrt{2})t} - e^{(2-\sqrt{2})t} \right).$$

16.126. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, ebből $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, és így az általános megoldás: $x(t) = e^t(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))$. A kezdetiérték-probléma megoldásához: $\dot{x}(t) = e^{-t}((c_1 + c_2) \cos(t) + (c_2 - c_1) \sin(t))$. Tehát a következő egyenletek adódnak: $x(\pi) = e^\pi = -e^\pi c_1$, $\dot{x}(\pi) = 0 = -c_1 - c_2$, amiből $c_1 = -1$ és $c_2 = 1$, és így a megoldás: $x(t) = e^t(-\cos(t) + \sin(t))$.

16.127. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet $(\lambda + 1)^2 = 0$, így a homogén egyenlet megoldása $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. A próbafüggvény $x_p(t) := a$, amiből $a = 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása $x(0) = 5 = c_1 + 1$ és $\dot{x}(0) = 1 = -c_1 + c_2$, így $c_1 = 4$ és $c_2 = 5$, vagyis a megoldás $x(t) = 4e^{-t} + 5te^{-t} + 1$.

16.128. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet $(\lambda + 1)^2 = 0$, így a homogén egyenlet megoldása $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. A próbafüggvény $x_p(t) := at^2 e^{-t} + b$, amiből $\dot{x}_p(t) = (2at - at^2)e^{-t}$, $\ddot{x}_p(t) = (2a - 4at + at^2)e^{-t}$, és így $2ae^{-t} + b = 1 + 14e^{-t}$, amiből $a = 7$ és $b = 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása $x(0) = 5 = c_1 + 1$ és $\dot{x}(0) = 1 = -c_1 + c_2$, így $c_1 = 4$ és $c_2 = 5$, vagyis a megoldás $x(t) = 4e^{-t} + 5te^{-t} + 7t^2 e^{-t} + 1$.

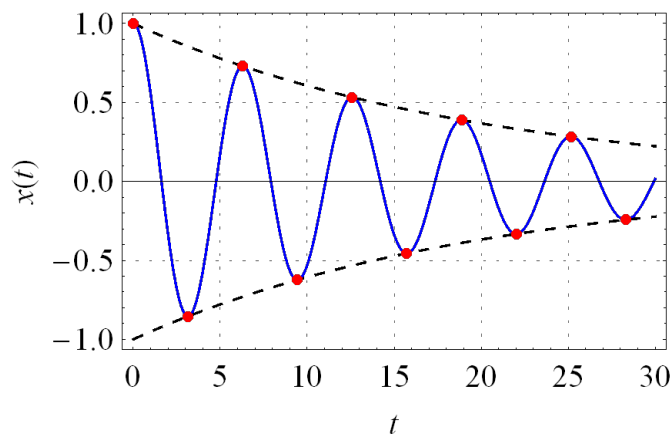
16.129. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet $\lambda(\lambda + 1) = 0$, így a homogén egyenlet megoldása $x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t}$. A konstans tagok rezonanciája miatt $x_p(t) := a + bt + c \cos(t) + d \sin(t)$, így $\dot{x}_p(t) = b - c \sin(t) + d \cos(t)$, $\ddot{x}_p(t) = -c \cos(t) - d \sin(t)$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe tehát $b + (d - c) \cos(t) - (d + c) \sin(t) = 3 + 2 \cos(t)$, amiből $b = 3$, $c = -1$, $d = 1$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges (beolvasható a c_1 -be), legyen $a := 0$; $x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + 3t - \cos(t) + \sin(t)$. A kezdetiérték-problémamegoldása: $x(0) = 0 = c_1 + c_2 - 1$, $\dot{x}(0) = 0 = -c_2 + 4$, amiből $c_1 = -3$ és $c_2 = 4$, végül $x(t) = -3 + 4e^{-t} + 3t - \cos(t) + \sin(t)$.

16.130. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}$. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $\eta := \sqrt{1 - \xi^2}$ jelölést, így az általános megoldást az $x(t) = e^{-\xi t}(c_1 \cos(\eta t) + c_2 \sin(\eta t))$ alakban írhatjuk fel; a deriváltja $\dot{x}(t) = e^{-\xi t}((-c_1 \xi + \eta c_2) \cos(\eta t) -$

$(c_2\xi + c_1\eta) \sin(\eta t)$). A kezdeti értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy $c_1 = 1$ és $c_2 = \xi/\eta$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$x(t) = e^{-\xi t} \left(\cos(\eta t) + \frac{\xi}{\eta} \sin(\eta t) \right).$$

Szélsőértéke abban a $t \geq 0$ pontban van, ahol $\dot{x}(t) = 0$ és $\ddot{x}(t) \neq 0$. A derivált $\dot{x}(t) = -\frac{1}{\eta} \sin(\eta t) e^{-\xi t}$, ami a $t_k = \frac{k\pi}{\eta}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ pontokban nulla, itt a függvényértékek $x(t_k) = (-1)^k e^{-\frac{\xi}{\eta} \pi k}$, ugyanakkor $\ddot{x}(t_k) = -x(t_k) \neq 0$, tehát ezek a pontok valóban szélsőértékek.



16.1. ábra. A megoldás és szélsőértékei a $\xi = 0.05$ esetben

16.131. Megoldás (Feladat) A kapacitásra és az induktivitásra az $i_C(t) = C u_C'(t)$ és az $u_L(t) = L i_L'(t)$ egyenletek írhatók fel. A töltésmegmaradás miatt az ϕ csomópontból kifolyó áramok összege nulla:

$$\frac{u_C(t) - u(t)}{R} + C u_C'(t) + i_L(t) = 0.$$

Mivel a kapacitás és az induktivitás párhuzamosan kapcsolt ezért feszültségük megegyezik: $u_C(t) = L i_L'(t)$. Ezt a két egyenletet rendezve felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_C'(t) &= -\frac{1}{RC} u_C(t) - \frac{1}{C} i_L(t) + \frac{1}{RC} u(t) \\ i_L'(t) &= \frac{1}{L} u_C(t). \end{aligned}$$

Így egy $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ alakú inhomogén differenciálegyenlet-rendszert kaptunk. Az adatokat felhasználva és az idő mértékegységét ms-nak, az áramerősség mértékegységét pedig mA-nek választva A és b a következő:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ezekkel a számokkal az idő mértékegysége ms az áramé mA. A homogén egyenlet megoldásához az A mátrix sajátértékei és sajátvektorai:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i, \quad s_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \pm 3i \\ 10 \end{pmatrix}.$$

A homogén egyenlet megoldása tehát:

$$\begin{aligned} u_{Ch}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left((c_1 + ic_2)(-1 + 3i)10e^{(-1+3i)t} \right) = \\ &= 2e^{-t}(- (c_1 + 3c_2) \cos(3t) - (3c_1 - c_2) \sin(3t)), \\ i_{Lh}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left((c_1 + ic_2)10e^{(-1+3i)t} \right) = 20e^{-t}(c_1 \cos(3t) - c_2 \sin(3t)). \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás meghatározásához az első esetben alkalmazzuk az

$$u_{Cp}(t) := U_{st}, \quad i_{Lp}(t) := I_{st}$$

konstans próbafüggvényeket. Így a következő egyenletrendszer adódik: $0 = -2U_{st} - I_{st} + 2 \cdot 10$ és $0 = 10U_{st}$, aminek a megoldása: $U_{st} = 0V$ és $I_{st} = 20 \text{ mA}$. Figyelembe véve, hogy kezdetben a hálózat energiamentes, a kezdeti értékek: $u_C(0) = i_L(0) = 0$ és így $0 = c_1 + 3c_2$, $0 = 20c_1 + 20$, amiből $c_1 = -1$ és $c_2 = 1/3$. A megoldás így:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{20}{3}e^{-t} \sin(3t), \\ i_L(t) &= -\frac{20}{3}e^{-t}(3 \cos(3t) + \sin(3t)) + 20. \end{aligned}$$

Ha a forrás feszültsége $u(t) = 10 \cos(2t)$, akkor a partikuláris megoldásokat a következő alakban keressük

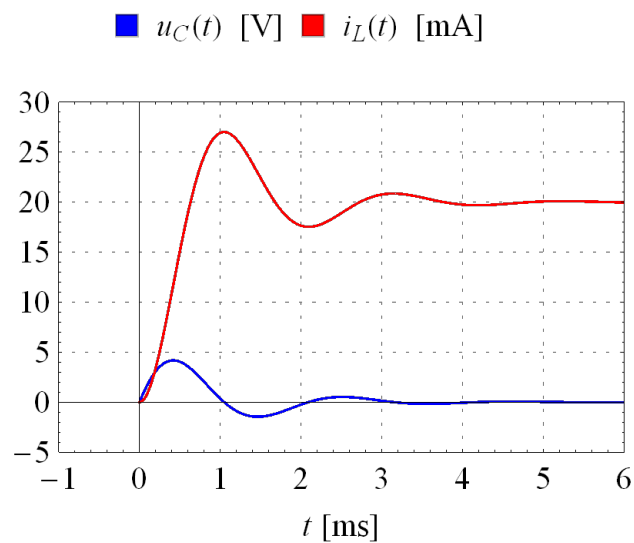
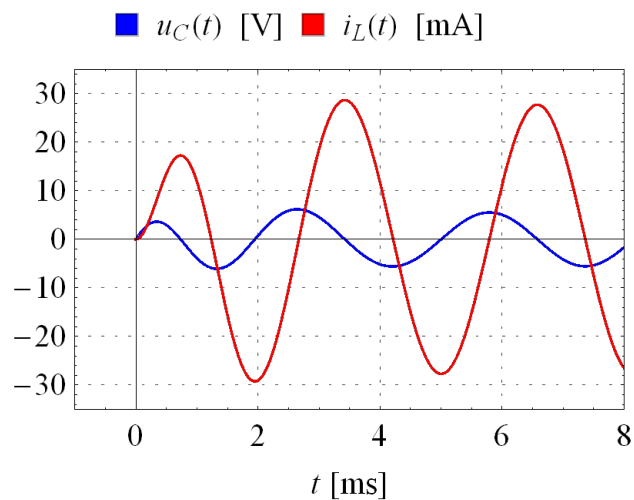
$$u_{Cp}(t) := a \cos(2t) + b \sin(2t), \quad i_{Lp}(t) = c \cos(2t) + d \sin(2t).$$

Így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -2a \sin(2t) + 2b \cos(2t) &= (-2a - c) \cos(2t) + (-2b - d) \sin(2t) + 2 \cdot 10 \cos(2t), \\ -2c \sin(2t) + 2d \cos(2t) &= 10a \cos(2t) + 10b \sin(2t). \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításával: $-2a = -2b - d$, $2b = -2a - c + 20$, $-2c = 10b$, $2d = 10a$, aminek a megoldása: $a = 3.07692$, $b = -4.61538$, $c = 23.0769$, $d = 15.3846$. A kezdetiérték-probléma megoldásához: $u_C(0) = -2c_1 + 6c_2 + 3.07692 = 0$, $i_L(0) = 20c_1 + 23.0769 = 0$, amiből $c_1 = -1.1539$, $c_2 = -0.8974$. A megoldás így:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= e^{-t}(-3.0769 \cos(3t) + 8.718 \sin(3t)) + 3.0769 \cos(2t) - 4.6154 \sin(2t) \\ i_L(t) &= e^{-t}(-23.0769 \cos(3t) - 17.9487 \sin(3t)) + 23.0769 \cos(2t) + 15.3846 \sin(2t). \end{aligned}$$

16.2. ábra. Az u_C és i_L grafikonja állandó feszültség esetén16.3. ábra. Az u_C és i_L grafikonja szinuszos feszültség esetén

16.132. Megoldás (Feladat) Annak a feltétele, hogy a megoldás ne oszcilláljon az, hogy a karakterisztikus polinom gyökei valósak (és nem pozitívak) legyenek. A karakterisztikus egyenlet $I\lambda^2 + b\lambda + k = 0$, és így a $b^2 - 4Ik \geq 0$ feltételt kapjuk, amiből $b > 2\sqrt{Ik}$.

16.2. Lineáris peremérték-feladatok

16.133. Megoldás (Feladat) Az egyenlet általános megoldása

$$[0, \pi] \ni x \mapsto c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + 1.$$

A peremfeltételek miatt a c_1 együtthatónak egyszerre kellene teljesítenie a $c_1 + 1 = 0$, $1 - c_1 = 0$ egymásnak ellentmondó feltételeket, tehát a peremérték-feladatnak nincs megoldása.

16.134. Megoldás (Feladat) Az egyenlet általános megoldása

$$[0, \pi] \ni x \mapsto c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + 2x - \pi.$$

A peremfeltételek az együtthatókra nézve a $c_1 - \pi = 0$, $-c_1 + \pi = 0$ feltételeket jelentik, a peremérték-feladatnak tehát a $[0, \pi] \ni x \mapsto \pi \cos(x) + c_2 \sin(x) + 2x - \pi$ függvény tetszőleges $c_2 \in \mathbb{R}$ állandó mellett megoldása.

16.135. Megoldás (Feladat) Az egyenlet általános megoldása

$$[0, \pi] \ni x \mapsto c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 e^x.$$

A peremfeltételek az együtthatókra nézve a $c_1 + c_3 = 1 + e^{\pi/2}$, $-c_1 + c_3 e^\pi = 1 + e^{\pi/2}$, $c_1 + c_3 e^\pi = 2e^\pi + e^{\pi/2} - 1$ feltételeket jelentik, ennek az egyenletrendszernek a megoldása $c_1 = e^{\pi/2} - 1$, $c_2 =$ tetszőleges, $c_3 = 2$ lévén a peremérték-feladat megoldásai tehát a $[0, \pi] \ni x \mapsto (e^{\pi/2} - 1) \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + 2e^x$ függvények, tetszőleges $c_2 \in \mathbb{R}$ állandó mellett.

16.136. Megoldás (Feladat) Az egyenlet általános megoldása

$$[0, \pi] \ni x \mapsto c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 e^x.$$

A peremfeltételek az együtthatókra nézve a $c_1 + c_3 = 0$, $-c_1 + c_3 e^{\pi/2} = 0$, $-2c_2 + c_3 e^{\pi/2} = 0$ feltételeket jelentik. Ennek az egyenletrendszernek az együtthatómátrixa nem szinguláris, hiszen determinánsa $2(e^{\pi/2} + 1) \neq 0$, ezért egyetlen megoldása $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, tehát a peremérték-feladat egyetlen megoldása a nulla függvény.

16.137. Megoldás (Feladat) A differenciálegyenlet Euler-féle, az $Y(x) := y(e^x)$ képlettel értelmezett függvény bevezetésével megkaphatjuk az egyenlet általános megoldását

$$[0, \pi] \ni x \mapsto c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 e^x.$$

A peremfeltételek az együtthatókra nézve a $c_1 + c_3 = e^{\pi/2} + 1$, $-c_1 + c_3 e^{\pi/2} = e^{\pi/2} + 1$, $c_1 + c_3 e^\pi = e^{\pi/2} - 1$ feltételeket jelentik. Szorozzuk meg az első egyenletet az $e^{\pi/2}$, a másodikat az $e^{\pi/2} - 1$ számmal, majd az eredményeket adjuk össze: $c_1 + c_3 e^\pi = 2e^\pi + e^{\pi/2} - 1$. Az eredményül kapott egyenlet jobb oldalán nem ugyanaz a szám áll, mint a harmadik egyenlet jobb oldalán, így az egyenletrendszernek, s vele együtt a peremérték-feladatnak nincs megoldása.

16.138. Megoldás (Feladat) A differenciálegyenlet Euler-féle, az $Y(x) := y(e^x)$ képlettel értelmezett függvény bevezetésével megkaphatjuk a jobb fél-egyenesen értelmezett $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto c_1/x^2 + c_2x^3$ teljes megoldását. A peremfeltételek felhasználásával kapjuk, hogy $c_1 + c_2 = 2$, $\frac{c_1}{4} + 8c_2 = \frac{33}{4}$, ahonnan $c_1 = c_2 = 1$, tehát a peremérték-feladat megoldása $[1, 2] \ni x \mapsto \frac{1}{x^2} + x^3$.

16.139. Megoldás (Feladat) A differenciálegyenlet Euler-féle, az $Y(x) := y(e^x)$ képlettel értelmezett függvény bevezetésével megkaphatjuk a pozitív számokon értelmezett $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \frac{c_1}{x^2} + c_2x^3$ teljes megoldást, $Z(x) := y(-e^x)$ bevezetésével pedig a $\mathbb{R}^- \ni x \mapsto c_1/x^2 + c_2x^3$ teljes megoldást. A $c_1 = 0$ választással bármelyikből olyan megoldást kapunk, amely kiterjeszthető az egész számegyenesre. Ha $c_2 = 2$, akkor az első feltétel is teljesül.

A feladatban szereplő második feltételt szokás – helytelenül – úgy fogalmazni, hogy a megoldás a nulla pontban korlátos.

Mivel egyenletünk implicit, nem nyilvánvaló, hogy létezik másik megoldása a peremérték-feladatnak, mint a $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x^3$ függvény.

16.140. Megoldás (Feladat) Az egyenlet általános megoldása a jobb fél-egyenesen $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto c_1/x^2 + c_2x^3$. A peremfeltételek felhasználásával kapjuk, hogy $3(c_1 + c_2) + 5(-2c_1 + 3c_2) = -7c_1 + 18c_2 = 7$, $2(c_1/4 + 8c_2) + 4(-c_1/4 + 12c_2) = 6$, ahonnan $c_1 = -340/439$, $c_2 = 77/878$, tehát a peremérték-feladat megoldása $[1, 2] \ni x \mapsto -340/(439x^2) + 77x^3/878$.

17. fejezet

Laplace-transzformáció

17.141. Megoldás (Feladat) Az $X := \mathcal{L}x$ Laplace-transzformációt elvégezve: $sX(s) - x(0) = X(s)$, amiből $X(s) = \frac{3}{s-1}$, és így $x(t) = 3e^t$.

17.142. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve: $2sX(s) - 1 - X(s) = 0$, amiből

$$X(s) = \frac{1}{2s-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t}.$$

17.143. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve: $s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = -X(s)$, amiből

$$X(s) = \frac{-2}{s^2+1} \quad \longrightarrow \quad x(t) = -2 \sin(t).$$

17.144. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve: $2sX(s) - 2 + X(s) = \frac{1}{s-2}$, amiből

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s-2)(2s+1)} + \frac{2}{2s+1} = \frac{\frac{1}{5}}{s-2} + \frac{-\frac{2}{5}}{2s+1} + \frac{2}{2s+1} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{s-2} + \frac{4}{5} \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{4}{5} e^{-\frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

17.145. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve az $sX(s) - 1 = 3X(s) - 2Y(s)$ és az $sY(s) - 1 = 2X(s) + 5Y(s)$ egyenleteket kapjuk, amit rendezve:

$$\begin{pmatrix} s-3 & 2 \\ -2 & s-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ebből a mátrix invertálásával:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 - 8s + 19} \begin{pmatrix} s - 5 & -2 \\ 2 & s - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X(s) = \frac{s - 7}{(s - 4)^2 + 3} = \frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 3} - \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{(s - 4)^2 + 3},$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{(s - 4)^2 + 3} = \frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{(s - 4)^2 + 3},$$

ebből inverz Laplace-transzformációval:

$$x(t) = e^{4t} (\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t)),$$

$$y(t) = e^{4t} (\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t)).$$

17.146. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve kapjuk, hogy

$$sX(s) - 4 = 3X(s), \quad sY(s) - 2 = X(s) + 3Y(s),$$

amit rendezve:

$$\begin{pmatrix} s - 3 & 0 \\ -1 & s - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ebből a mátrix invertálásával:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s - 3)^2} \begin{pmatrix} s - 3 & 0 \\ 1 & s - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$X(s) = \frac{4}{s - 3}, \quad Y(s) = \frac{2}{s - 3} + \frac{4}{(s - 3)^2},$$

így tehát $x(t) = 4e^{3t}$ és $y(t) = 2e^{3t} + 4te^{3t}$.

17.147. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve kapjuk, hogy $sX(s) - 4 = 3X(s) + Y(s)$, és $sY(s) - 2 = -X(s) + Y(s)$, amit rendezve:

$$\begin{pmatrix} s - 3 & -1 \\ 1 & s - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ebből a mátrix invertálásával:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 - 4s + 4} \begin{pmatrix} s - 1 & 1 \\ -1 & s - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$X(s) = \frac{4s - 2}{(s - 2)^2} = \frac{4}{s - 2} + \frac{6}{(s - 2)^2}, \quad Y(s) = \frac{2s - 10}{(s - 2)^2} = \frac{2}{s - 2} + \frac{-6}{(s - 2)^2},$$

így tehát $x(t) = 4e^{2t} + 6te^{2t}$ és $y(t) = 2e^{2t} - 6te^{2t}$.

17.148. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve kapjuk, hogy $sX(s) - 1 = X(s) + 3Y(s)$ és $sY(s) = -X(s) + 5Y(s)$, amit rendezve:

$$\begin{pmatrix} s-1 & -3 \\ 1 & s-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ebből a mátrix invertálásával:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 - 6s + 8} \begin{pmatrix} s-5 & 3 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X(s) = \frac{s-5}{(s-2)(s-4)} = \frac{\frac{3}{2}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-4}, \quad Y(s) = \frac{-1}{(s-2)(s-4)} = \frac{\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-4},$$

így tehát $x(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t}$ és $y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t}$.

17.149. Megoldás (Feladat) A transzformáció után: $sX(s) - 1 + X(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$, vagyis

$$X(s) = \frac{2 + (s+1)^2}{(s+1)^3} = \frac{2}{(1+s)^3} + \frac{1}{1+s} \rightarrow x(t) = t^2 e^{-t} + e^{-t}.$$

17.150. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve: $sX(s) + 2 = X(s) - Y(s) + \frac{6}{s}$, $sY(s) - 4 = -4X(s) + Y(s) - \frac{12}{s}$, amiből

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-1)^2 - 4} \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ -4 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2s+6}{s} \\ \frac{4s-12}{s} \end{pmatrix},$$

ebből pedig

$$X(s) = \frac{-2s^2 + 4s + 6}{s(s^2 - 2s - 3)} = \frac{-2}{s} \rightarrow x(t) = -2,$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + -8s - 12}{s(s^2 - 2s - 3)} = \frac{4}{s} \rightarrow y(t) = 4.$$

17.151. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve kapjuk, hogy $sX(s) - 1 = 4Y(s) + \frac{1}{s}$ és $sY(s) = X(s) + \frac{1}{s^2}$, amit rendezve:

$$\begin{pmatrix} s & -4 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} + 1 \\ \frac{1}{s^2} \end{pmatrix},$$

ebből a mátrix invertálásával:

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 - 4} \begin{pmatrix} s & 4 \\ 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+s}{s} \\ \frac{1}{s^2} \end{pmatrix},$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2-4} + \frac{4}{s^2(s^2-4)} = \frac{s^3+s^2+4}{s^2(s-2)(s+2)} = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2},$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s(s^2-4)} = \frac{1}{s(s-2)} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s-2)},$$

így tehát $x(t) = e^{2t} - t$ és $y(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$.

17.152. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve: $sX(s) = -5Y(s) - 10/s$, és $sY(s) = X(s) - 2Y(s)$, amiből

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+2)+5} \begin{pmatrix} s+2 & -5 \\ 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10/s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10s+20}{s(s^2+2s+5)} \\ -\frac{10}{s(s^2+2s+5)} \end{pmatrix},$$

ebből pedig

$$X(s) = -10 \frac{s+2}{s(s^2+2s+5)} = -\frac{4}{s} + \frac{4s-2}{(s+1)^2+2^2} = -\frac{4}{s} + \frac{4 \cdot (s+1) - 3 \cdot 2}{(s+1)^2+2^2},$$

$$Y(s) = \frac{-10}{s(s^2+2s+5)} = -\frac{2}{s} + \frac{2s+4}{(s+1)^2+2^2} = -\frac{2}{s} + \frac{2 \cdot (s+1) + 1 \cdot 2}{(s+1)^2+2^2}.$$

Az inverz transzformáltak: $x(t) = e^{-t}(4 \cos(2t) - 3 \sin(2t)) - 4$, $y(t) = e^{-t}(2 \cos(2t) + \sin(2t)) - 2$.

17.153. Megoldás (Feladat) A Laplace-transzformációt elvégezve: $s^2X(s) - 5s - 1 + 2sX(s) - 10 + X(s) = \frac{1}{s}$, amiből

$$X(s) = \frac{5s^2 + 11s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s+1} + \frac{5}{(s+1)^2} \quad \rightarrow \quad x(t) = 1 + 4e^{-t} + 5te^{-t}.$$

17.154. Megoldás (Feladat) A második egyenletből $x = \dot{y} + y$, ugyanennek az egyenletnek a deriválásával kapjuk, hogy $\ddot{y} = \dot{x} - \dot{y} = x + 3y + 8 - \dot{y} = \dot{y} + y + 3y + 8 - \dot{y}$, amiből végül az $\ddot{y} - 4y = 8$ inhomogén másodrendű egyenletet kapjuk az $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ kezdeti értékekkel. A Laplace-transzformációt elvégezve: $s^2Y(s) - 4Y(s) = \frac{8}{s}$, amiből

$$Y(s) = \frac{8}{s(s^2-4)} = \frac{8}{s(s-2)(s+2)} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2},$$

így a megoldás $y(t) = e^{2t} + e^{-2t} - 2$ és $x(t) = \dot{y}(t) + y(t) = 3e^{2t} - e^{-2t} - 2$.

17.155. Megoldás (Feladat) Az első egyenletet deriválva $\ddot{x} = 7\dot{x} - 9\dot{y} + 16t = 7\dot{x} - 9(9x - 11y) + 16t$. Szintén az első egyenletből $y = \frac{1}{9}(7x - \dot{x} + 8t^2)$,

amit beírva az előbb kapott egyenletbe $\ddot{x} = 7\dot{x} - 81x + 11(7x - \dot{x} + 8t^2) + 16t$, végül tehát

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x = 88t^2 + 16t, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.$$

Laplace-transzformáció után $s^2X(s) + 4sX(s) + 4X(s) = \frac{176}{s^3} + \frac{16}{s^2}$, vagyis

$$X(s) = \frac{16s + 176}{s^3(s+2)^2} = \frac{44}{s^3} - \frac{40}{s^2} + \frac{29}{s} - \frac{18}{(s+2)^2} - \frac{29}{s+2}$$

amiből kapjuk, hogy $x(t) = -29e^{-2t} - 18te^{-2t} + 22t^2 - 40t + 29$, és $y(t) = -27e^{-2t} - 18te^{-2t} + 18t^2 - 36t + 27$.

18. fejezet

A stabilitás elmélet elemei

18.1. Lineáris rendszerek

18.156. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 5$, ezért az egyensúlyi pont instabil csomó; a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok: $v_1 = (-1, 1)$ és $v_2 = (1, 3)$. A teljes fázissík az instabil altérhez tartozik, azaz E_s és E_c nulla dimenziós, és $E_u = \mathbb{R}^2$ (18.1. ábra).

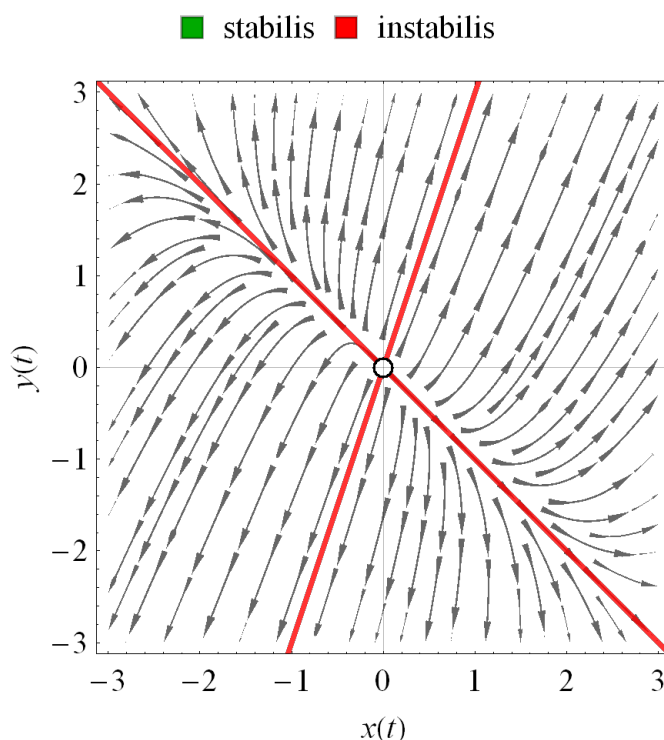
18.157. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$, ezért az egyensúlyi pont nyereg. A mátrix sajátvektorai: $v_1 = (1, 2)$ és $v_2 = (1, -2)$, ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1\}$, $E_u = \text{span}\{v_2\}$ (18.2. ábra).

18.158. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 3$, ezért az egyensúlyi pont nyereg. A mátrix sajátvektorai: $v_1 = (4, -1)$ és $v_2 = (2, 1)$, ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1\}$, $E_u = \text{span}\{v_2\}$ (18.3. ábra).

18.159. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, ezért az egyensúlyi pont instabil fókusz. A teljes fázissík az instabil altérhez tartozik, azaz E_s és E_c nulla dimenziós, és $E_u = \mathbb{R}^2$ (18.4. ábra).

18.160. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$, ezért az egyensúlyi pont stabil fókusz. fázissík a stabil altérhez tartozik, azaz E_u és E_c nulla dimenziós, és $E_s = \mathbb{R}^2$ (18.5. ábra).

18.161. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, ezért az egyensúlyi pont centrum. A teljes fázissík a centrális altérhez tartozik, azaz E_s és E_u nulla dimenziós, és $E_c = \mathbb{R}^2$ (18.6. ábra).

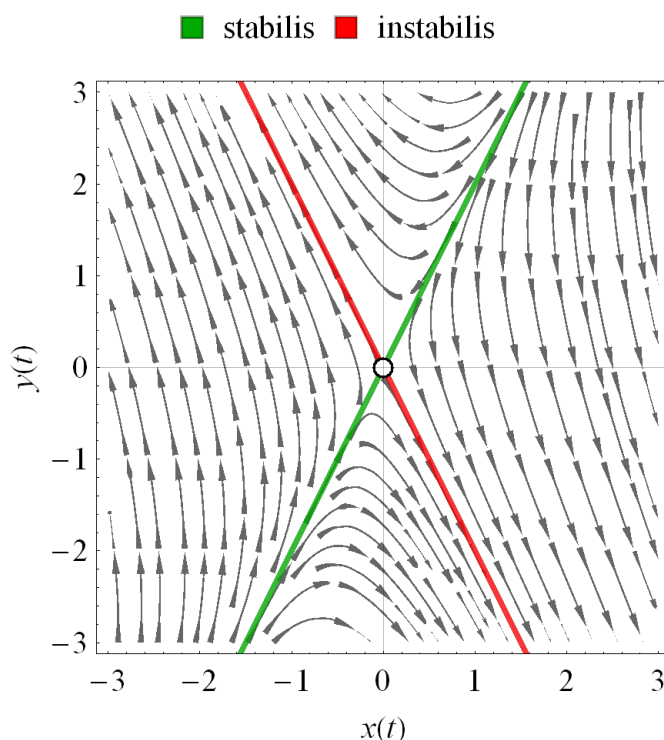
18.1. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.162. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 3$, ezért az egyensúlyi pont instabil elfajult csomó. A mátrix a sajátvektora: $v_1 = (1, 1)$. A teljes fázissík az instabil altérhez tartozik, azaz E_s és E_c nulla dimenziós, és $E_u = \mathbb{R}^2$ (18.7. ábra).

18.163. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = -1$, ezért az egyensúlyi pont stabil elfajult csomó. A mátrix a sajátvektora: $v_1 = (1, 1)$. A teljes fázissík a stabil altérhez tartozik, azaz E_u és E_c nulla dimenziós, és $E_s = \mathbb{R}^2$ (18.8. ábra).

18.164. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 2$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (1, -3, -5)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ és $v_3 = (1, 0, 1)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1\}$, $E_u = \text{span}\{v_2, v_3\}$ (18.9. ábra).

18.165. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, és $\lambda_3 = 2$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (0, -1, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, és $v_3 = (3, -2, 1)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1\}$, $E_u = \text{span}\{v_3\}$ és $E_c = \text{span}\{v_2\}$ (18.10. ábra).

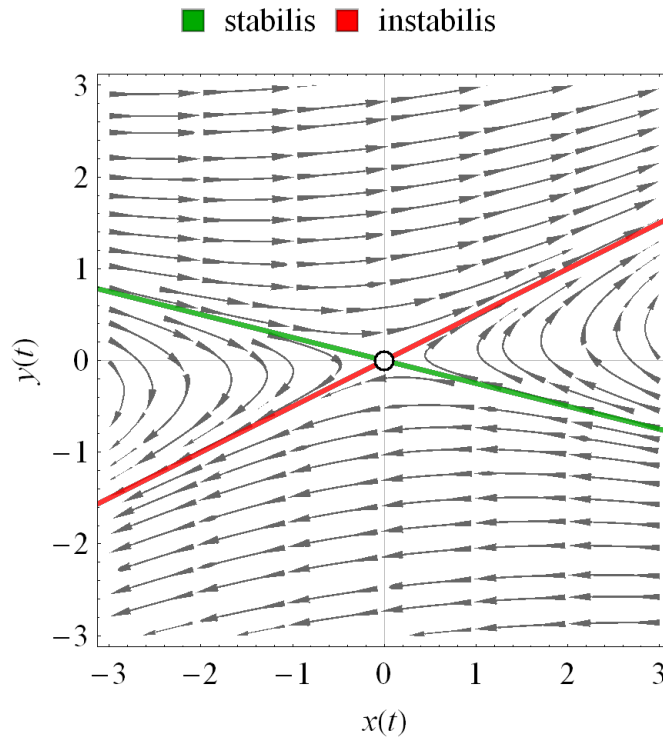
18.2. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.166. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$, és $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$. Mivel minden sajátérték valós része pozitív, azért E_s és E_c nulla dimenziós, így nincs szükség a sajátvektorokra, $E_u = \mathbb{R}^3$ (18.11. ábra).

18.167. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (0, 2, 1)$, $v_{2,3} = (2, 2, -1 \pm i)$. Ezért az invariáns alterek: $E_u = \text{span}\{v_1\}$, $E_c = \text{span}\{\text{Re}(v_2), \text{Im}(v_2)\}$ (18.12. ábra).

18.168. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = -1$, és $\lambda_3 = 3$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (0, 2, 1)$, $v_2 = (-2, 0, 1)$ és $v_3 = (-1, 1, 3)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1, v_2\}$, $E_u = \text{span}\{v_3\}$ (18.13. ábra).

18.169. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 0$ és $\lambda_3 = 3$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_3 = (4, 4, 1)$. A 0 kétszeres sajátértékhez csak egydimenziós sajátaltér tartozik, ezért szükség van egy általánosított sajátvektorra, melyre $Av_1 = 0 \cdot v_1 + v_2$ fennáll. Az v_1 sajátvektor ismeretében $v_2 = (2, -3, 1)$, e két vektor feszíti ki a 0 sajátértékhez tartozó



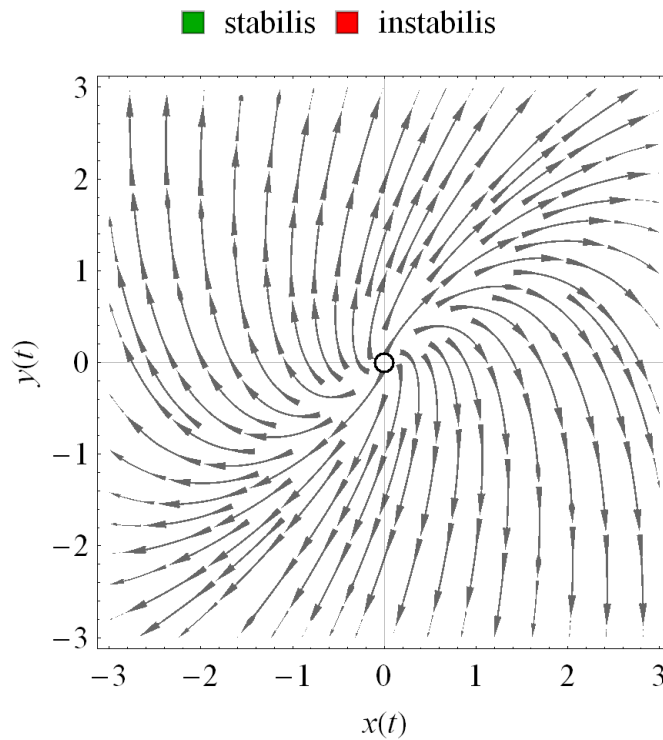
18.3. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek centrális alteret. Így az invariáns alterek: $E_c = \text{span}\{v_1, v_2\}$, $E_u = \text{span}\{v_3\}$ (18.14. ábra).

18.170. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (1, 3, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$. Ezért az invariáns alterek: $E_u = \text{span}\{v_2, v_3\}$, $E_c = \text{span}\{v_1\}$ (18.14. ábra).

18.171. Megoldás (Feladat) Alkalmazzuk a 7.1. diagrammot. $\text{tr}(A) = p$, $\det(A) = 1 + p$. Ezért $\text{tr}^2(A) - 4\det(A) = p^2 - 4p - 4 = (p - 2)^2 - 8$. A 7.4. Állítás alapján a következőket kapjuk.

Ha $p < -1$, akkor nyereg. Ha $p = -1$, akkor végtelen sok egyensúlyi pont van, mivel $\det(A) = 1 + p = 0$. Ha $-1 < p \leq 2 - \sqrt{8}$, akkor stabil csomó. Ha $2 - \sqrt{8} < p < 0$, akkor stabil fókusz. Ha $p = 0$, akkor centrum. Ha $0 < p < 2 + \sqrt{8}$, akkor instabil fókusz. Ha $2 + \sqrt{8} \leq p$, akkor instabil csomó.

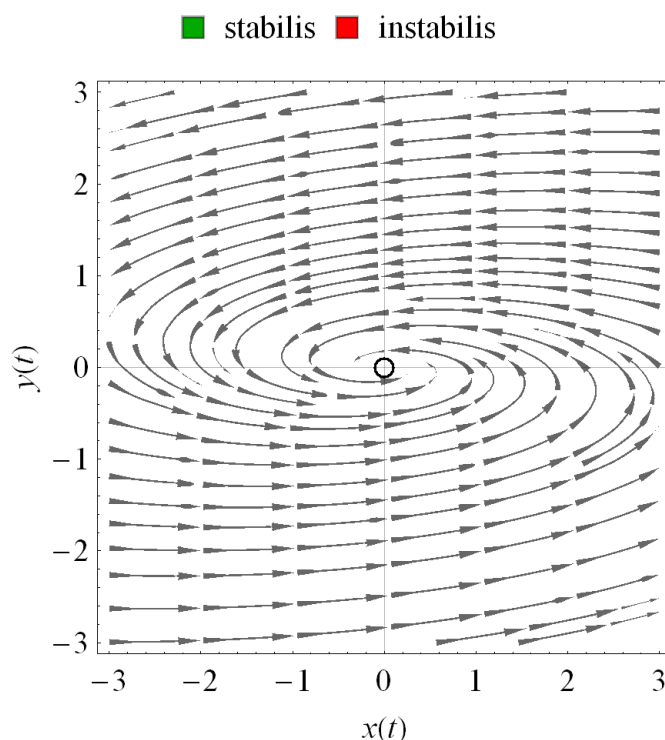
18.172. Megoldás (Feladat) Alkalmazzuk a 7.1. diagrammot. $\text{tr}(A) = 1 + p$, $\det(A) = 1 + p$. Ezért $\text{tr}^2(A) - 4\det(A) = (1 + p)^2 - 4(1 + p) = (1 + p)(p - 3)$. A 7.4. Állítás alapján a következőket kapjuk.

18.4. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

Ha $p < -1$, akkor nyereg. Ha $p = -1$, akkor végtelen sok egyensúlyi pont van, mivel $\det(A) = 1 + p = 0$. Ha $-1 < p < 3$, akkor instabil fókusz. Ha $3 \leq p$, akkor instabil csomó.

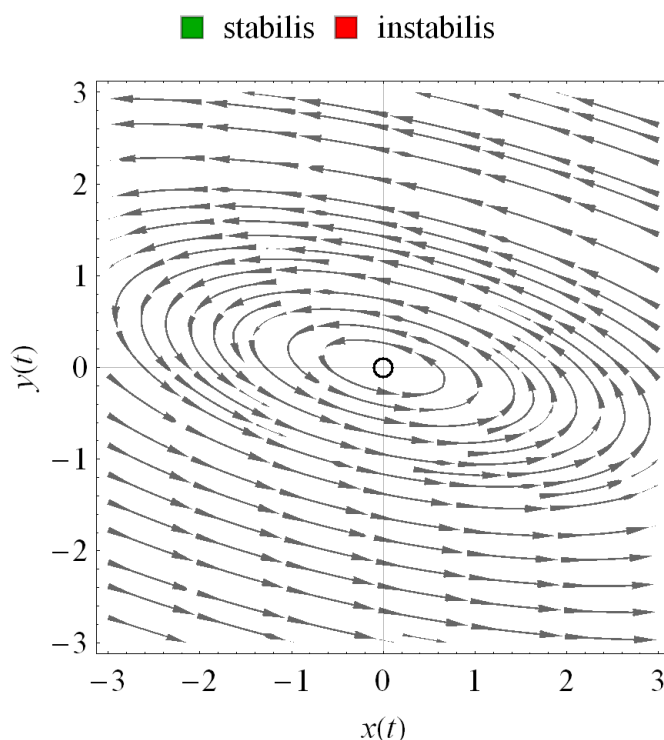
18.173. Megoldás (Feladat) Alkalmazzuk a 7.1. diagrammot. $\operatorname{tr}(A) = \sqrt{3} \cos(\alpha)$, $\det(A) = \sqrt{3} \sin(\alpha)$. Ezért $\operatorname{tr}^2(A) - 4 \det(A) = 3 \cos^2(\alpha) - 4\sqrt{3} \sin(\alpha)$. Az α értékét változtatva a $(\operatorname{tr}(A), \det(A))$ pont a $(\operatorname{tr}, \det)$ paramétersíkon egy $\sqrt{3}$ sugarú kört fut be. Ennek két metszéspontja van a $\operatorname{tr}^2(A) - 4 \det(A) = 0$ parabolával, a metszéspontokban jelölje α értékét α_1 és $\pi - \alpha_1$. Az α_1 értékét a $3 \cos^2 \alpha_1 - 4\sqrt{3} \sin \alpha_1$, azaz $3 \sin^2(\alpha_1) + 4\sqrt{3} \sin(\alpha_1) - 3 = 0$ egyenlet határozza meg. A 7.1. diagrammot alkalmazva a következőt kapjuk.

Ha $0 < \alpha \leq \alpha_1$, akkor instabil csomó. Ha $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$, akkor instabil fókusz. Ha $\alpha = \pi/2$, akkor centrum. Ha $\pi/2 < \alpha < \pi - \alpha_1$, akkor stabil fókusz. Ha $\pi - \alpha_1 \leq \alpha < \pi$, akkor stabil csomó. Ha $\pi < \alpha < 2\pi$, akkor nyereg. Ha $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$, illetve $\alpha = 0$, akkor végtelen sok egyensúlyi pont van, mivel $\det(A) = \sqrt{3} \sin(\alpha) = 0$.

18.5. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.174. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékeit meghatározó karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 - \lambda + p = 0$. A p paraméter értékét változtatva a gyökök valós részének előjele kétféleképpen változhat: vagy a nullán vagy a képzetes tengelyen haladhat át a gyök. Az egyenletnek semmilyen valós p esetén nem lehet tiszta képzetes megoldása, ugyanis a $\lambda = i\omega$ helyettesítéssel p -re nem valós értéket kapunk: $p = i\omega(1 + \omega^2)$. Így csak a nullán haladhat át a gyök. A λ helyére nullát helyettesítve $p = 0$, tehát ez az egyetlen olyan érték, amikor a gyökök valós részének előjele változhat. A $\lambda \mapsto \lambda^3 - \lambda + p$ függvény grafikonját ábrázolva valós λ értékekre, láthatjuk, hogy kis pozitív p esetén egy pozitív és két negatív valós gyök van, míg kis negatív p esetén két pozitív és egy negatív valós gyök van. Mivel a gyökök valós részének előjele, azaz az invariáns alterek dimenziója csak $p = 0$ esetén változhat, azért $p < 0$ esetén $\dim(E_s) = 2$, $\dim(E_u) = 1$. Ha $p = 0$, akkor $\dim(E_s) = 1$, $\dim(E_u) = 1$ és $\dim(E_c) = 1$. Végül, ha $p > 0$, akkor $\dim(E_s) = 1$, $\dim(E_u) = 2$.

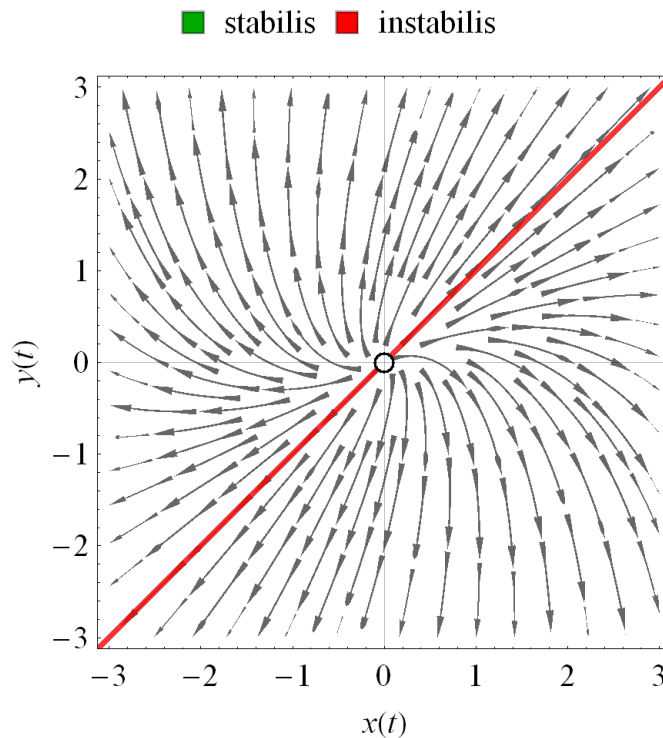
18.175. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékeit meghatározó karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 - \lambda^2(p+1) + \lambda(p+1) - 1 = 0$. Vegyük észre, hogy ennek $\lambda = 1$ megoldása, így a karakterisztikus egyenlet $(\lambda - 1)(\lambda^2 - p\lambda + 1) = 0$.

18.6. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

Könnyen látható, hogy a másodfokú tag gyökei valós részének előjele megegyezik p előjével. Ezért az invariáns alterek dimenziója csak $p = 0$ esetén változhat. Ha $p < 0$, akkor $\dim(E_s) = 2$, $\dim(E_u) = 1$. Ha $p = 0$, akkor $\dim(E_u) = 1$ és $\dim(E_c) = 2$. Végül, ha $p > 0$, akkor $\dim(E_u) = 3$.

18.176. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékeit meghatározó karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 - \lambda^2(p + q + 1) + \lambda(p - q - pq) - pq = 0$. Vegyük észre, hogy ennek $\lambda = p$ megoldása, így a karakterisztikus egyenlet $(\lambda - p)(\lambda^2 - (q + 1)\lambda - q) = 0$. A másodfokú egyenlet megoldó képletét alkalmazva látható, hogy a másodfokú tag gyökeinek valós része a következőképpen függ q értékétől. Ha q pozitív, akkor egy pozitív és egy negatív valós gyök van. Ha $-1 < q < 0$, akkor két pozitív valós részű gyök van. Ha $q = -1$, akkor két nulla valós részű gyök van. Ha pedig $q < -1$, akkor két negatív valós részű gyök van. A (p, q) paramétersíkot tehát a $p = 0$, $q = 0$ és $q = -1$ egyenes hat tartományra bontja a sajátértékek valós részének előjele szerint, melyekben az invariáns alterek dimenziója a következőképpen alakul.

Ha $p > 0$ és $q > 0$, akkor $\dim(E_s) = 1$, $\dim(E_u) = 2$. Ha $p > 0$ és $q = 0$, akkor $\dim(E_u) = 2$, $\dim(E_c) = 1$. Ha $p > 0$ és $-1 < q < 0$, akkor



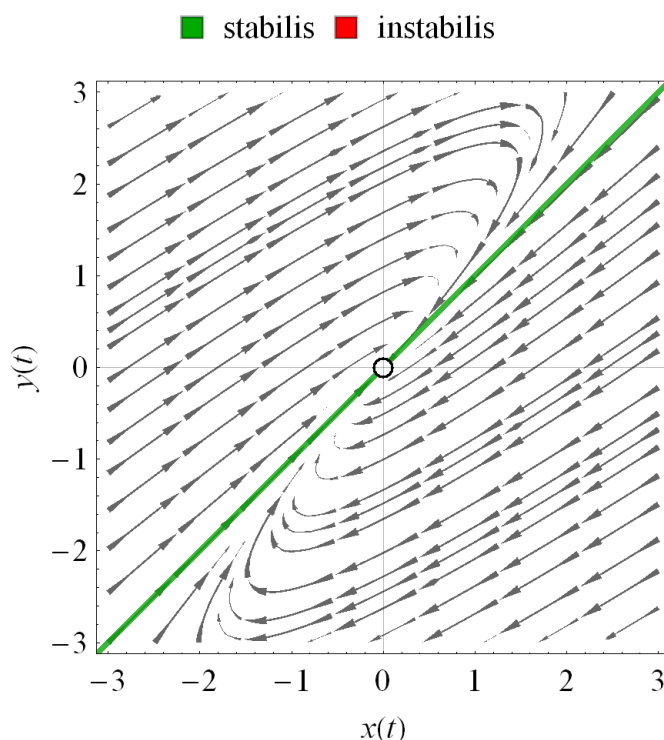
18.7. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

$\dim(E_u) = 3$. Ha $p > 0$ és $q = -1$, akkor $\dim(E_u) = 1$, $\dim(E_c) = 2$. Ha $p > 0$ és $q < -1$, akkor $\dim(E_s) = 2$, $\dim(E_u) = 1$. Ha $p = 0$, akkor az esetek a fentihez hasonlóak, csak E_u dimenziója minden esetben eggyel kevesebb, E_c dimenziója pedig eggyel több. Ha pedig $p < 0$, akkor E_u dimenziója minden esetben eggyel kevesebb, E_s dimenziója pedig eggyel több.

18.177. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (3, -3, 1, -1)$, $v_2 = (3, 3, 1, 1)$, és $v_{3,4} = (1, \pm i, 1, \pm i)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1\}$, $E_u = \text{span}\{v_2\}$, $E_c = \text{span}\{\text{Re}(v_3), \text{Im}(v_3)\}$.

18.178. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, $\lambda_{3,4} = 1 \pm i$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_{1,2} = (-1 \mp i, 2, -1 \pm i, \mp 2i)$, $v_{3,4} = (1 \pm i, \pm 2i, -1 \pm i, -2)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{\text{Re}(v_1), \text{Im}(v_1)\}$, $E_u = \text{span}\{\text{Re}(v_3), \text{Im}(v_3)\}$.

18.179. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (-2, 4, 3, -6)$, $v_2 = (2, 4, 3, 6)$,

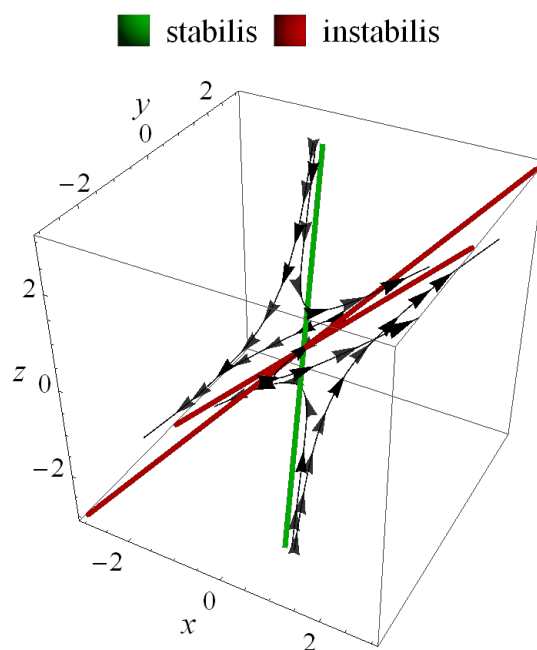
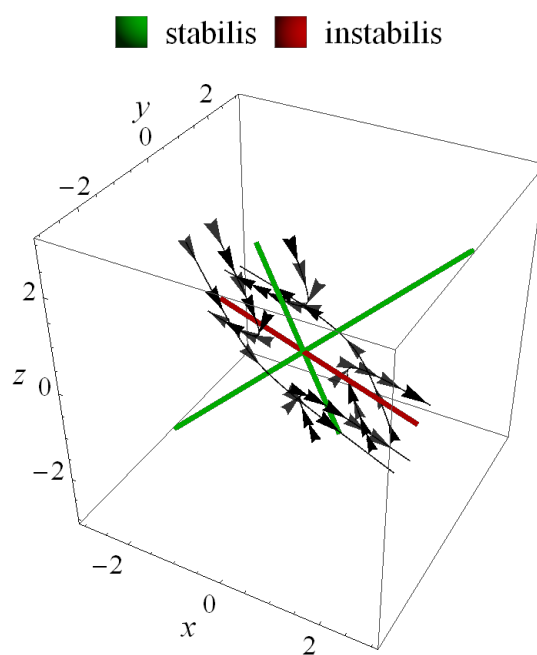
18.8. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

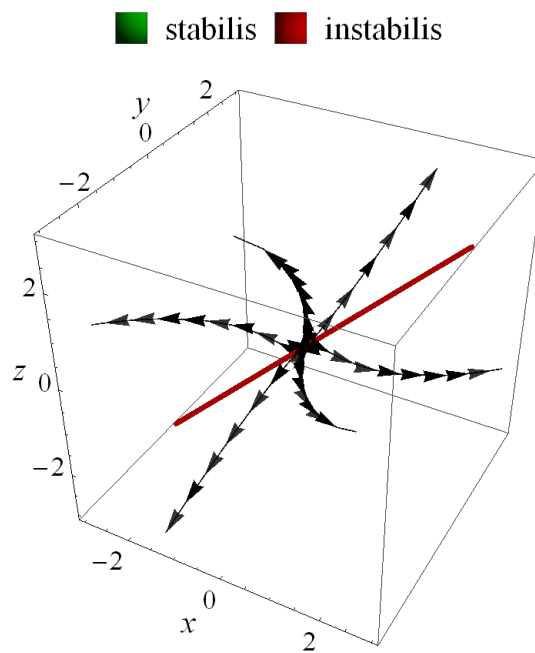
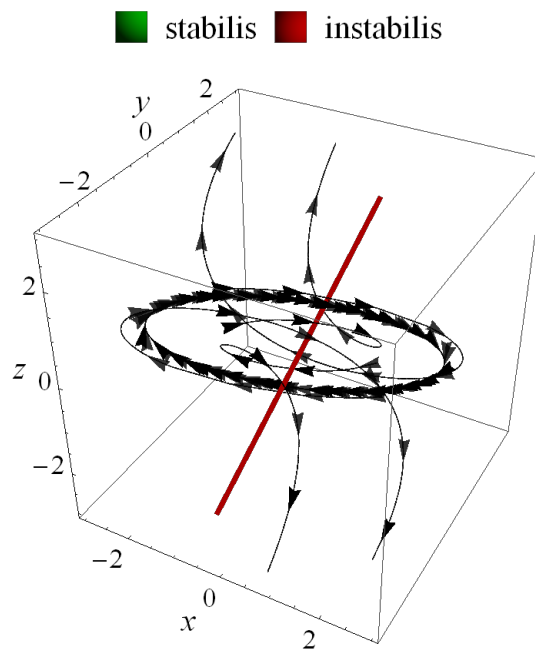
és $v_{3,4} = (\mp 2i, 4, 1, \pm 2i)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1\}$, $E_u = \text{span}\{v_2\}$, $E_c = \text{span}\{\text{Re}(v_3), \text{Im}(v_3)\}$.

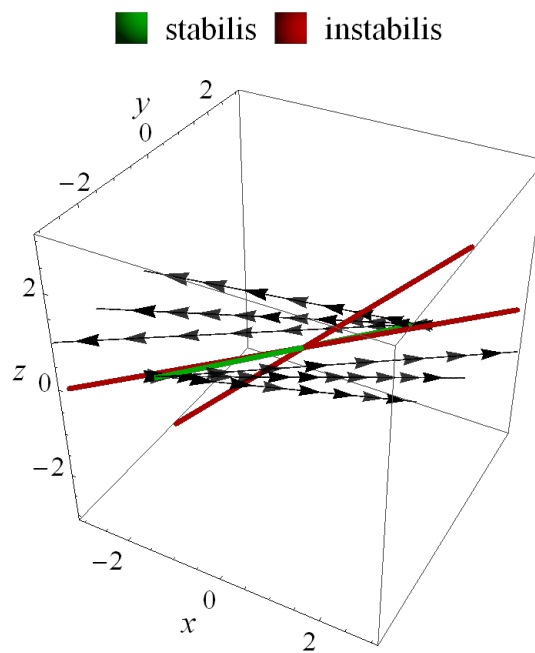
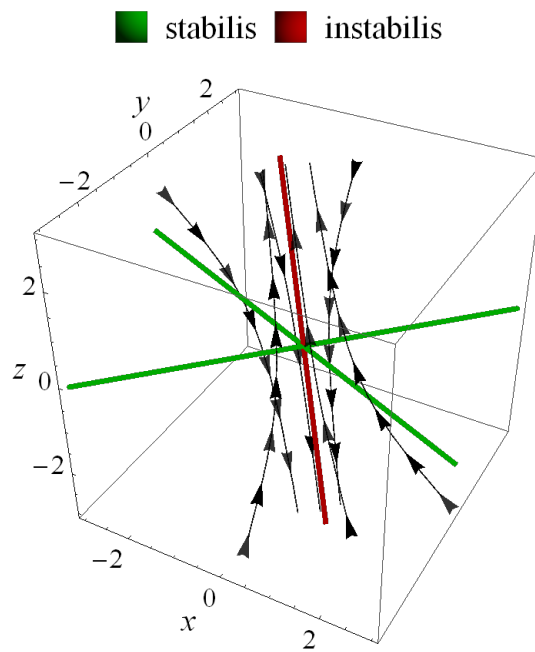
18.180. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (-1, 2, -2, 4)$, $v_2 = (-1, 1, -5, 5)$, $v_3 = (1, 1, 1, 1)$ és $v_4 = (1, 2, 2, 4)$. Ezért az invariáns alterek: $E_s = \text{span}\{v_1, v_2\}$, $E_u = \text{span}\{v_3, v_4\}$.

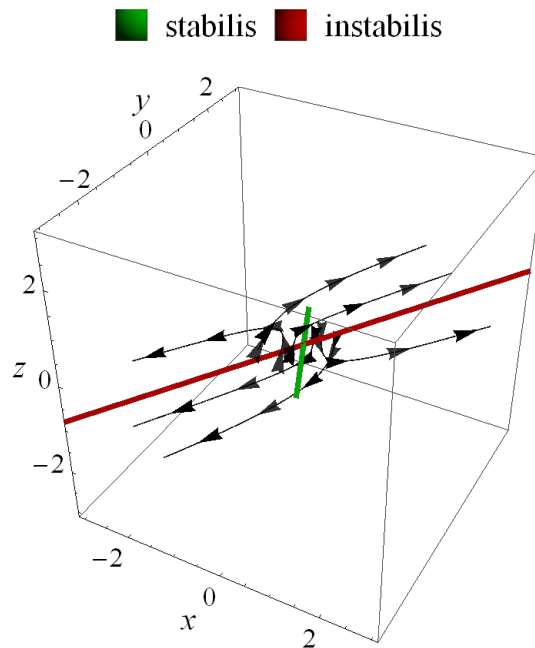
18.181. Megoldás (Feladat) A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, az ezekhez tartozó sajátvektorai: $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1, -1)$, $v_{3,4} = (5, \pm 5i, -4 \pm 3i, -3 \mp 4i)$. Ezért az invariáns alterek: $E_u = \text{span}\{v_2\}$, $E_c = \text{span}\{v_1, \text{Re}(v_3), \text{Im}(v_3)\}$.

18.182. Megoldás (Feladat) Az egyenlet nulla megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha a $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. A Routh-Hurwitz-kritérium (7.5. Tétel) szerint ez akkor áll fenn a $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenletre, ha $a_2 > 0$, $a_1a_2 - a_0 > 0$ és $a_0 > 0$. Esetünkben $a_1a_2 - a_0 = -1$, így a nulla megoldás instabilis.

18.9. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek18.10. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.11. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek18.12. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.13. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek18.14. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.15. ábra. A rendszer fázisképe, az *egydimenziós* stabilis és instabilis alterek

18.183. Megoldás (Feladat) Az egyenlet nulla megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha a $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. A Routh-Hurwitz-kritérium (7.5. Tétel) szerint ez akkor áll fenn a $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenletre, ha $a_2 > 0$, $a_1a_2 - a_0 > 0$ és $a_0 > 0$. Esetünkben $a_2 = 2 > 0$, $a_1a_2 - a_0 = 1 > 0$ és $a_0 = 3 > 0$, így a nulla megoldás aszimptotikusan stabilis.

18.184. Megoldás (Feladat) Az egyenlet nulla megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha a $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. A Routh-Hurwitz-kritérium (7.5. Tétel) szerint ez akkor áll fenn a $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenletre, ha $a_3 > 0$, $a_3a_2 - a_1 > 0$, $a_3(a_2a_1 - a_0a_3) - a_1^2 > 0$ és $a_0 > 0$. Esetünkben $a_3 = 2 > 0$, $a_3a_2 - a_1 = 5 > 0$, $a_3(a_2a_1 - a_0a_3) - a_1^2 = 7 > 0$ és $a_0 = 2 > 0$, így a nulla megoldás aszimptotikusan stabilis.

18.185. Megoldás (Feladat) Az egyenlet nulla megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha a $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. A Routh-Hurwitz-kritérium (7.5. Tétel) szerint ez akkor áll fenn a $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenletre, ha $a_3 > 0$, $a_3a_2 - a_1 > 0$, $a_3(a_2a_1 - a_0a_3) - a_1^2 > 0$ és $a_0 > 0$. Esetünkben $a_3a_2 - a_1 = -1$, így a nulla megoldás instabilis.

18.186. Megoldás (Feladat) Az egyenlet nulla megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha a $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. A Routh-Hurwitz-kritérium (7.5. Tétel) szerint ez akkor áll fenn a $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenletre, ha $a_2 > 0$, $a_1a_2 - a_0 > 0$ és $a_0 > 0$. Esetünkben $a_2 = a$, $a_1a_2 - a_0 = ab - 2$ és $a_0 = 2 > 0$, így a nulla megoldás pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha $a > 0$ és $ab > 2$.

18.187. Megoldás (Feladat) Az egyenlet nulla megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha a $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. A Routh-Hurwitz-kritérium (7.5. Tétel) szerint ez akkor áll fenn a $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenletre, ha $a_3 > 0$, $a_3a_2 - a_1 > 0$, $a_3(a_2a_1 - a_0a_3) - a_1^2 > 0$ és $a_0 > 0$. Esetünkben $a_3 = 2 > 0$, $a_3a_2 - a_1 = 4 > 0$, $a_3(a_2a_1 - a_0a_3) - a_1^2 = 8 - 4a$ és $a_0 = a$, így a nulla megoldás pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha $0 < a < 2$.

19. fejezet

Nemlineáris rendszerek

19.1. Lokális vizsgálat az egyensúlyi pontok körül

19.188. Megoldás (Feladat) A rendszer Jacobi mátrixa az origóban

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\text{tr}(J) = -4$, $\det(J) = 1$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = 12$. Így a 8.4. Tétel szerint és a 7.1. diagrammot alkalmazva, az egyensúlyi pont stabilis csomó (19.1. ábra).

19.189. Megoldás (Feladat) A rendszer Jacobi mátrixa az origóban

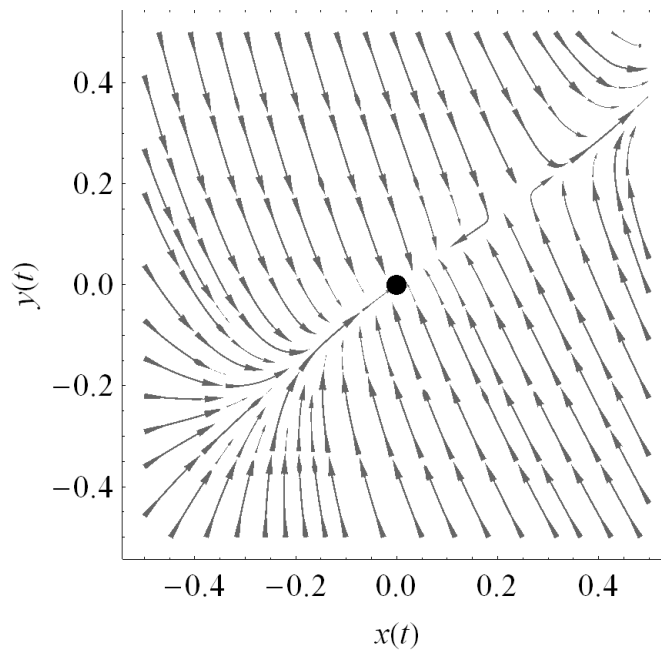
$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\text{tr}(J) = 1$, $\det(J) = -6$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = 25$. Így a 8.4. Tétel szerint és a 7.1. diagrammot alkalmazva, az egyensúlyi pont nyereg (19.2. ábra).

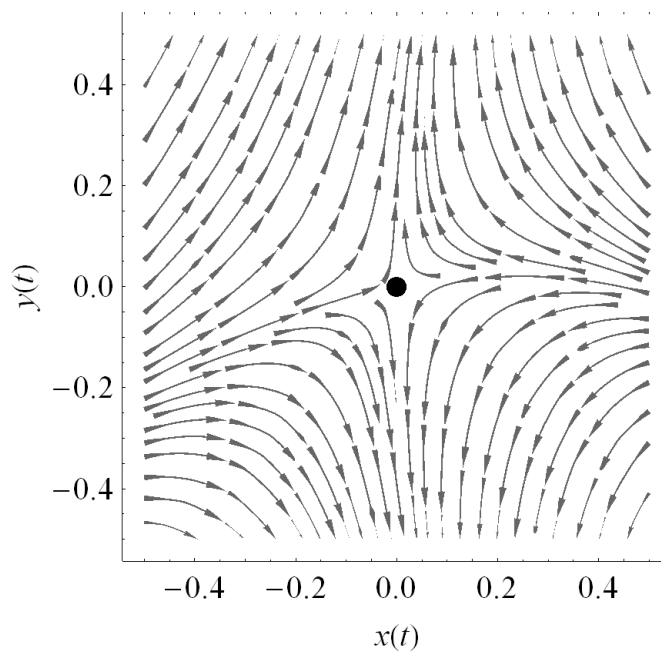
19.190. Megoldás (Feladat) A rendszer Jacobi mátrixa az origóban

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

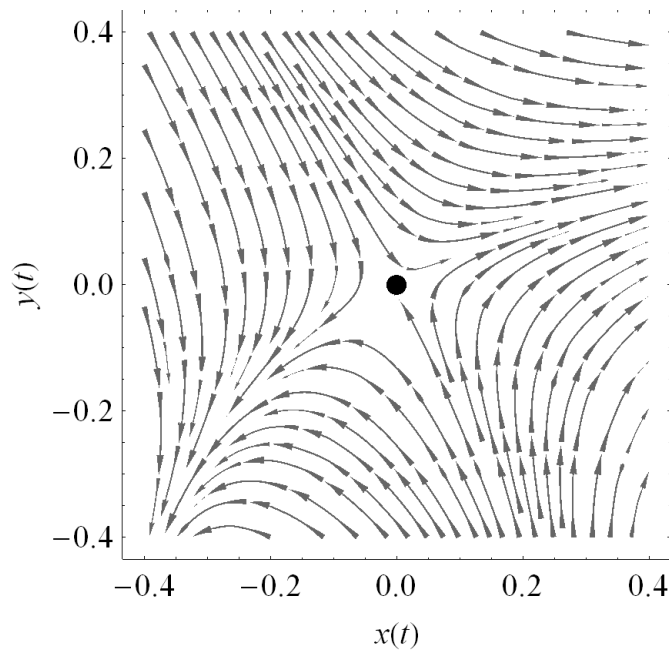
$\text{tr}(J) = -1$, $\det(J) = -6$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = 25$. Így a 8.4. Tétel szerint és a 7.1. diagrammot alkalmazva, az egyensúlyi pont nyereg (19.3. ábra).



19.1. ábra. A fázistér az origó környezetében



19.2. ábra. A fázistér az origó környezetében



19.3. ábra. A fázistér az origó környezetében

19.191. Megoldás (Feladat) A rendszer Jacobi mátrixa az origóban

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

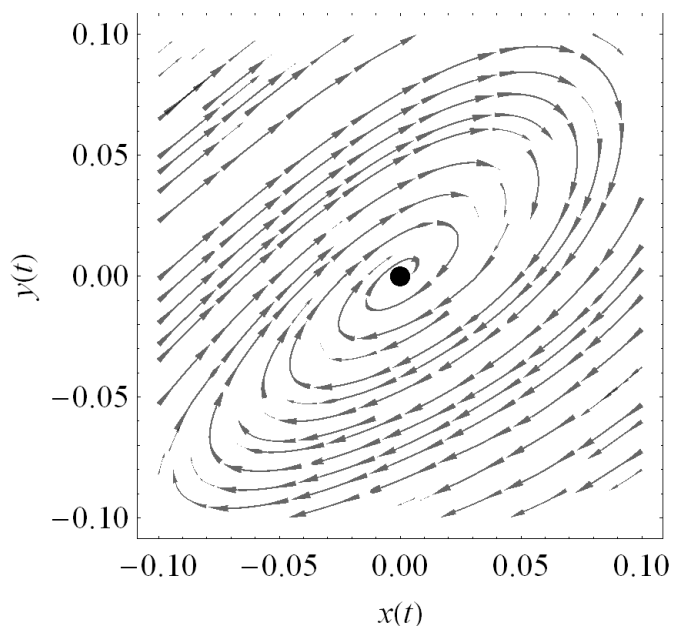
$\text{tr}(J) = -1$, $\det(J) = 6$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = -23$. Így a 8.4. Tétel szerint és a 7.1. diagrammot alkalmazva, az egyensúlyi pont stabilis fókusz (19.4. ábra).

19.192. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontok $(k\pi, 0)$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén. A rendszer Jacobi mátrixa

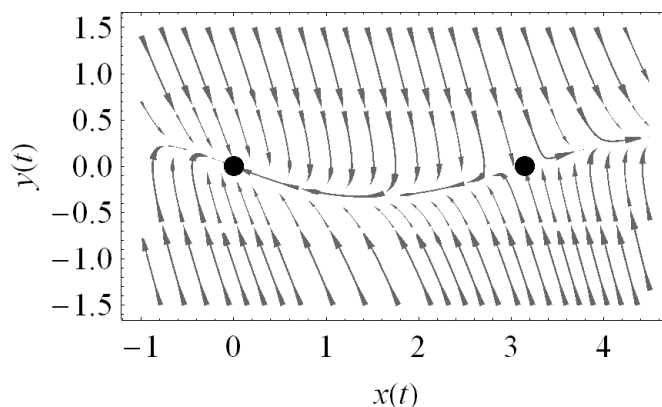
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -3 \end{pmatrix}.$$

$\text{tr}(J) = -3$, $\det(J) = \cos(x)$. Így a 8.4. Tétel szerint és a 7.1. diagrammot alkalmazva, páros k esetén az egyensúlyi pont stabilis csomó, páratlan k esetén pedig nyereg (19.5. ábra).

19.193. Megoldás (Feladat) Az első egyenlet alapján az egyensúlyi pontok második koordinátája ± 1 , majd a második egyenletből az első koordináta is



19.4. ábra. A fázistér az origó környezetében



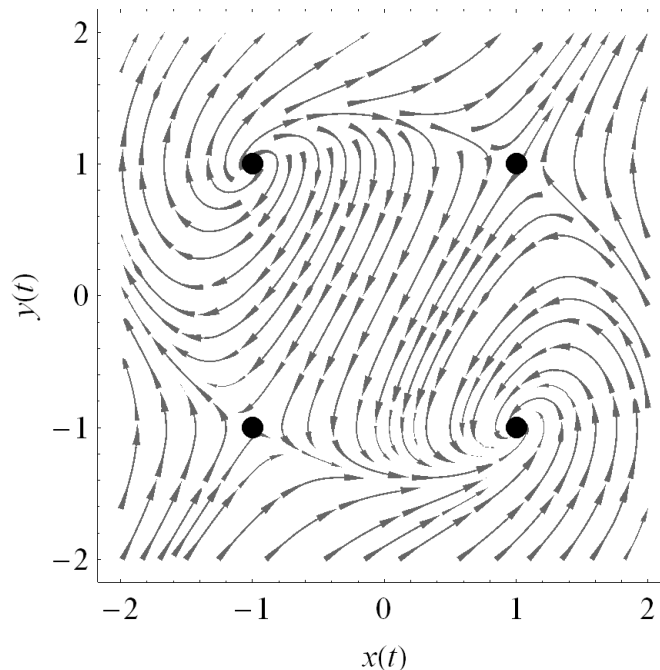
19.5. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

± 1 az elsőtől függetlenül. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$.
A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix},$$

ezért $\text{tr}(J) = 2y$, $\det(J) = -4xy$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = 4y(y + 4x)$. Az $(1, 1)$ és $(-1, -1)$ pontban $\det(J) < 0$, így ezek nyeregpontok. Az $(1, -1)$ pontban $\text{tr}(J) < 0$, $\det(J) > 0$ és $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) < 0$, ezért ez stabilis fókusz. Végül

a $(-1, 1)$ pontban $\text{tr}(J) > 0$, $\det(J) > 0$ és $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) < 0$, ezért ez instabilis fókusz (19.6. ábra).



19.6. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

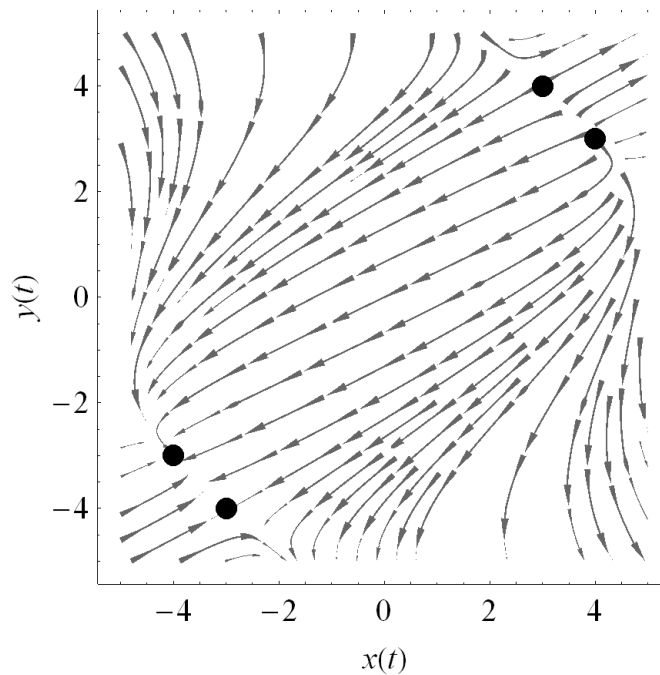
19.194. Megoldás (Feladat) Az második egyenletből $y = 12/x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $x^4 - 25x^2 + 12^2 = 0$, melyből $x = \pm 3$ vagy $x = \pm 4$. A megfelelő y értéket az $y = 12/x$ képlet adja. Így az egyensúlyi pontok: $(3, 4)$, $(-3, -4)$, $(4, 3)$, $(-4, -3)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

ezért $\text{tr}(J) = 3x$, $\det(J) = 2(x^2 - y^2)$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = x^2 + 8y^2 > 0$. A $(3, 4)$ és $(-3, -4)$ pontban $\det(J) < 0$, így ezek nyeregpontok. A $(4, 3)$ pontban $\text{tr}(J) > 0$, $\det(J) > 0$ és $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) > 0$, ezért ez instabilis csomó. Végül a $(-4, -3)$ pontban $\text{tr}(J) < 0$, $\det(J) > 0$ és $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) > 0$, ezért ez stabilis csomó (19.7. ábra).

19.195. Megoldás (Feladat) Az első egyenletből $y = 0$, majd a másodikból $x = 0$, $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3x^2 - 1 + y & x \end{pmatrix},$$



19.7. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

ezért $\text{tr}(J) = x$, $\det(J) = 3x^2 - 1 + y$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) = 4 - 11x^2 - 4y$. A $(0, 0)$ pontban $\det(J) < 0$, így ez nyeregpont. Az $(1, 0)$ pontban $\text{tr}(J) > 0$, $\det(J) > 0$ és $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) < 0$, ezért ez instabilis fókusz. Végül a $(-1, 0)$ pontban $\text{tr}(J) < 0$, $\det(J) > 0$ és $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) < 0$, ezért ez stabilis fókusz (19.8. ábra).

19.196. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó két egyenletet kivonva egymásból $2y - 4x = 0$, azaz $y = 2x$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $x - x^2 = 0$, melyből $x = 0$ vagy $x = 1$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, 0)$ és $(1, 2)$. A rendszer Jacobi mátrixa

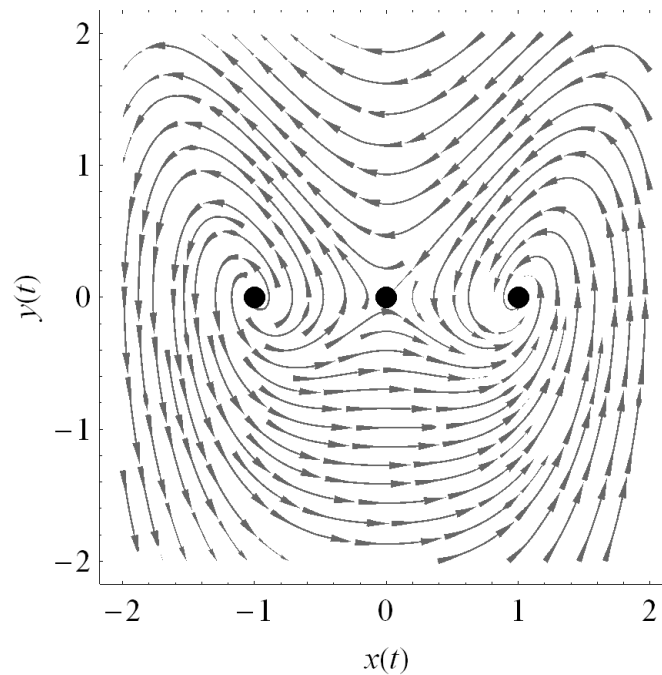
$$J = \begin{pmatrix} -2x - 1 & 1 \\ 3 - 2x & -1 \end{pmatrix},$$

mely a $(0, 0)$ pontban

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(0, 0)) = -2$, $\det(J(0, 0)) = -2$, így a $(0, 0)$ pont nyereg. Az $(1, 2)$ pontban

$$J(1, 2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



19.8. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

Ezért $\text{tr}(J(1, 2)) = -4$, $\det(J(1, 2)) = 2$, $\text{tr}^2(J(1, 2)) - 4 \det(J(1, 2)) > 0$, így az $(1, 2)$ pont stabilis csomó (19.9. ábra).

19.197. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyenletből $x = 1$ vagy $y = 1$. Így a második egyenletet felhasználva az egyensúlyi pontok: $(2, 1)$ és $(1, 2)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} y - 1 & x - 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$

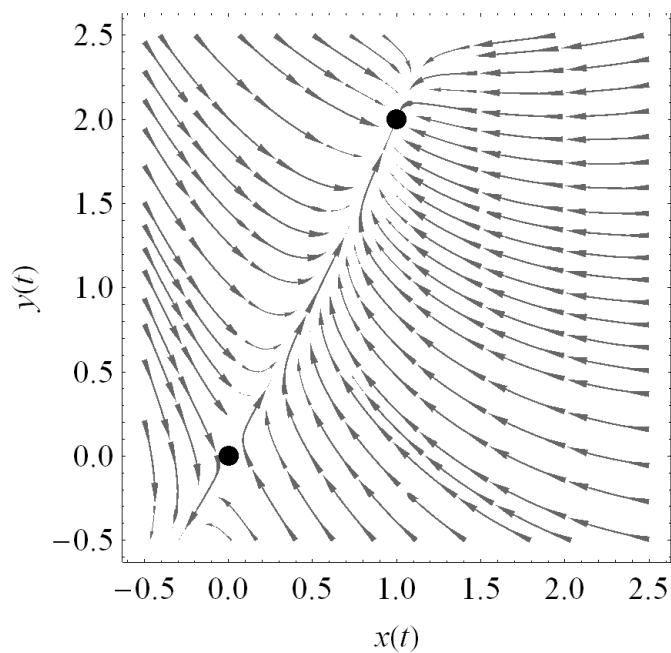
mely a $(2, 1)$ pontban

$$J(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

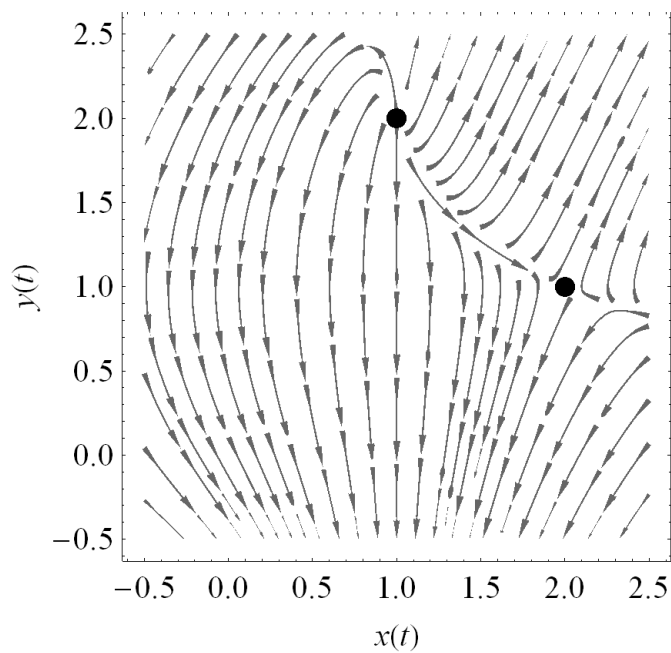
Ezért $\text{tr}(J(2, 1)) = 2$, $\det(J(2, 1)) = -2$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, a $(2, 1)$ pont nyereg. Az $(1, 2)$ pontban

$$J(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(1, 2)) = 2$, $\det(J(1, 2)) = 1$, $\text{tr}^2(J(1, 2)) - 4 \det(J(1, 2)) = 0$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, az $(1, 2)$ pont instabilis csomó (19.10. ábra).



19.9. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok



19.10. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.198. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyen-

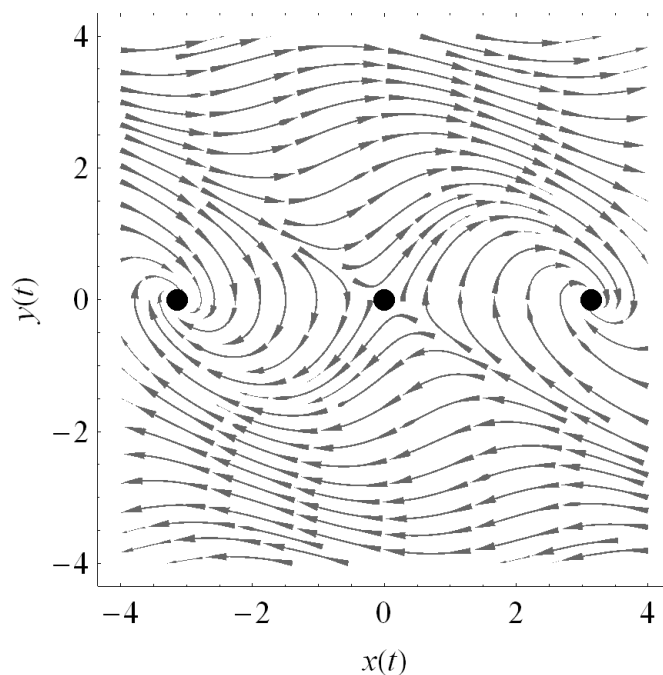
letből $y = 0$, így az egyensúlyi pontok $(k\pi, 0)$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix},$$

mely a $(k\pi, 0)$ pontokban

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Páros k esetén $\det(J) = -1 < 0$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, az egyensúlyi pont nyereg. Páratlan k esetén $\text{tr}(J) = -1$, $\det(J) = 1$, $\text{tr}^2(J) - 4\det(J) < 0$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, az egyensúlyi pont stabilis fókusz (19.11. ábra).



19.11. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.199. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyenletből $x = y^2 - 1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $y^2 - y - 2 = 0$, melyből $y = -1$ vagy $y = 2$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, -1)$ és $(3, 2)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2y/(y^2 - x) & -1/(y^2 - x) \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

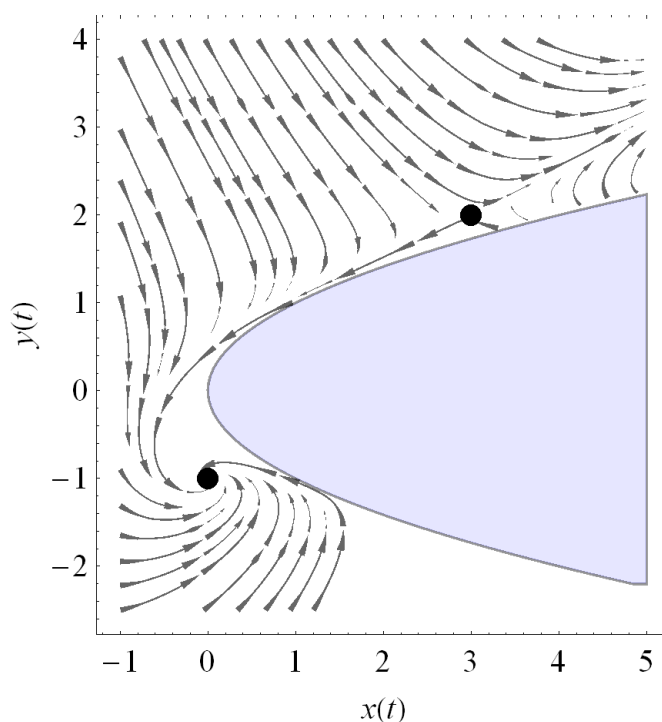
mely a $(0, -1)$ pontban

$$J(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(0, -1)) = -3$, $\det(J(0, -1)) = 3$, $\text{tr}^2(J(0, -1)) - 4\det(J(0, -1)) < 0$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, a $(0, -1)$ pont stabilis fókusz. A $(3, 2)$ pontban

$$J(3, 2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(3, 2)) = 3$, $\det(J(3, 2)) = -3$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, a $(3, 2)$ pont nyereg (19.12. ábra).



19.12. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok (a kék tartományon a jobb oldal nem értelmezett)

19.200. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyenletből $2y = \pm x$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $x^2 - 2x - 8 = 0$ vagy $x^2 - 2x + 8 = 0$. A második egyenletnek nincs valós megoldása, az első megoldásai pedig $x = 4$ és $x = -2$. Így az egyensúlyi pontok: $(4, 2)$ és $(-2, -1)$.

A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -2x & 8y \\ 2y & 2x - 4 \end{pmatrix},$$

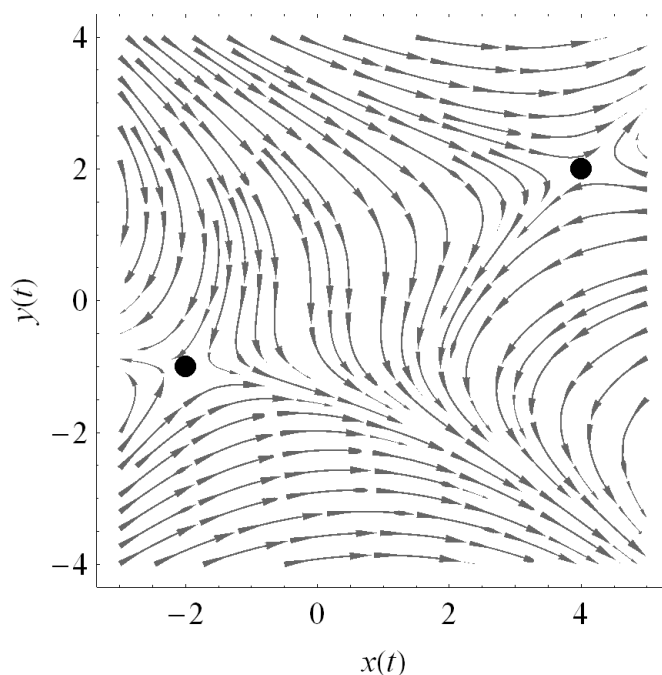
mely a $(4, 2)$ pontban

$$J(4, 2) = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(4, 2)) = -4$, $\det(J(4, 2)) = -96$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, a $(4, 2)$ pont nyereg. A $(-2, -1)$ pontban

$$J(-2, -1) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(-2, -1)) = -4$, $\det(J(-2, -1)) = -48$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, a $(-2, -1)$ pont nyereg (19.13. ábra).



19.13. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.201. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyenletből $y = 0$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $x^2 - 1 = 0$, így $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 0)$ és $(-1, 0)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix},$$

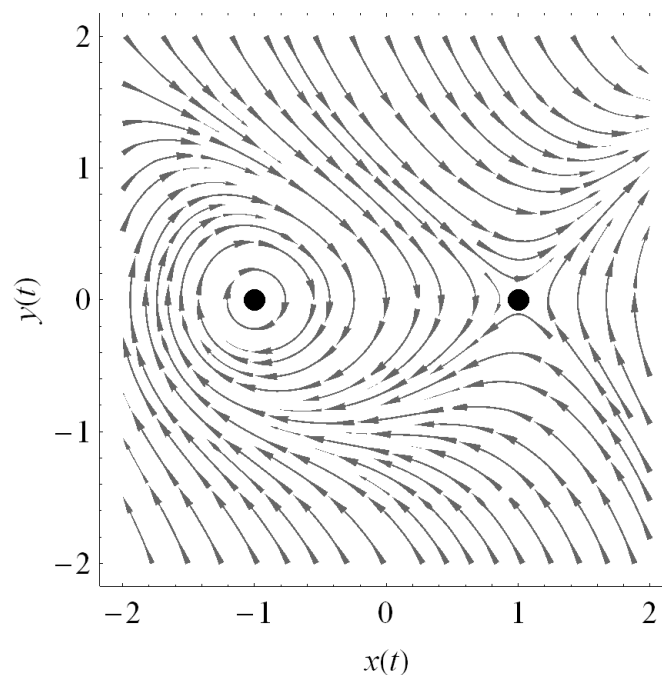
mely az $(1, 0)$ pontban

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(1, 0)) = 0$, $\det(J(1, 0)) = -4$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva, az $(1, 0)$ pont nyereg. A $(-1, 0)$ pontban

$$J(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(-1, 0)) = 0$, $\det(J(-1, 0)) = 4$, így a 7.1. diagrammot alkalmazva a $(-1, 0)$ típusa nem dönthető el. A $(-1, 0)$ pont vizsgálatához vegyük észre, hogy a második egyenletből az y^3 tagot elhagyva Hamilton-rendszert kapunk. Határozzuk meg ennek Hamilton-függvényét, amely esetleg az eredeti rendszerhez Ljapunov-függvényként használható. Egyszerű integrálás után kapjuk, hogy a keresett Hamilton-függvény $H(x, y) = y^2 + x - x^3/3$. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f H(x, y) = 2y(x^2 - y^3 - 1) + 2y(1 - x^2) = -2y^4 < 0$. Mivel a $(-1, 0)$ pont a Hamilton-függvény minimuma, azért Ljapunov stabilitási tétele szerint ez az egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis, és mivel a trajektóriák ekörül körbejárnak, azért stabilis fókusz (19.14. ábra).



19.14. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.202. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyenletből $y = x$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $2x^2 - 2 = 0$, azaz $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 1)$ és $(-1, -1)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix},$$

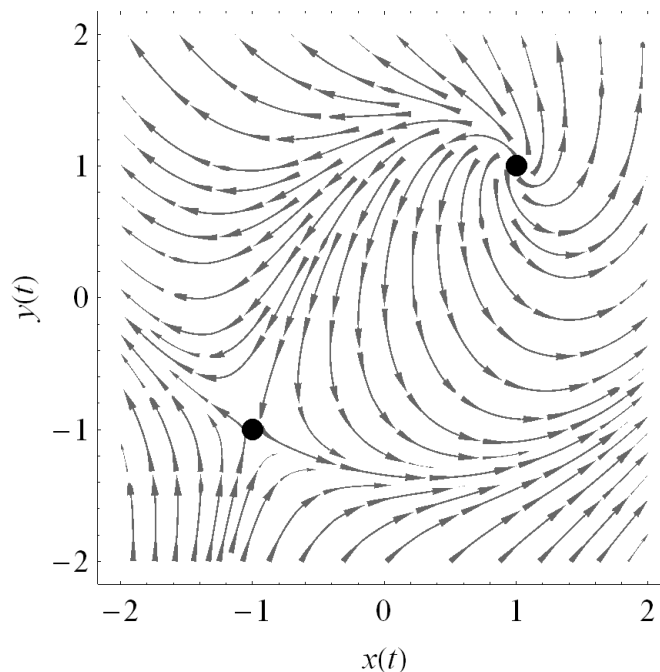
mely az $(1, 1)$ pontban

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(1, 1)) = 3$, $\det(J(1, 1)) = 4$, $\text{tr}^2(J(1, 1)) - 4 \det(J(1, 1)) < 0$, így a **7.1.** diagrammot alkalmazva, az $(1, 1)$ pont instabilis fókusz. A $(-1, -1)$ pontban

$$J(-1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(-1, -1)) = -1$, $\det(J(-1, -1)) = -4$, így a **7.1.** diagrammot alkalmazva, a $(-1, -1)$ pont nyereg (**19.15.** ábra).



19.15. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.203. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó első egyenletből $y = -x - 1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve, majd azt négyzetre

emelve $x^2 - 2x = 0$, azaz $x = 0$ vagy $x = 2$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, -1)$ és $(2, -3)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x/\sqrt{1+2x^2} & 1 \end{pmatrix},$$

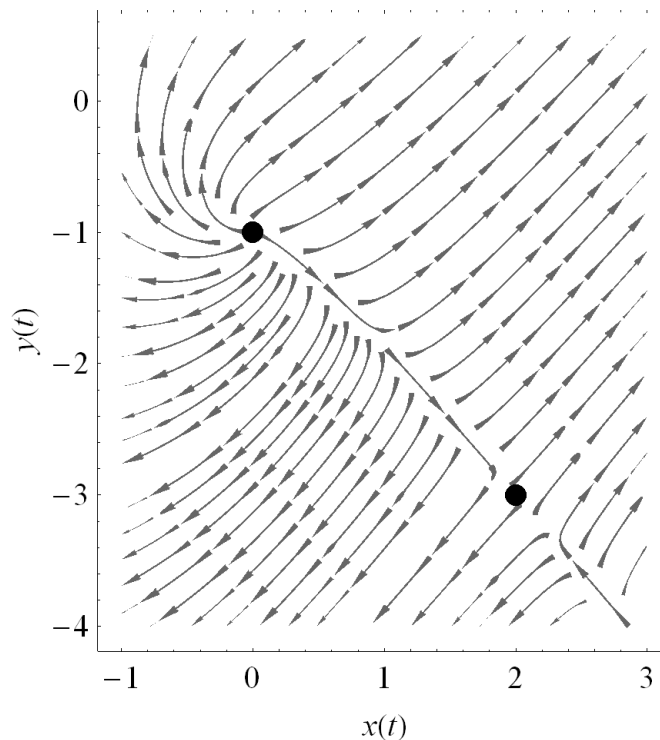
mely a $(0, -1)$ pontban

$$J(0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(0, -1)) = 2$, $\det(J(0, -1)) = 1$, $\text{tr}^2(J(0, -1)) - 4\det(J(0, -1)) = 0$, így a [7.1.](#) diagrammot alkalmazva, a $(0, -1)$ pont instabilis csomó. A $(2, -3)$ pontban

$$J(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(2, -3)) = 2$, $\det(J(2, -3)) = -1/3$, így a [7.1.](#) diagrammot alkalmazva, a $(2, -3)$ pont nyereg ([19.16.](#) ábra).



19.16. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.204. Megoldás (Feladat) Az egyensúlyi pontokra vonatkozó második egyenletből $x = 2$ vagy $y = 2x$, ezeket az első egyenletbe helyettesítve, $y = 1$, illetve $2x^2 - 2 = 0$, azaz $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(2, 1)$, $(1, 2)$ és $(-1, -2)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} y & x \\ 4x - y - 4 & 2 - x \end{pmatrix},$$

mely a $(2, 1)$ pontban

$$J(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(2, 1)) = 1$, $\det(J(2, 1)) = -6$, így a **7.1.** diagrammot alkalmazva, a $(2, 1)$ pont nyereg. Az $(1, 2)$ pontban

$$J(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(1, 2)) = 3$, $\det(J(1, 2)) = 4$, $\text{tr}^2(J(1, 2)) - 4\det(J(1, 2)) < 0$, így a **7.1.** diagrammot alkalmazva, az $(1, 2)$ pont instabilis fókusz. A $(-1, -2)$ pontban

$$J(-1, -2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\text{tr}(J(-1, -2)) = 1$, $\det(J(-1, -2)) = -12$, így a **7.1.** diagrammot alkalmazva, a $(-1, -2)$ pont nyereg (**19.17.** ábra).

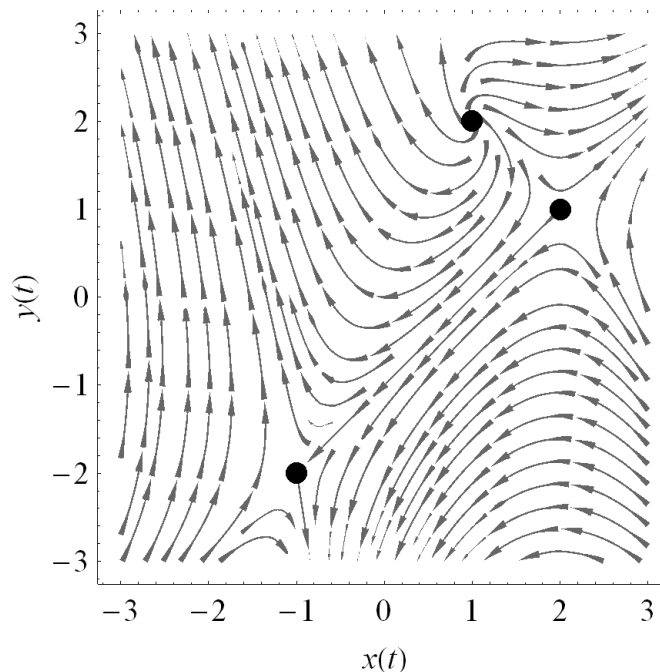
19.205. Megoldás (Feladat) Az első két egyenletből $y = 0$ és $z = 0$, majd a harmadikból $x = 1$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok: $(1, 0, 0)$ és $(-1, 0, 0)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & -z & -y \end{pmatrix},$$

amely a $(\pm 1, 0, 0)$ pontokban

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pm 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 = \pm 2$. Az $(1, 0, 0)$ pontban tehát a linearizált rendszer sajátértékei (azaz a $\lambda^3 = 2$ egyenlet gyökei) $\lambda_1 = \sqrt[3]{2}$, $\lambda_{2,3} = \sqrt[3]{2}(\cos(2\pi/3) \pm i \sin(2\pi/3))$. Így $\dim(E_s) = 2$ és $\dim(E_u) = 1$. A $(-1, 0, 0)$ pontban a linearizált rendszer sajátértékei (azaz a $\lambda^3 = -2$ egyenlet gyökei) $\lambda_1 = -\sqrt[3]{2}$, $\lambda_{2,3} = -\sqrt[3]{2}(\cos(2\pi/3) \pm i \sin(2\pi/3))$. Így $\dim(E_s) = 1$ és $\dim(E_u) = 2$.



19.17. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

19.206. Megoldás (Feladat) Az utolsó egyenletből $y = -x$, majd a másodikból $x^2 + 2x = 0$, azaz $x = 0$, vagy $x = -2$. Ebből $y = 0$, illetve $y = 2$, valamint az első egyenlet alapján $z = 0$ és $z = -2$. Így az egyensúlyi pontok: $(0, 0, 0)$ és $(-2, 2, -2)$. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2x & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda(1+2x) - 2(1+x) = 0$. A $(0, 0, 0)$ pontban a karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Vegyük észre, hogy ennek egyik gyöke $\lambda_1 = 1$, így $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$. A másodfokú tag gyökei $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Így a $(0, 0, 0)$ pontban a $\dim(E_u) = 3$. A $(-2, 2, -2)$ pontban a karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Vegyük észre, hogy ennek egyik gyöke $\lambda_1 = -1$, így $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 2)$. A másodfokú tag gyökei negatív valós részűek, így a $(-2, 2, -2)$ pontban a $\dim(E_s) = 3$.

19.207. Megoldás (Feladat) A rendszer Jacobi mátrixa az origóban

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda(\beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) + \beta\sigma(1 - \rho) = 0$. Ennek egyik gyöke β (ezt a mátrix blokk diagonális alakjából láthatjuk), így a másik két gyök a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 - \sigma \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - \rho)}).$$

Könnyen látható, hogy $\rho < 1$ esetén mindhárom gyök negatív, azaz a stabilis altér három dimenziós. Ha $\rho = 1$, akkor az egyik sajátérték nulla, a másik kettő pedig negatív, ezért a stabilis altér kétdimenziós, a centrális altér pedig egydimenziós. Ha $\rho > 1$, akkor $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, azaz az instabilis altér egydimenziós, a stabilis altér pedig kétdimenziós.

19.208. Megoldás (Feladat) Az első egyenletből $y = x$, majd az utolsóból $z = x^2/\beta$. Ezeket a második egyenletbe helyettesítve $x(\rho - 1)\beta = x^3$. Ennek $x_1 = 0$ megoldása a paraméterek bármely értékére, és $\rho > 1$ esetén $x_{2,3} = \pm\sqrt{(\rho - 1)\beta}$ is megoldások. Tehát $\rho \leq 1$ esetén az egyetlen egyensúlyi pont $(0, 0, 0)$, míg $\rho > 1$ esetén ezenkívül $(x_2, x_2, \rho - 1)$ és $(x_3, x_3, \rho - 1)$ is egyensúlyi pontok. A rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

Az origóban felírt Jacobi-mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda(\beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) + \beta\sigma(1 - \rho) = 0$. Az origó stabilitásához tudnunk kell, hogy az egyenlet minden megoldása negatív valós részű. Ennek eldöntésére alkalmazzuk most a Routh–Hurwitz feltételt (bár, mivel az egyenletnek az egyik gyöke β , így a másik két gyök is képlettel egyszerűen megadható). Az egyenlet bal oldalán álló polinom együtthatóiból készítsük el a 7.5. Tételben szereplő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} \beta + \sigma + 1 & 1 & 0 \\ \beta\sigma(1 - \rho) & \beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho) & \beta + \sigma + 1 \\ 0 & 0 & \beta\sigma(1 - \rho) \end{pmatrix}.$$

A mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha a Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 főminorok pozitívak. Mivel $\Delta_1 = \beta + \sigma + 1 > 0$, és $\Delta_3 = \Delta_2\beta\sigma(1 - \rho)$, ezért a stabilitás $\Delta_2 > 0$ és $\rho < 1$ esetén állhat fenn. A Δ_2 determináns

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (\beta + \sigma + 1)(\beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho)) - \beta\sigma(1 - \rho) \\ &= (\beta^2 + \beta(\sigma + 1) + \sigma(1 - \rho))(\sigma + 1) \end{aligned}$$

pozitív, ha $\rho < 1$. Így a Lorenz-rendszerben az origó aszimptotikus stabilis $\rho < 1$ esetén, és instabilis $\rho > 1$ esetén. Az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pontban felírt Jacobi-mátrix

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \sigma + 1) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0.$$

Az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pont stabilitásához igazolnunk kell, hogy az egyenlet minden megoldása negatív valós részű. Ennek eldöntésére alkalmazzuk a Routh–Hurwitz feltételt. Az egyenlet bal oldalán álló polinom együtthatóiból készítsük el a 7.5. tételben szereplő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} \beta + \sigma + 1 & 1 & 0 \\ 2\beta\sigma(\rho - 1) & \beta(\sigma + \rho) & \beta + \sigma + 1 \\ ;0 & 0 & 2\beta\sigma(\rho - 1) \end{pmatrix}.$$

A mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha a Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 főminorok pozitívak. Mivel $\Delta_1 = \beta + \sigma + 1 > 0$, és $\Delta_3 = 2\beta\sigma(\rho - 1)\Delta_2$, azért a stabilitás $\Delta_2 > 0$ és $\rho > 1$ esetén áll fenn. A Δ_2 determináns

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \beta(\beta + \sigma + 1)(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(1 - \rho) \\ &= \beta(\sigma(\beta + \sigma + 3) - \rho(\sigma - \beta - 1)) \end{aligned}$$

pozitív, bármely $\rho > 1$ esetén, ha $\sigma - \beta - 1 < 0$, illetve $1 < \rho < \rho_H := \sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1}$ esetén, ha $\sigma - \beta - 1 > 0$. Ekkor tehát az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pont aszimptotikusan stabilis. Megjegyezzük, hogy igazolható, hogy $\Delta_2 < 0$ esetén a Jacobi mátrixnak két pozitív valós részű komplex sajátértéke van. A rendszer szimmetriája miatt az $(x_3, x_3, \rho - 1)$ egyensúlyi pont stabilitására ugyanazt a feltételt kapjuk, mint az $(x_2, x_2, \rho - 1)$ pont esetében.

19.209. Megoldás (Feladat) Keressünk kvadratikus Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakban. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = 2ax(x^3 - y) + 2by(x + y^3) = 2ax^4 + 2by^4 + 2xy(b - a)$. Láthatjuk, hogy ez $a = b$ esetén lesz definit. Válasszuk az $a = 1 = b$ értékeket, ekkor $L_f V(x, y) = 2x^4 + 2y^4 > 0$. Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = x^2 + y^2$ függvény értéke a trajektóriák mentén szigorúan növekszik, tehát a megoldások távolsága az origótól szigorúan növekszik, azaz az origó instabilis.

19.210. Megoldás (Feladat) Keressünk kvadratikus Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakban. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = 2ax(y - x + xy) + 2by(x - y - x^2 - y^3) = -2ax^2 - 2by^2 + 2xy(a + b) + 2x^2y(a - b) - 2by^4$. Láthatjuk, hogy ez $a = b$ esetén lehet definit, hiszen ekkor az x^2y tag kiesik. Válasszuk az $a = 1 = b$ értékeket, ekkor $L_f V(x, y) = 2(2xy - x^2 - y^2 - y^4) = -2(x - y)^2 - 2y^4 < 0$. Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = x^2 + y^2$ függvény teljesíti a Ljapunov-féle stabilitási tétel feltételeit, így az origó aszimptotikusan stabilis.

19.211. Megoldás (Feladat) Első kísérletként meg lehet próbálkozni kvadratikus Ljapunov-függvény keresésével, azonban ilyen alakút nem találunk. (Ez onnan sejthető, hogy az egyenletben kevés lineáris tag van.) Keressünk tehát magasabb fokú $V(x, y) = ax^k + by^l$ alakú Ljapunov-függvényt. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = kax^{k-1}(2y^3 - x^5) + lby^{l-1}(-x - y^3 + y^5)$. Próbáljuk k és l értékét először úgy választani, hogy V -re teljesüljenek a Ljapunov-féle stabilitási tétel feltételei. Ekkor k és l páros kell legyen, $L_f V$ pedig negatív. Az $L_f V$ első tagjában levő $x^{k-1}y^3$ tag kieshet az $y^{l-1}x$ taggal, ha $k = 2$ és $l = 4$. Ezzel a választással $L_f V(x, y) = xy^3(4a - 4b) - 2ax^6 + 4by^8 - 4by^6$. Az xy^3 tag eltüntetéséhez $a = b$ elegendő. Legyen $a = b = 1$, ekkor $L_f V(x, y) = -2x^6 - 4y^6(1 - y^2)$, amely negatív, ha $-1 < y < 1$. Tehát a $V(x, y) = x^2 + y^4$ függvény teljesíti a Ljapunov-féle stabilitási tétel feltételeit (például az origó körüli egység sugarú körben), így az origó aszimptotikusan stabilis.

19.212. Megoldás (Feladat) Legyen $a > 0$ tetszőleges és $D_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < 1/a\}$. Továbbá legyen U az origó $r := \min\{a, 1/a\}$ sugarú nyílt környezete. Ekkor a $k = al$, $l > 0$ választással a 8.11. Tétel minden feltétele teljesül, hiszen

1. $0 \in \partial D_a$,
2. minden $(p, q) \in \partial D_a \cap U \subset ((\mathbb{R}_0^+, 0) \cup (0, \mathbb{R}_0^+))$ esetén $V(p, q) = 0$,
3. minden $(p, q) \in D_a \cap U \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ esetén $V(p, q) > 0$ és

$$\begin{aligned} L_f V(p, q) &= kp^{k-1}q^l(pq - p^3 + q^3) + lp^kq^{l-1}(p^2 - q^3) \\ &= p^{k-1}q^{l-1}(p^3(l - kq) + pq^2(k - lp) + kq^4) \\ &= p^{al-1}q^{l-1}l(p^3(1 - aq) + pq^2(a - p) + aq^4) > 0. \end{aligned}$$

Tehát a 8.11. Tétel következményeként az origó instabilis.

19.213. Megoldás (Feladat) Keressünk kvadratikus Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakban. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = 2ax(y - 3x - x^3) + 2by(6x - 2y) = -6ax^2 - 4by^2 + 2xy(a + 6b) - 2ax^4$. A kvadratikus részt szeretnénk negatív definitnek választani. Írjuk fel ehhez a kvadratikus alak mátrixának determinánsát: $24ab - (a + 6b)^2 = -(a - 6b)^2$. Ez tehát $a = 6b$ esetén lehet szemidefinit, különben indefinit. Válasszuk tehát az $a = 6$, $b = 1$ értékeket, ekkor $L_f V(x, y) = -36x^2 - 4y^2 + 24xy - 12x^4 = -(6x - 2y)^2 - 12x^4 < 0$. Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = 6x^2 + y^2$ függvény teljesíti a Ljapunov-féle stabilitási tétel feltételeit, így az origó aszimptotikusan stabilis.

19.214. Megoldás (Feladat) Keressünk kvadratikus Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakban. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = 2ax(2y - x - y^3) + 2by(x - 2y) = -2ax^2 - 4by^2 + 2xy(2a + b) - 2axy^3$. Mivel az utolsó tag előjelet vált, azért módosítsuk úgy a Ljapunov-függvényt, hogy ez a tag kiejthető legyen. Keressük a Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2 + y^4$ alakban, hiszen ekkor a rendszer szerinti deriváltban megjelenik egy xy^3 típusú tag. Ezen V függvény rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = -2ax^2 - 4by^2 + 2xy(2a + b) - 2axy^3 + 4y^3(x - 2y) = -2ax^2 - 4by^2 + 2xy(2a + b) + (4 - 2a)xy^3 - 8y^4$. Az $a = 2$ választással az utolsó előtti tag kiejthető, és utána már csak a kvadratikus részt kell negatív definitnek választani. Írjuk fel ehhez a kvadratikus alak mátrixának determinánsát: $8ab - (2a + b)^2 = -(2a - b)^2$. Ez tehát $b = 2a$ esetén lehet szemidefinit, különben indefinit. Mivel $a = 2$, azért $b = 4$ kell, hogy legyen. Ekkor $L_f V(x, y) = -4x^2 - 16y^2 + 16xy - 8y^4 = -(2x - 4y)^2 - 8y^4 < 0$. Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + y^4$ függvény teljesíti a Ljapunov-féle stabilitási tétel feltételeit, így az origó aszimptotikusan stabilis.

19.215. Megoldás (Feladat) Keressünk kvadratikus Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakban. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = 2ax(x - y - x^3) + 2by(x + y + y^3) = 2ax^2 + 2by^2 + 2xy(b - a) - 2ax^4 + 2by^4$. Láthatjuk, hogy ez $a = b$ esetén definit, hiszen ekkor az xy tag kiesik. Válasszuk az $a = 1 = b$ értékeket, ekkor $L_f V(x, y) = 2(x^2 + y^2 - x^4 + y^4)$, amely $-1 < x < 1$ esetén negatív. Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = x^2 + y^2$ függvény értéke az egységkörben a trajektóriák mentén szigorúan növekszik, tehát a megoldások távolsága az origótól szigorúan növekszik, azaz az origó instabilis.

19.216. Megoldás (Feladat) Keressünk kvadratikus Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakban. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = 2ax(xy^2 - x^3) + 2by(-y^3 - 2x^2y) = -2ax^4 - 2by^4 + 2x^2y^2(a - 2b)$. Láthatjuk, hogy ez $a = 2b$ esetén definit, hiszen ekkor az x^2y^2 tag kiesik. Válasszuk az $a = 2$,

$b = 1$ értékeket, ekkor $L_f V(x, y) = -4x^4 - 2y^4 < 0$. Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = 2x^2 + y^2$ függvény teljesíti a Ljapunov-féle stabilitási tétel feltételeit, így az origó aszimptotikusan stabilis.

19.217. Megoldás (Feladat) Első kísérletként meg lehet próbálkozni kvadrátikus Ljapunov-függvény keresésével, azonban ilyen alakút nem találunk. (Ez onnan sejtethető, hogy az egyenletben nincs lineáris tag.) Keressünk tehát magasabb fokú $V(x, y) = ax^k + by^l$ alakú Ljapunov-függvényt. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = -kax^{k-1}xy^4 + lby^{l-1}x^6y = -kax^k y^4 + lby^l x^6$. Láthatjuk, hogy $k = 6$ és $l = 4$ esetén ez a kifejezés azonosan nullát adhat, így V első integrál lesz, ha $4b - 6a = 0$. Legyen $a = 2$, $b = 3$, ekkor $L_f V(x, y) = 0$. Tehát a $V(x, y) = 2x^6 + 3y^4$ függvény konstans a megoldások mentén, azaz a trajektóriák ezen függvény szintvonalain fekszenek. Ennek a függvénynek globális minimuma van az origóban, szintvonalai origó körüli zárt görbék, így minden pálya periodikus, az origó pedig stabilis egyensúlyi pont.

19.218. Megoldás (Feladat) Keressünk $V(x, y) = ax^k + by^l$ alakú Ljapunov-függvényt. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = kax^{k-1}(xy + x^3) + lby^{l-1}(-y + y^2 - x^3 + x^4)$. Vegyük észre, hogy $k = 4$ és $l = 2$ esetén az $x^4 y$ alakú tagok kiesnek. Ehhez válasszuk az $a = -1$ és $b = 2$ értékeket. Ekkor $L_f V(x, y) = -4x^6 - 4y^2 + 4y^3 - 4yx^3 = -(2x^3 - y)^2 - 3y^2 + 4y^3 = -(2x^3 - y)^2 - 3y^2(1 - \frac{4}{3}y)$, amely negatív az origó egy környezetében (például a $3/4$ sugarú körben). Ez azt jelenti, hogy a $V(x, y) = 2y^2 - x^4$ függvény teljesíti a Ljapunov-féle instabilitási tétel feltételeit, így az origó instabilis.

19.219. Megoldás (Feladat) Keressünk $V(x, y) = ax^k + by^l$ alakú Ljapunov-függvényt. Ennek rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = kax^{k-1}(2y^5 - x^3) - 2lby^{l-1}xy^2 = 2kax^{k-1}y^5 - kax^{k+2} - 2lby^{l+1}x$. Vegyük észre, hogy $k = 2$ és $l = 4$ esetén az első és utolsó tag kiejtheti egymást. Ehhez válasszuk az $a = 2$ és $b = 1$ értékeket. Ekkor $L_f V(x, y) = -4x^4$, amely az $x = 0$ tengelyen kívül mindenütt negatív. Mivel ez az egyenes az origón kívül nem tartalmaz teljes pályát, azért a Barbasin-Kraszovszkij-tételt alkalmazva a $V(x, y) = 2x^2 + y^4$ függvényre azt kapjuk, hogy az origó aszimptotikusan stabilis.

19.220. Megoldás (Feladat) A másodrendű egyenlet az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -f(x)y - g(x)$ elsőrendű rendszerrel egyenértékű. Ennek az origó az egyetlen egyensúlyi pontja a g -re vonatkozó fenti feltétel miatt. Az origóban a rendszer Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -f(0) \end{pmatrix}.$$

Ha $g'(0)$, vagy $f(0)$ nulla, akkor linearizálással nem állapítható meg az origó típusa, hiszen akkor a mátrixnak nulla valós részű sajátértéke van. Az origó stabilitásának eldöntésére alkalmazzuk a $V(x, y) = y^2/2 + G(x)$ függvényt, ahol G a g primitív függvénye, azaz $G' = g$. A V függvénynek az origó szigorú minimuma, ugyanis mind az $y \mapsto y^2/2$ mind a G függvénynek a nulla szigorú minimuma, az utóbbi az $xg(x) > 0$ feltételből következik, hiszen $x > 0$ esetén $G'(x) > 0$, és $x < 0$ esetén $G'(x) < 0$. Másrészt a V függvény rendszer szerinti deriváltja $L_f V(x, y) = -f(x)y^2 < 0$, ha $(x, y) \neq (0, 0)$. Így Ljapunov stabilitási tétele miatt az origó aszimptotikusan stabilis.

19.221. Megoldás (Feladat) Keressünk pozitív definit kvadratikus Ljapunov-függvényt a Lorenz-rendszerhez

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + c(z - z_0)^2$$

alakban. Ezen függvény rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} L_f V(x, y, z) &= 2ax\sigma(y - x) + 2by(\rho x - y - xz) + 2c(z - z_0)(xy - \beta z) \\ &= -2a\sigma x^2 - 2by^2 - 2c\beta z^2 + 2xy(\sigma a + \rho b) + 2xyz(c - b) - 2cz_0xy + 2c\beta z_0z. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $c = b$ esetén kiesik az xyz tag, és $\sigma a + \rho b = cz_0$ esetén kiesik az xy tag. Legyen $b = c = \sigma$ (ekkor σ minden tagból kiemelhető), és legyen $a = \rho$, $z_0 = 2\rho$. Ekkor $L_f V(x, y, z) = -2\rho\sigma x^2 - 2\sigma y^2 - 2\sigma\beta z^2 + 4\sigma\beta\rho z$. A V függvény $S_a = \{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 : V(p, q, r) = a\}$ szintfelületei $(0, 0, 2\rho)$ középpontú ellipszoidok. Megmutatjuk, hogy van olyan $a_0 > 0$ és $\gamma > 0$ szám, melyekre $a > a_0$ esetén az S_a szintfelület minden pontjában $L_f V(p, q, r) < -\gamma$. Ez azt jelenti, hogy egy pálya mentén V értéke szigorúan csökken legalább addig, amíg a pálya be nem lép az S_{a_0} ellipszoidba. Tehát az S_{a_0} ellipszoidon kívülről induló megoldások befutnak ebbe az ellipszoidba, onnan pedig nem jönnek ki a trajektóriák. Jelölje az $L_f V$ függvény $-\gamma$ értékhez tartozó szintfelületét E_γ . Ezek a szintfelületek $(0, 0, \rho)$ középpontú ellipszoidok. Az E_γ ellipszoidon kívül $L_f V < -\gamma$. Legyen $a_0 > 0$ olyan, melyre az S_{a_0} ellipszoid tartalmazza E_γ -t. (Ilyen a_0 létezik, mivel a_0 értékét növelve az S_{a_0} ellipszoid növekszik.) Ekkor $a > a_0$ esetén $S_a \supset S_{a_0} \supset E_\gamma$, tehát $V(p, q, r) = a$ esetén $L_f V(p, q, r) < -\gamma$.

19.222. Megoldás (Feladat) Keressünk pozitív definit kvadratikus Ljapunov-függvényt a Lorenz-rendszerhez

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

alakban. Ennek bármely pozitív a, b, c esetén szigorú minimuma van az origóban, tehát csak azt kell megmutatni, hogy rendszer szerinti deriváltja mindenütt negatív, ekkor ugyanis bármely pontból induló megoldás mentén V

értéke szigorúan csökken, és Ljapunov stabilitási tétele miatt nullához tart. A V függvény rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} L_f V(x, y, z) &= 2ax\sigma(y - x) + 2by(\rho x - y - xz) + 2cz(xy - \beta z) \\ &= -2a\sigma x^2 - 2by^2 - 2c\beta z^2 + 2xy(\sigma a + \rho b) + 2xyz(c - b). \end{aligned}$$

A negatív előjelhez a vegyes szorzatokat kell megfelelően kezelni. Célszerű a $c = b$ választás, hiszen ekkor az xyz tag eltűnik, másrészt az $a = 1$, $b = \sigma$ választás, hiszen ekkor a többi tagból σ kiemelhető. Nézzük meg, hogy ekkor valóban negatív előjelű kifejezést kapunk $\rho < 1$ esetén. Azt kell igazolni, hogy $-x^2 - y^2 + xy(1 + \rho) < 0$. Ez viszont egyszerűen következik a $-x^2 - y^2 + xy(1 + \rho) = -(x - y(1 + \rho)/2)^2 - y^2(1 - (\frac{1+\rho}{2})^2)$ egyenlőségéből, hiszen $\rho < 1$ esetén a második tag is negatív. Tehát az állítást bizonyító kvadratikus Ljapunov-függvény $V(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$.

19.2. Globális vizsgálat a síkon

19.223. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A két egyenletet összeadva $8x = 0$, majd az elsőből $y = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$ és $(0, -1)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 6 & -2y \end{pmatrix}.$$

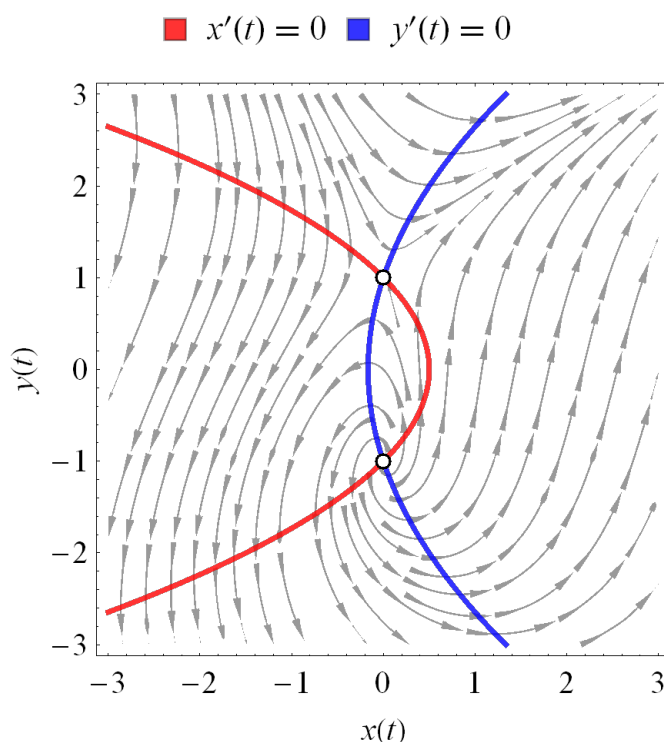
A $(0, 1)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(0, 1)) = 0$, $\det(J(0, 1)) = -16$, így $(0, 1)$ nyereg. A $(0, -1)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(0, -1)) = 4$, $\det(J(0, -1)) = 16$, $\text{tr}^2(J(0, -1)) - 4 \det(J(0, -1)) < 0$, így $(0, -1)$ instabilis fókusz. Az N_1 nullavonal egyenlete $x = (1 - y^2)/2$, azaz ez a nullavonal egy fekvő, balfelé nyitott parabola, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A jobboldali tartományban jobbra, a baloldaliban balra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal egyenlete $x = (y^2 - 1)/6$, ez tehát egy fekvő, jobbfelé nyitott parabola, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A baloldali részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldaliban pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két



19.18. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

nullavonal együtt öt részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontról kiinduló pályák ∞ -hez tartanak. A nyeregpontba befutó egyik szeparatrix az instabil fókuszról, a másik végtelenből jön (19.18. ábra).

19.224. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A második egyenletből $y = 2$, majd az elsőből $x = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(1, 2)$ és $(-1, 2)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -8x & 2y \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

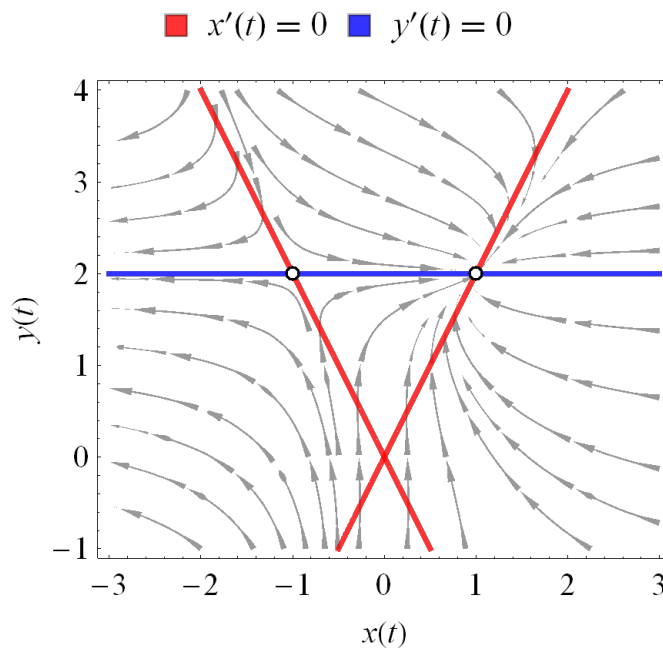
Az $(1, 2)$ egyensúlyi pontban

$$J(1, 2) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, 2)) = -12$, $\det(J(1, 2)) = 32$, $\text{tr}^2(J(1, 2)) - 4 \det(J(1, 2)) > 0$, így $(1, 2)$ stabilis csomó. A $(-1, 2)$ egyensúlyi pontban

$$J(-1, 2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, 2)) = 4$, $\det(J(1, 2)) = -32$, így $(-1, 2)$ nyereg. Az N_1 nullavonal egyenlete $(y - 2x)(y + 2x) = 0$, azaz ez a nullavonal két egyenesből, az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$ és az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -2x\}$ egyenesből áll. Ezek 'X' alakban négy tartományra osztják a fázissíkot. A felső és alsó tartományban jobbra, a másik kettőben balra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal egyenlete $y = 2$, ez tehát egy invariáns egyenes, hiszen $y = 2$ esetén $\dot{y} = 0$. Az egyenes feletti részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, alatta pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt hét részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 2\}$ egyenesen vannak (az egyik a csomópontba fut be, a másik $-\infty$ -hez tart). A nyeregpontba befutó szeparatrix két részre osztja a fázissíkot, a jobboldali részből induló pályák a stabilis csomópontba futnak be, a baloldali részből pedig az $y = 2$ egyenes mentén $-\infty$ -hez tartanak (19.19. ábra).



19.19. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

19.225. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A második egyenletből $x = 0$ vagy $y = 0$, majd ezeknek megfelelően az elsőből $y = 2$, illetve $x = 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 2)$ és $(1, 0)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

A $(0, 2)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, 2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(0, 2)) = -4$, $\det(J(0, 2)) = 4$, $\text{tr}^2(J(0, 2)) - 4 \det(J(0, 2)) = 0$, így $(0, 2)$ stabilis csomó. Az $(1, 0)$ egyensúlyi pontban

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, 0)) = -4$, $\det(J(1, 0)) = -4$, így $(1, 0)$ nyereg. Az N_1 nullavonal egyenlete $y = 2 - 2x$, azaz ez a nullavonal egyenes, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A jobboldali tartományban balra, a baloldaliban jobbra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal a két koordináta tengelyből áll, melyek négy tartományra osztják a fázissíkot. A baloldali felső és jobboldali alsó részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali felső és baloldali alsó részen pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt hét részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák közül az egyik a stabil csomóba fut be, a másik $-\infty$ -hez tart. A nyeregpontba befutó szeparatrixok az x tengelyen fekszenek (mivel $y = 0$ esetén $\dot{y} = 0$) (19.20. ábra).

19.226. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A második egyenletből $x = 0$, majd az elsőből $y = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$ és $(0, -1)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

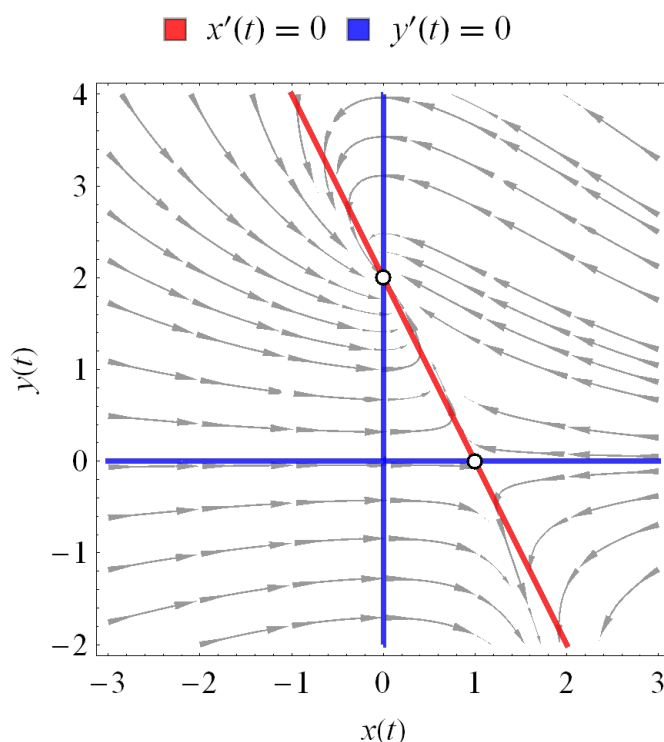
A $(0, 1)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(0, 1)) = 0$, $\det(J(0, 1)) = 4$, $\text{tr}^2(J(0, 1)) - 4 \det(J(0, 1)) < 0$, így $(0, 1)$ típusa a linearizálásból nem dönthető el (a sajátértékek tiszta képzetesek). Az $(0, -1)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

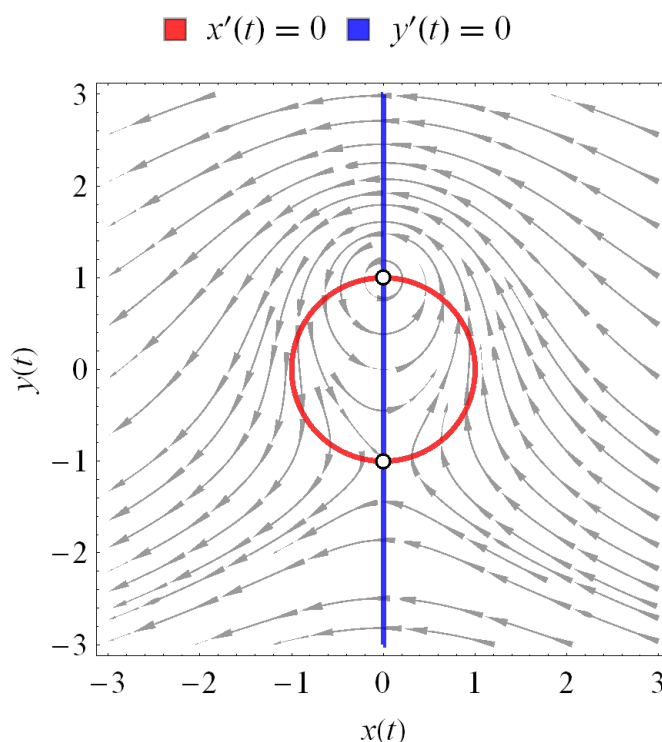
melyre $\text{tr}(J(0, -1)) = 0$, $\det(J(0, -1)) = -4$, így $(0, -1)$ nyereg. Az N_1 nullavonal egyenlete $x^2 + y^2 = 1$, azaz ez a nullavonal origó közepű kör, mely



19.20. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

két tartományra osztja a fázissíkot. A külső tartományban balra, a belsőben jobbra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal a függőleges koordináta tengely, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A baloldali részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali részen pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt négy részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák közül az egyik megkerüli a $(0, 1)$ egyensúlyi pontot, a másik $-\infty$ -hez tart. A nyeregpontba befutó szeparatrixok közül az egyik az $(0, 1)$ pontot megkerülve érkezik a nyeregpontba, a másik $-\infty$ felől jön. A pályák viselkedésének pontos megállapításához vegyük észre, hogy a fáziskép a függőleges tengelyre szimmetrikus, azaz a tengelyről időben előre és hátra indított megoldások szimmetrikusan haladnak. Ezt az bizonyítja, hogy $P(-x, y) = P(x, y)$ és $-Q(-x, y) = Q(x, y)$ is fennáll. Eszerint a $(0, 1)$ egyensúlyi pontot zárt pályák veszik körül, tehát ez centrum, és a nyeregből felfelé kimenő és bejövő pálya egybeesik, egy homoklinikus pályát formálva. A homoklinikus pályát megkerülő pályák is a függőleges tengelyre szimmetrikusak (19.21. ábra).

19.227. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi ponto-



19.21. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

kat. A második egyenletből $x = 4$ vagy $y = x$, majd ezeknek megfelelően az elsőből $y = 1$, illetve $x = \pm 2$. Így az egyensúlyi pontok $(4, 1)$, $(2, 2)$ és $(-2, -2)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} y & x \\ y - 2x + 4 & x - 4 \end{pmatrix}.$$

A $(4, 1)$ egyensúlyi pontban

$$J(4, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

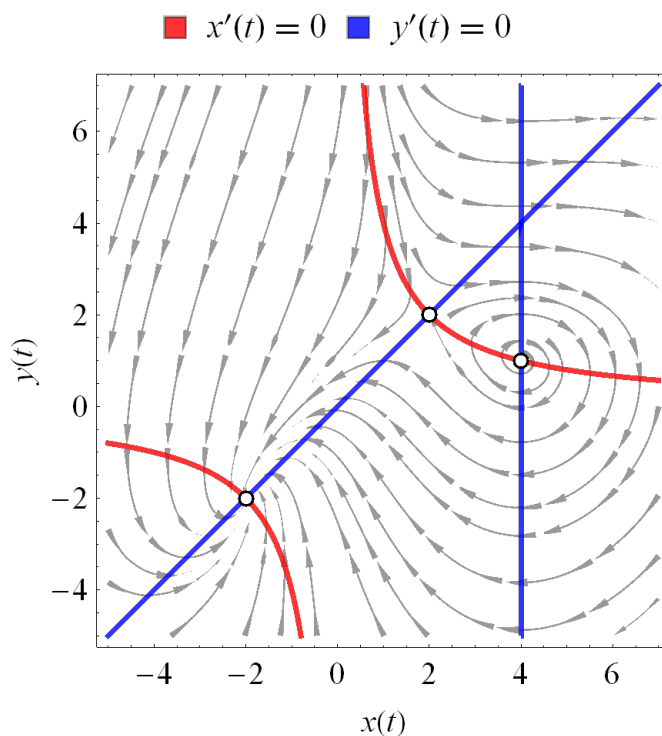
melyre $\text{tr}(J(4, 1)) = 1$, $\det(J(4, 1)) = 9$, $\text{tr}^2(J(4, 1)) - 4 \det(J(4, 1)) < 0$, így $(4, 1)$ instabilis fókusz. A $(2, 2)$ egyensúlyi pontban

$$J(2, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(2, 2)) = 0$, $\det(J(2, 2)) = -8$, így $(2, 2)$ nyereg. A $(-2, -2)$ egyensúlyi pontban

$$J(-2, -2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(-2, -2)) = -8$, $\det(J(-2, -2)) = 24$, $\text{tr}^2(J(-2, -2)) - 4 \det(J(-2, -2)) < 0$, így $(-2, -2)$ stabilis fókusz. Az N_1 nullavonal egyenlete $y = 4/x$, azaz ez a nullavonal hiperbola, mely három tartományra osztja a fázissíkot. A középső (két hiperbolaág közötti) tartományban balra, a két szélső tartományban pedig jobbra mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal az $x = 4$ és $x = y$ egyenesekből áll, melyek négy tartományra osztják a fázissíkot. A baloldali felső és jobboldali alsó részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali felső és baloldali alsó részen pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt 9 részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák a stabil fókuszba futnak be. A nyeregpontba befutó szeparatrixok közül az egyik az instabil fókuszba jön, a másik pedig végtelenből. Ezen pályákon kívül minden más pálya a stabil fókuszba fut be (19.22. ábra).



19.22. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

19.228. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A első egyenletből $x = 1$ vagy $y = 2$, majd ezeknek megfelelően a másodiktól $y = \pm 1$, illetve $x = \pm 2$. Így az egyensúlyi pontok $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$

és $(-2, 2)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2y - 4 & 2x - 2 \\ -2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Az $(1, 1)$ egyensúlyi pontban

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, 1)) = 0$, $\det(J(1, 1)) = -4$, így $(1, 1)$ nyereg. Az $(1, -1)$ egyensúlyi pontban

$$J(1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, -1)) = -8$, $\det(J(1, -1)) = 12$, $\text{tr}^2(J(1, -1)) - 4 \det(J(1, -1)) > 0$, így $(1, -1)$ stabilis csomó. A $(2, 2)$ egyensúlyi pontban

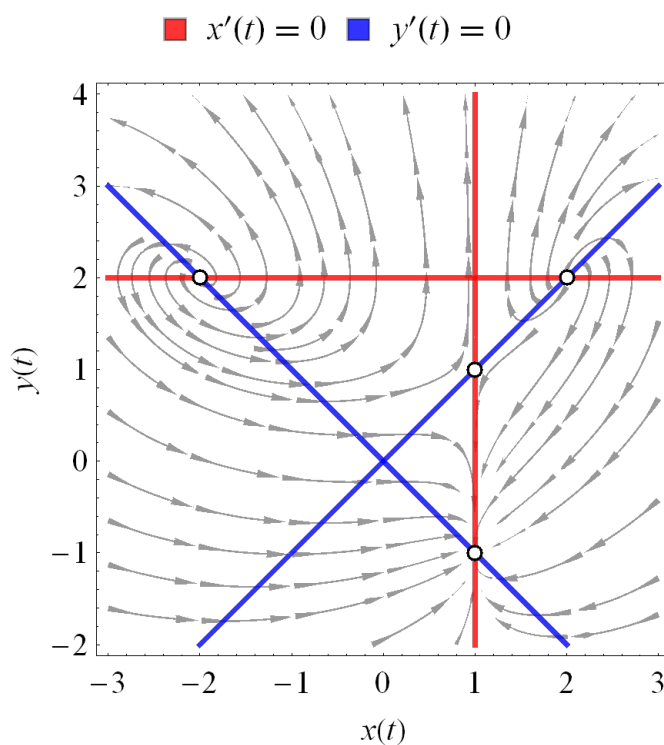
$$J(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(2, 2)) = 4$, $\det(J(2, 2)) = 8$, $\text{tr}^2(J(2, 2)) - 4 \det(J(2, 2)) < 0$, így $(2, 2)$ instabilis fókusz. A $(-2, 2)$ egyensúlyi pontban

$$J(-2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(-2, 2)) = 4$, $\det(J(-2, 2)) = 24$, $\text{tr}^2(J(-2, 2)) - 4 \det(J(-2, 2)) < 0$, így $(-2, 2)$ instabilis fókusz. Az N_1 nullavonal az $x = 1$ és $y = 2$ egyenesekből áll, melyek négy tartományra osztják a fázissíkot. A baloldali felső és jobboldali alsó részen $\dot{x} < 0$, tehát balfelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali felső és baloldali alsó részen pedig $\dot{x} > 0$, tehát jobbfelé mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal az $x = y$ és $x = -y$ egyenesekből áll, melyek négy tartományra osztják a fázissíkot. A felső és alsó részen $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák, a jobboldali és baloldali részen pedig $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt 11 részre osztja a fázissíkot. A nyeregpontból kiinduló pályák az $x = 1$ egyenesen haladnak, mivel ez invariáns egyenes. Az egyik pálya a stabilis csomóba fut be, a másik végtelenhez tart. A nyeregpontba befutó szeparatrixok az instabil fókuszok felől jönnek. Ezen pályákon kívül minden más pálya a stabil csomóba fut be (19.23. ábra).

19.229. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A első egyenletből $x + y = \pm 1$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve



19.23. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

$y = 0$, $y = \pm 1$, illetve $y = 2$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-3, 2)$ és $(1, 0)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) \\ -1 & -2y \end{pmatrix}.$$

A $(0, 1)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(0, 1)) = 0$, $\det(J(0, 1)) = -2$, így $(0, 1)$ nyereg. A $(0, -1)$ egyensúlyi pontban

$$J(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

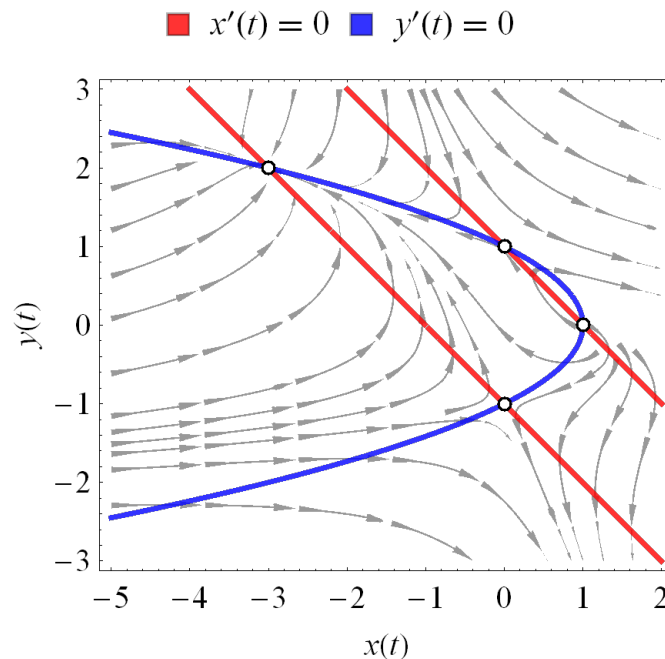
melyre $\text{tr}(J(0, -1)) = 0$, $\det(J(0, -1)) = -6$, így $(0, -1)$ nyereg. A $(-3, 2)$ egyensúlyi pontban

$$J(-3, 2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(-3, 2)) = -6$, $\det(J(-3, 2)) = 6$, $\text{tr}^2(J(-3, 2)) - 4\det(J(-3, 2)) > 0$, így $(-3, 2)$ stabilis csomó. Az $(1, 0)$ egyensúlyi pontban

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, 0)) = 2$, $\det(J(1, 0)) = 2$, $\text{tr}^2(J(1, 0)) - 4\det(J(1, 0)) < 0$, így $(1, 0)$ instabilis fókusz. Az N_1 nullavonal az $x + y = 1$ és $x + y = -1$ párhuzamos egyenesekből áll, melyek három tartományra osztják a fázissíkot. A két egyenes közötti részen $\dot{x} < 0$, tehát balfelé mozognak a trajektóriák, a másik két részen pedig $\dot{x} > 0$, tehát jobbfelé mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal az $x = 1 - y^2$ fekvő parabola, mely két tartományra osztja a fázissíkot. A jobboldali részen $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák, a baloldali részen pedig $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt 8 részre osztja a fázissíkot. A két nyeregpontból kiinduló pályák közül az egyik a stabilis csomóba fut be, a másik végtelenhez tart. A nyeregpontokba befutó szeparatrixok közül ez egyik az instabil fókuszok felől jön, a másik végtelenből. Ezen (pirossal jelölt) szeparatrixoktól balra fekvő pontokból induló minden pálya a stabil csomóba fut be (19.24. ábra).



19.24. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

19.230. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A első egyenletből $2x - y = \pm 3$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve $y = \pm 3$, így az egyensúlyi pontok $(3, 3)$, $(-3, -3)$, $(-1, 1)$ és $(1, -1)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 4(2x - y) & -2(2x - y) \\ -2(x - 2y) & 4(x - 2y) \end{pmatrix}.$$

A $(3, 3)$ egyensúlyi pontban

$$J(3, 3) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(3, 3)) = 0$, $\det(J(3, 3)) = -108$, így $(3, 3)$ nyereg. A $(-3, -3)$ egyensúlyi pontban

$$J(-3, -3) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},$$

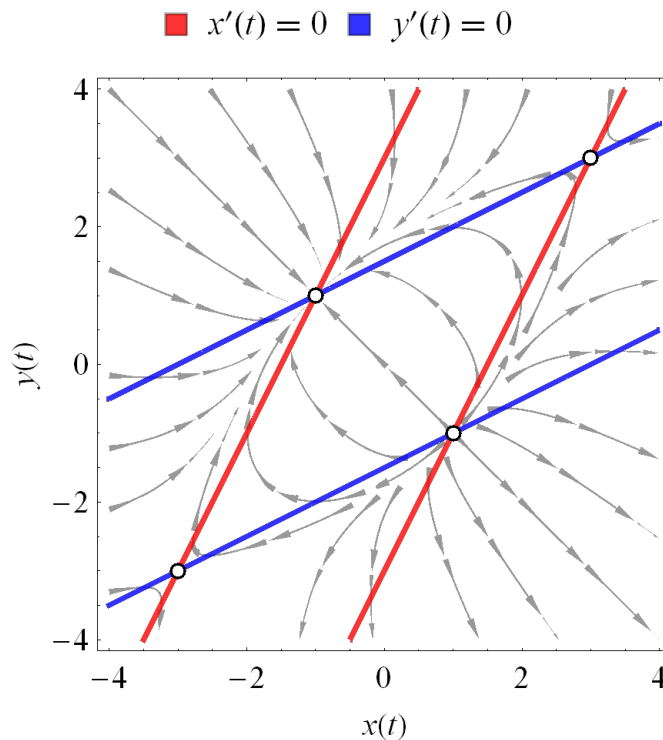
melyre $\text{tr}(J(-3, -3)) = 0$, $\det(J(-3, -3)) = -108$, így $(-3, -3)$ nyereg. A $(-1, 1)$ egyensúlyi pontban

$$J(-1, 1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(-1, 1)) = -24$, $\det(J(-1, 1)) = 108$, $\text{tr}^2(J(-1, 1)) - 4 \det(J(-1, 1)) > 0$, így $(-1, 1)$ stabilis csomó. Az $(1, -1)$ egyensúlyi pontban

$$J(1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, -1)) = 24$, $\det(J(1, -1)) = 108$, $\text{tr}^2(J(1, -1)) - 4 \det(J(1, -1)) > 0$, így $(1, -1)$ instabilis csomó. Az N_1 nullavonal a $2x - y = 3$ és $2x - y = -3$ párhuzamos egyenesekből áll, melyek három tartományra osztják a fázissíkot. A két egyenes közötti részen $\dot{x} < 0$, tehát balfelé mozognak a trajektóriák, a másik két részen pedig $\dot{x} > 0$, tehát jobbfelé mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal az $x - 2y = 3$ és $x - 2y = -3$ párhuzamos egyenesekből áll, melyek három tartományra osztják a fázissíkot. A két egyenes közötti részen $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák, a másik két részen pedig $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt 9 részre osztja a fázissíkot. A két nyeregpontból kiinduló pályák közül az egyik a stabilis csomóba fut be, a másik végtelenhez tart. A nyeregpontokba befutó szeparatrixok közül ez egyik az instabil csomó felől jön, a másik végtelenből. Ezen (pirossal jelölt) szeparatrixoktól balra fekvő pontokból induló minden pálya a stabil csomóba fut be (19.25. ábra).



19.25. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

19.231. Megoldás (Feladat) Határozzuk meg először az egyensúlyi pontokat. A első egyenletből $2x - y = \pm 3$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve $y = \pm 3$, így az egyensúlyi pontok $(3, 3)$, $(-3, -3)$, $(-1, 1)$ és $(1, -1)$. A rendszer Jacobi-mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} 4(2x - y) & -2(2x - y) \\ 2(x - 2y) & -4(x - 2y) \end{pmatrix}.$$

A $(3, 3)$ egyensúlyi pontban

$$J(3, 3) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(3, 3)) = 24$, $\det(J(3, 3)) = 108$, $\text{tr}^2(J(3, 3)) - 4 \det(J(3, 3)) > 0$, így $(3, 3)$ instabilis csomó. A $(-3, -3)$ egyensúlyi pontban

$$J(-3, -3) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(-3, -3)) = -24$, $\det(J(-3, -3)) = 108$, $\text{tr}^2(J(-3, -3)) - 4 \det(J(-3, -3)) >$

0, így $(-3, -3)$ stabilis csomó. A $(-1, 1)$ egyensúlyi pontban

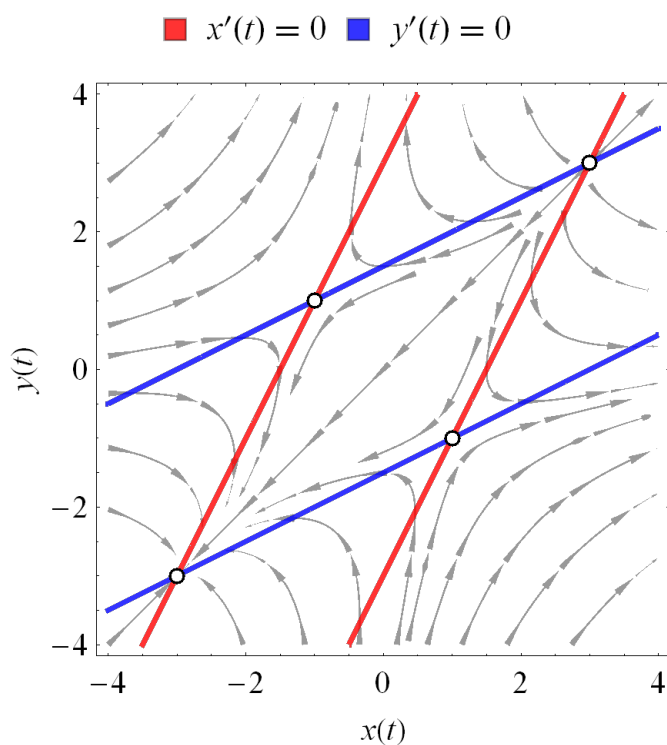
$$J(-1, 1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(-1, 1)) = 0$, $\det(J(-1, 1)) = -108$, így $(-1, 1)$ nyereg. Az $(1, -1)$ egyensúlyi pontban

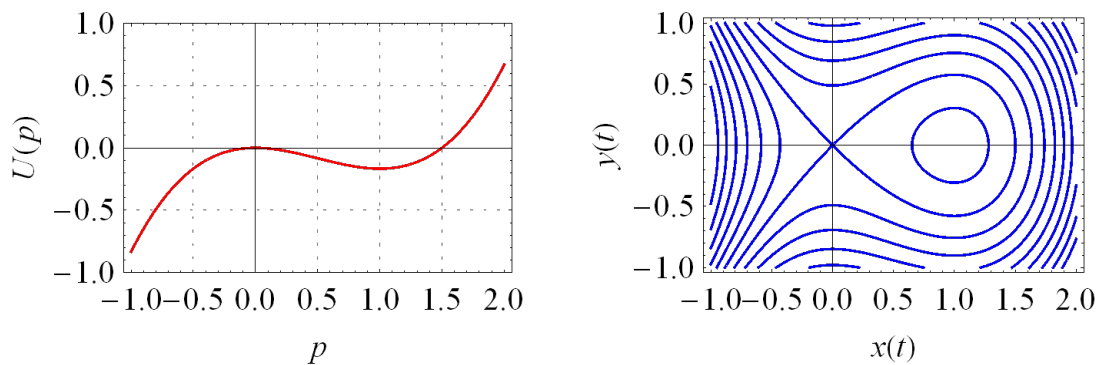
$$J(1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},$$

melyre $\text{tr}(J(1, -1)) = 0$, $\det(J(1, -1)) = -108$, így $(1, -1)$ nyereg. Az N_1 nullavonal a $2x - y = 3$ és $2x - y = -3$ párhuzamos egyenesekből áll, melyek három tartományra osztják a fázissíkot. A két egyenes közötti részen $\dot{x} < 0$, tehát balfelé mozognak a trajektóriák, a másik két részen pedig $\dot{x} > 0$, tehát jobbfelé mozognak a trajektóriák. Az N_2 nullavonal az $x - 2y = 3$ és $x - 2y = -3$ párhuzamos egyenesekből áll, melyek három tartományra osztják a fázissíkot. A két egyenes közötti részen $\dot{y} < 0$, tehát lefelé mozognak a trajektóriák, a másik két részen pedig $\dot{y} > 0$, tehát felfelé mozognak a trajektóriák. A két nullavonal együtt 9 részre osztja a fázissíkot. A két nyeregpontból kiinduló pályák közül az egyik a stabilis csomóba fut be, a másik végtelenhez tart. A nyeregpontokba befutó szeparatrixok közül ez egyik az instabil csomó felől jön, a másik végtelenből. Ezen (pirossal jelölt) szeparatrixoktól balra fekvő pontokból induló minden pálya a stabil csomóba fut be (19.26. ábra).

19.232. Megoldás (Feladat) A rendszer egyensúlyi pontjai $(0, 0)$ és $(1, 0)$. Az U függvény $U(x) = x^3/3 - x^2/2$, így a rendszer első integrálja $V(x, y) = y^2/2 + x^3/3 - x^2/2$. Az U függvénynek maximuma van a 0 pontban és minimuma az 1 pontban, ezért $(0, 0)$ nyeregpont és $(1, 0)$ centrum. Készítsük el ezután az U függvény grafikonját, majd a fent leírt módszer alapján a V szintvonalait. A $V = 0$ -hoz tartozó szintvonal tartalmazza az origót, és a jobb félsíkban hurkot ír le. A hurok belsejében található a negatív V értékekhez tartozó zárt görbék, az $(1, 0)$ pont a V lokális minimuma. Szintén negatív V értékekhez tartoznak a bal félsíkban fekvő, hiperbola ágra emlékeztető görbék. Tehát a V negatív szintjeihez tartozó szinthalmazok két különálló görbéből állnak. A pozitív értékekhez tartozó szintvonalak viszont összefüggőek, ezek a hurkot megkerülő görbék. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legegyszerűbben, ugyanis a felső félsíkban, ahol $y > 0$, a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az alsó félsíkban $\dot{x} < 0$, ezért ott a trajektóriák balra mennek (19.27. ábra).

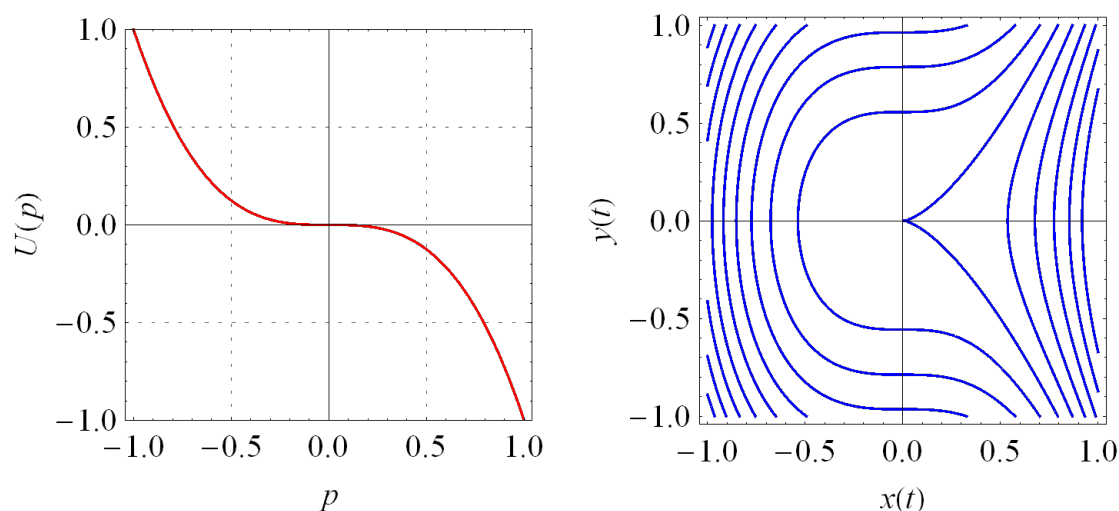


19.26. ábra. A fázistér, a nullavonalak és az egyensúlyi pontok

19.27. ábra. Az U függvény grafikonja (balra) és a Hamilton-függvény szintvonalai (jobbra)

19.233. Megoldás (Feladat) A rendszer egyetlen egyensúlyi pontja a $(0, 0)$ pont. Az U függvény $U(x) = -x^3$, így a rendszer első integrálja $V(x, y) = y^2/2 - x^3$. Az U függvénynek nincs szélsőértéke a 0 pontban, ezért $(0, 0)$

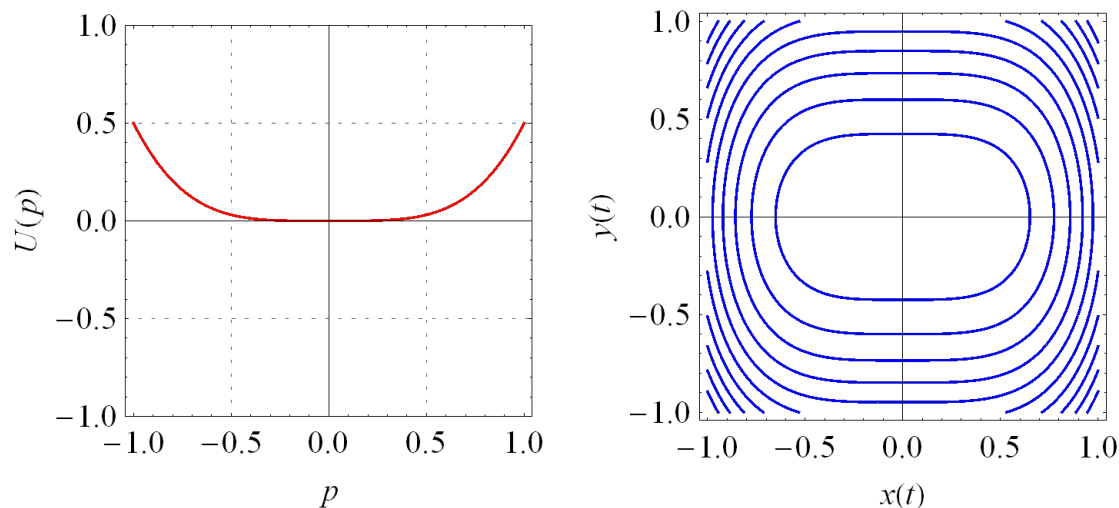
elfajuló egyensúlyi pont ($\det(J) = 0$). Készítsük el ezután az U függvény grafikonját, majd a fent leírt módszer alapján a V szintvonalait. A $V = 0$ -hoz tartozó szintvonal tartalmazza az origót, ahol csúcspontja van. A negatív V értékekhez tartozó szintvonalak a jobb félsíkban fekszenek. A pozitív értékekhez tartozó szintvonalak viszont a bal félsíkban metszik az x tengelyt. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legegyszerűbben, ugyanis a felső félsíkban, ahol $y > 0$, a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az alsó félsíkban $\dot{x} < 0$, ezért ott a trajektóriák balra mennek (19.28. ábra).



19.28. ábra. Az U függvény grafikonja (balra) és a Hamilton-függvény szintvonalai (jobbra)

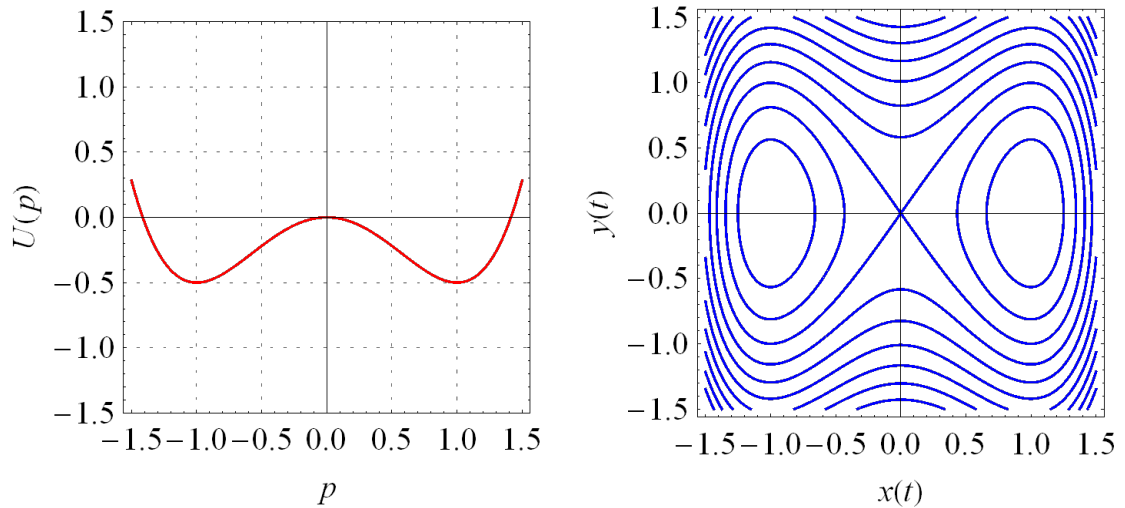
19.234. Megoldás (Feladat) A rendszer egyetlen egyensúlyi pontja a $(0, 0)$ pont. Az U függvény $U(x) = x^4/2$, így a rendszer első integrálja $V(x, y) = y^2/2 + x^4/2$. Az U függvénynek minimuma van a 0 pontban, ezért $(0, 0)$ centrum pont. Készítsük el ezután az U függvény grafikonját, majd a fent leírt módszer alapján a V szintvonalait. A V függvénynek globális minimuma van az origóban. A $V = 0$ -hoz tartozó szintvonal csak az origót tartalmazza. Negatív értékeket nem vesz fel a V függvény. A pozitív értékekhez tartozó szintvonalak az origót megkerülő zárt görbék, mivel V -nek globális minimuma van az origóban. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legegyszerűbben, ugyanis a felső félsíkban, ahol $y > 0$, a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az alsó félsíkban $\dot{x} < 0$, ezért

ott a trajektóriák balra mennek, azaz a trajektóriák az óramutató járása szerint kerülnek meg az origót (19.29. ábra).



19.29. ábra. Az U függvény grafikonja (balra) és a Hamilton-függvény szintvonalai (jobbra)

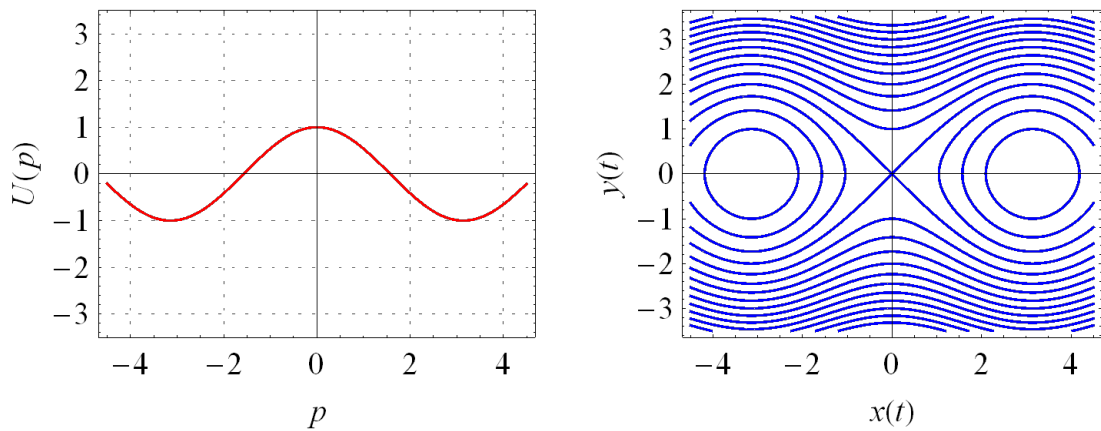
19.235. Megoldás (Feladat) A rendszer egyensúlyi pontjai $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(-1, 0)$. Az U függvény most $U(x) = x^4/2 - x^2$, így a rendszer első integrálja $V(x, y) = y^2/2 + x^4/2 - x^2$. Az U függvénynek maximuma van a 0 pontban és minimuma az 1 és -1 pontban, ezért $(0, 0)$ nyeregpon, $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pedig centrum. Készítsük el ezután az U függvény grafikonját, majd a fent leírt módszer alapján a V szintvonalait. A $V = 0$ -hoz tartozó szintvonal tartalmazza az origót, és a jobb, valamint bal félsíkban egy-egy homoklinikus pályát (hurkot) tartalmaz. A hurkok belsejében található a negatív V értékekhez tartozó zárt görbék, az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pont a V lokális minimuma. Tehát a V negatív szintjeihez tartozó szinthalmazok két különálló zárt görbéből állnak. A pozitív értékekhez tartozó szintvonalak viszont összefüggőek, ezek a két homoklinikus pályát megkerülő zárt görbék. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legegyszerűbben, ugyanis a felső félsíkban, ahol $y > 0$, a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az alsó félsíkban $\dot{x} < 0$, ezért ott a trajektóriák balra mennek (19.30. ábra).



19.30. ábra. Az U függvény grafikonja (balra) és a Hamilton-függvény szintvonalai (jobbra)

19.236. Megoldás (Feladat) A rendszer egyensúlyi pontjai a $(k\pi, 0)$ pontok $k \in \mathbb{Z}$ esetén. Az U függvény $U(x) = \cos x$, így a rendszer első integrálja $V(x, y) = y^2/2 + \cos x$. Az U függvénynek maximuma van a $2k\pi$ pontokban és minimuma a $(2k+1)\pi$ pontokban, ezért a $(2k\pi, 0)$ pontok nyeregpontok, a $((2k+1)\pi, 0)$ pontok pedig centrum pontok. Készítsük el ezután az U függvény grafikonját, majd a fent leírt módszer alapján a V szintvonalait. A $V = 1$ -hez tartozó szintvonal tartalmazza a $(2k\pi, 0)$ pontokat, valamint az alsó és felső félsíkban ezeket összekötő heteroklinikus pályákat. Két heteroklinikus pálya által képezett zárt görbe belsejében helyezkednek el a $V < 1$ értékekhez tartozó szintvonalak, melyek a $((2k+1)\pi, 0)$ pontokat, a V lokális minimumait, tartalmazó zárt görbék. Tehát a $V < 1$ szintekhez tartozó szintvonalak végtelen sok különálló zárt görbéből állnak. A $V > 1$ értékekhez tartozó szintvonalak viszont két görbéből állnak, az egyik az alsó, a másik a felső félsíkban fekszik. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legegyszerűbben, ugyanis a felső félsíkban, ahol $y > 0$, a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az alsó félsíkban $\dot{x} < 0$, ezért ott a trajektóriák balra mennek (19.31. ábra).

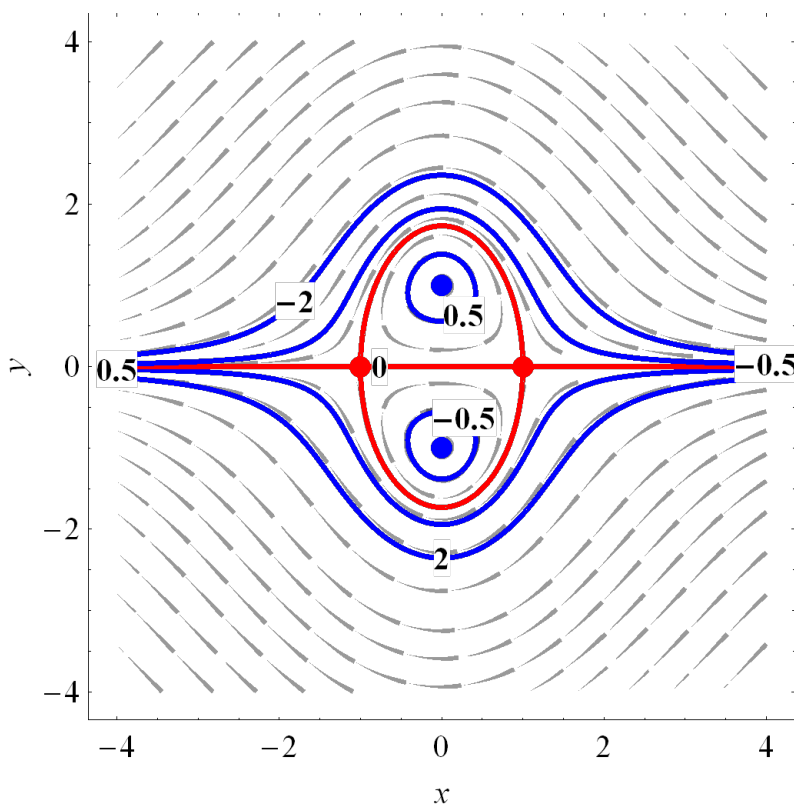
19.237. Megoldás (Feladat) $\partial_1 P(x, y) + \partial_2 Q(x, y) = -2x + 2x = 0$, tehát a rendszer valóban Hamilton-típusú. A P függvényt y szerint integrálva a Hamilton-függvény $H(x, y) = y - x^2y - y^3/3 + C(x)$ alakú, ahol C



19.31. ábra. A fázistér és az egyensúlyi pontok

tetszőleges differenciálható függvény. A H függvényt x szerint deriválva, a $Q = -\partial_1 H$ egyenlőségből a $C'(x) = 0$ összefüggést kapjuk, tehát a C függvény választható például a konstans nulla függvénynek. Így a Hamilton-függvény $H(x, y) = y - x^2y - y^3/3$. A szintvonalak ábrázolása előtt célszerű meghatározni az egyensúlyi pontokat, illetve megrajzolni a nullklínákat és néhány pontban az iránymezőt. A második egyenletből az egyensúlyi pontokra $x = 0$ vagy $y = 0$. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe $y = \pm 1$ vagy $x = \pm 1$. Így az egyensúlyi pontok $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ és $(-1, 0)$. Az egyensúlyi pontok típusát $\det(H''(x, y))$ előjele határozza meg. Esetünkben $\det(H''(x, y)) = -4x^2 + 4y^2$. Így $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ nyeregpontok, $(0, 1)$ és $(0, -1)$ pedig centrum pontok. A $H = 0$ szinthalmaz két részből áll, egyrészt tartalmazza az x tengelyt, másrészt a két nyeregpontot az alsó és felső félsíkban összekötő $1 = x^2 + y^2/3$ egyenletű ellipszist. A negatív H értékekhez tartozó szintvonalak a két centrum pontot az alsó és felső félsíkban megkerülő, az ellipszis belsejében fekvő görbék. A pozitív H értékekhez tartozó szintvonalak az alsó és felső félsíkban fekvő, az ellipszist megkerülő, és végtelenben az x tengelyhez hozzáasimuláló két görbéből állnak. A trajektóriák irányát az iránymezőből, a második egyenlet alapján kaphatjuk meg. Az első és harmadik síknegyedben, $\dot{y} > 0$ miatt a trajektóriák felfelé mennek, míg a második és negyedik negyedben $\dot{y} < 0$ miatt lefelé (19.32. ábra).

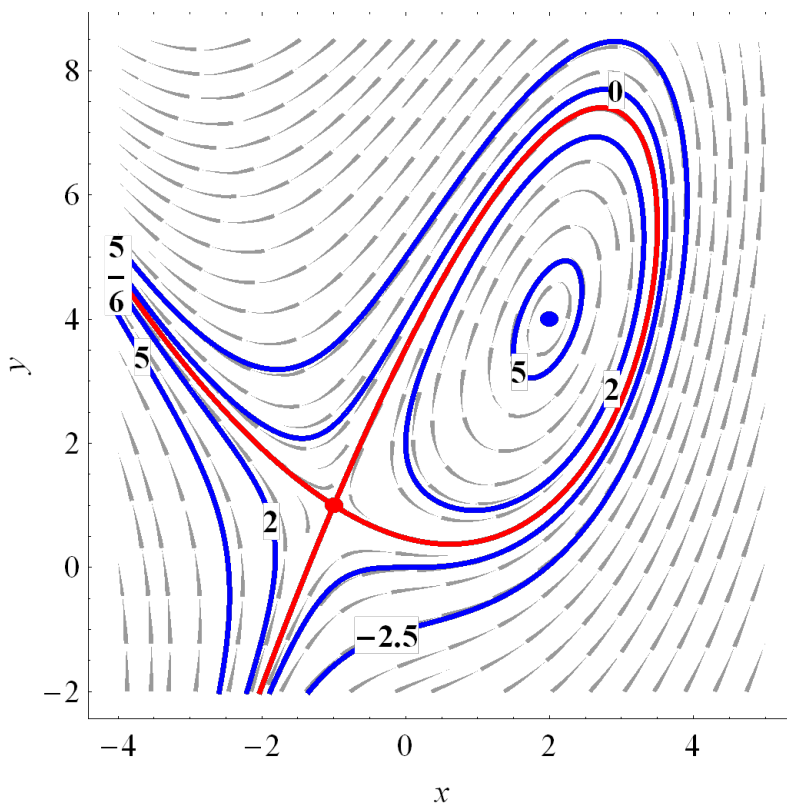
19.238. Megoldás (Feladat) $\partial_1 P(x, y) + \partial_2 Q(x, y) = 1 - 1 = 0$, tehát a rendszer valóban Hamilton-típusú. A P függvényt y szerint integrálva a Hamilton-függvény $H(x, y) = xy + 2y - y^2/2 + C(x)$ alakú, ahol C tetszőleges differenciálható függvény. A H függvényt x szerint deriválva, a $Q = -\partial_1 H$ egyenlőségből a $C'(x) = -x^2$ összefüggést kapjuk, tehát a C függvény vá-



19.32. ábra. A Hamilton-függvény szintvonalai

lasztható például a $C(x) = -x^3/3$ függvénynek. Így a Hamilton-függvény $H(x, y) = xy + 2y - y^2/2 - x^3/3$. A szintvonalak ábrázolása előtt célszerű meghatározni az egyensúlyi pontokat, illetve megrajzolni a nullklínákat és néhány pontban az iránymezőt. A második egyenletből az egyensúlyi pontokra $y = x^2$, ezt behelyettesítve az első egyenletbe, az x -re kapott másodfokú egyenletből $x = 2$ vagy $x = -1$. Így az egyensúlyi pontok $(2, 4)$ és $(-1, 1)$. Az egyensúlyi pontok típusát $\det(H''(x, y))$ előjele határozza meg. Esetünkben $\det(H''(x, y)) = -1 + 2x$. Így $(-1, 1)$ nyereg, $(2, 4)$ pedig centrum. Vizsgáljuk először a nyeregpontot tartalmazó szintvonalat. Ezen H értéke $H(-1, 1) = -1 + 2 - 1/2 + 1/3 = 5/6$. A $H = 5/6$ szinthalmaz a nyeregpontot tartalmazó hurok. A hurok belsejében található a $H < 5/6$ értékekhez tartozó zárt görbék, a $(2, 4)$ pont a V lokális minimuma. Szintén negatív $H < 5/6$ értékekhez tartoznak a hurok végtelenbe tartó ágaihoz simuló, hiperbola ágra emlékeztető görbék. Tehát a $H < 5/6$ szintekhez tartozó szinthalmazok két különálló görbéből állnak. A $H > 5/6$ értékekhez tartozó szintvonalak viszont összefüggőek, ezek a hurkot megkerülő görbék. A trajektóriák irányát az első differenciálegyenletből kaphatjuk meg legeggy-

szerűbben, ugyanis az $y = x + 2$ egyenletű egyenes felett a trajektóriák jobbra mennek, hiszen ott $\dot{x} > 0$, míg az egyenes alatt $\dot{x} < 0$, ezért ott a trajektóriák balra mennek (19.33. ábra).



19.33. ábra. A Hamilton-függvény szintvonalai

19.239. Megoldás (Feladat) A két egyenletet elosztva egymással, és feltételezve, hogy y megadható x függvényeként (legalábbis bizonyos tartományokban), a következő differenciálegyenletet kapjuk az $x \mapsto y(x)$ függvényre:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}.$$

Ez szétválasztható változójú egyenlet, ezért könnyen megoldható. Az y -t tartalmazó tényezőket a bal oldalra átvihetjük:

$$\frac{1-y}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x}.$$

Integrálás után $\ln(|y|) - y = x - \ln(|x|) + K$, ahol K tetszőleges konstans. Tehát a $V(x, y) = \ln(|x|) - x + \ln(|y|) - y$ függvény első integrál, melyről

most már deriválással is meggyőződhetünk (ha esetleg az előbbi formális levezetést nem tartjuk megbízhatónak). Ugyanis $L_f V(x, y) = (1/x - 1)x(1 - y) + (1/y - 1)y(x - 1) = 0$. Megjegyezzük, hogy az első integrált $V(x, y) = F(x) + G(y)$ alakban keresve is eljuthatunk a fenti függvényhez. Igazolható, hogy az első integrál szintvonalai az első síknegyedben zárt görbék, ezért a pozitív koordinátájú megoldások periodikusak.

19.240. Megoldás (Feladat) A két egyenletet elosztva egymással, és feltételezve, hogy y megadható x függvényeként (legalábbis bizonyos tartományokban), a következő differenciálegyenletet kapjuk az $x \mapsto y(x)$ függvényre:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(3 - 2y)}{x^2 - 1}.$$

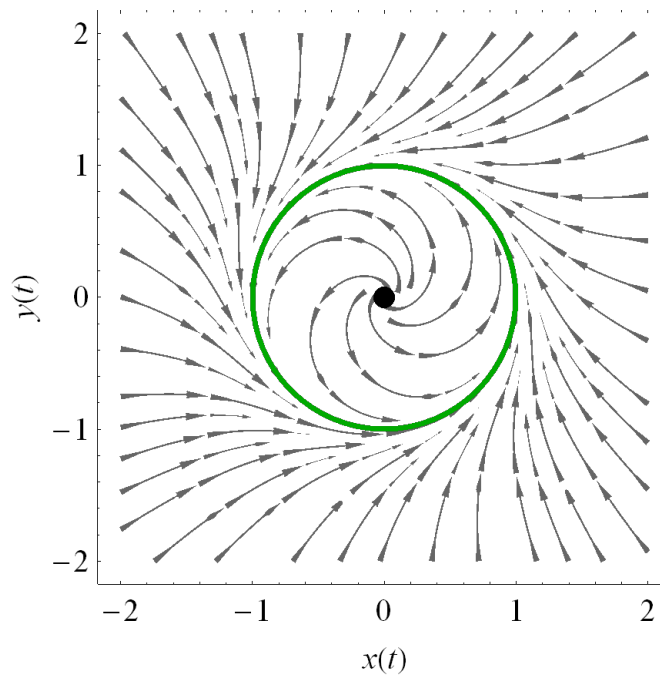
Ez szétválasztható változójú egyenlet, ezért könnyen megoldható. Az y -t tartalmazó tényezőket a bal oldalra átvihetjük:

$$\frac{1}{3 - 2y} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Integrálás után $2x + \ln(|x - 1|) - \ln(|x + 1|) + \ln(|3 - 2y|) = K$, ahol K tetszőleges konstans. Tehát a $V(x, y) = 2x + \ln(|x - 1|) - \ln(|x + 1|) + \ln(|3 - 2y|)$ függvény első integrál, melyről most már deriválással is meggyőződhetünk (ha esetleg az előbbi formális levezetést nem tartjuk megbízhatónak). Ugyanis $L_f V(x, y) = (2 + 1/(x - 1) - 1/(x + 1))(x^2 - 1) - 2x^2(3 - 2y)/(3 - 2y) = 0$. Megjegyezzük, hogy az első integrált $V(x, y) = F(x) + G(y)$ alakban keresve is eljuthatunk a fenti függvényhez.

19.241. Megoldás (Feladat) A 8.2.1. szakaszban ismertetett módszert követve vezessük be az r és φ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\varphi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$ transzformációs képletekkel. Ekkor az ott megadott képleteket felhasználva az új ismeretlen függvényekre az $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\varphi} = 1$ differenciálegyenleteket kapjuk. Mivel $r = 1$ esetén $\dot{r} = 0$, azért az $r = 1$ körvonal invariáns, és $\dot{\varphi} = 1$ miatt pozitív irányban haladnak rajta a megoldások. Ha $r < 1$, akkor $\dot{r} > 0$, azaz a kör belsejében a sugár növekszik, a pályák az $r = 1$ körvonalhoz közelednek. Ha $r > 1$, akkor $\dot{r} < 0$, azaz a körön kívül a sugár csökken, a pályák szintén az $r = 1$ körvonalhoz közelednek. A fáziskép tehát az origóból, mint instabil fókuszról, az $r = 1$ körvonalból, mint stabil határciklusból, és ezen határciklusra (belülről és kívülről) rácsavarodó pályákból áll (19.34. ábra).

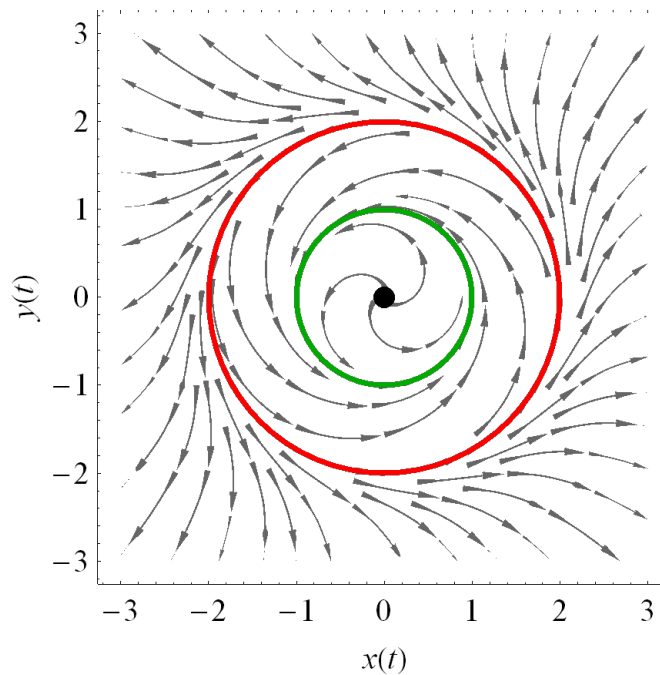
19.242. Megoldás (Feladat) A 8.2.1. szakaszban ismertetett módszert követve vezessük be az r és φ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\varphi(t))$, $y(t) =$



19.34. ábra. A fázistér az origó környezetében

$r(t) \sin(\varphi(t))$ transzformációs képletekkel. Ekkor az ott megadott képleteket felhasználva az új ismeretlen függvényekre az $\dot{r} = r(r-1)(r-2)$, $\dot{\varphi} = 1$ differenciálegyenleteket kapjuk. Mivel $r = 1$, illetve $r = 2$ esetén $\dot{r} = 0$, azért ez a két körvonallal invariáns, és $\dot{\varphi} = 1$ miatt pozitív irányban haladnak rajtuk a megoldások. Ha $r < 1$, akkor $\dot{r} > 0$, azaz a kör belsejében a sugár növekszik, a pályák az $r = 1$ körvonalhoz közelednek. Ha $1 < r < 2$, akkor $\dot{r} < 0$, azaz az $r = 1$ és $r = 2$ kör közötti gyűrűben a sugár csökken, a pályák szintén az $r = 1$ körvonalhoz közelednek. Ha $r > 2$, akkor $\dot{r} > 0$, azaz az $r = 2$ körön kívül a sugár növekszik, a pályák az $r = 2$ körvonalról távolodnak. A fáziskép tehát az origóból, mint instabil fókuszról, az $r = 1$ körvonalból, mint stabil határciklusból, az $r = 2$ körvonalból, mint instabil határciklusból, és az $r = 1$ határciklusra (belülről és kívülről) rácsavarodó, az $r = 2$ határciklusról pedig (belülről és kívülről) lecsavarodó pályákból áll (19.35. ábra).

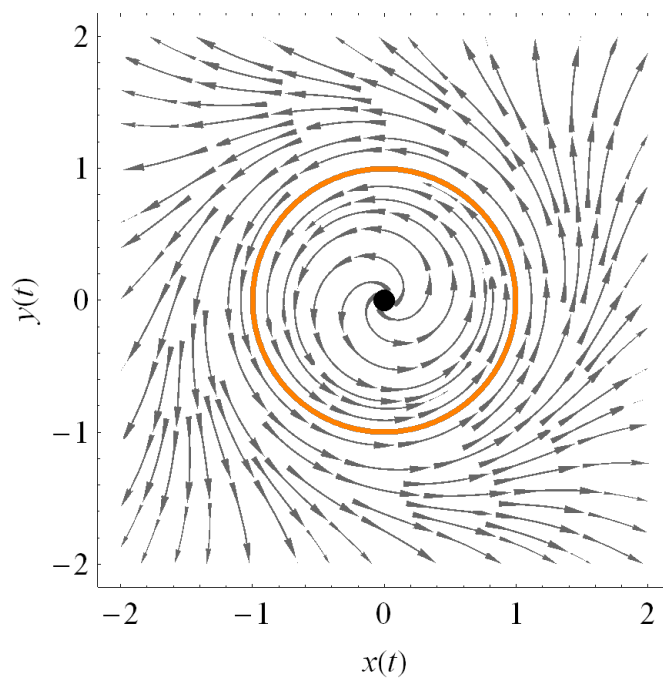
19.243. Megoldás (Feladat) A 8.2.1. szakaszban ismertetett módszert követve vezessük be az r és φ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\varphi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$ transzformációs képletekkel. Ekkor az ott megadott képleteket felhasználva az új ismeretlen függvényekre az $\dot{r} = r(1-r)^2$, $\dot{\varphi} = 1$ differenciálegyenleteket kapjuk. Mivel $r = 1$ esetén $\dot{r} = 0$, azért az $r = 1$ körvonallal invariáns, és $\dot{\varphi} = 1$ miatt pozitív irányban haladnak rajta a megoldások. Ha



19.35. ábra. A fázistér az origó környezetében

$r < 1$, vagy $r > 1$, akkor $\dot{r} > 0$, azaz a kör belsejében és rajta kívül is a sugár növekszik, a pályák belül az $r = 1$ körvonalhoz közelednek, kívül pedig távolodnak tőle. A fáziskép tehát az origóból, mint instabil fókuszról, az $r = 1$ körvonalból, mint belülről stabil, kívülről instabil határciklusból, és ezen határciklusra belülről rácsavarodó, kívülről pedig róla lecsavarodó pályákból áll (19.36. ábra).

19.244. Megoldás (Feladat) A 8.2.1. szakaszban ismertetett módszert követve vezessük be az r és φ függvényeket az $x(t) = r(t) \cos(\varphi(t))$, $y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$ transzformációs képletekkel. Ekkor az ott megadott képleteket felhasználva az új ismeretlen függvényekre az $\dot{r} = rf(r)$, $\dot{\varphi} = 1$ differenciálegyenleteket kapjuk. Ha $f(r_0) = 0$, akkor $r = r_0$ esetén $\dot{r} = 0$, ezért az $r = r_0$ körvonal invariáns, és $\dot{\varphi} = 1$ miatt pozitív irányban haladnak rajta a megoldások. Tehát az egyenlet periodikus megoldásai az f gyökei által meghatározott sugarú körök. Ezen megoldások stabilitását az határozza meg, hogy f hogyan vált előjelet az adott gyökhelynél. Ha $r < r_0$ esetén $f(r) > 0$, és $r > r_0$ esetén $f(r) < 0$, azaz f csökken az r_0 gyöknél, akkor az $r = r_0$ kör belsejében a sugár növekszik, rajta kívül pedig csökken, így az $r = r_0$ kör stabil határciklus. Ha $r < r_0$ esetén $f(r) < 0$, és $r > r_0$ esetén $f(r) > 0$, azaz f növekszik az r_0 gyöknél, akkor az $r = r_0$ kör belsejében a sugár csökken, rajta kívül pedig növekszik, így az $r = r_0$ kör instabil határciklus. Ha f nem

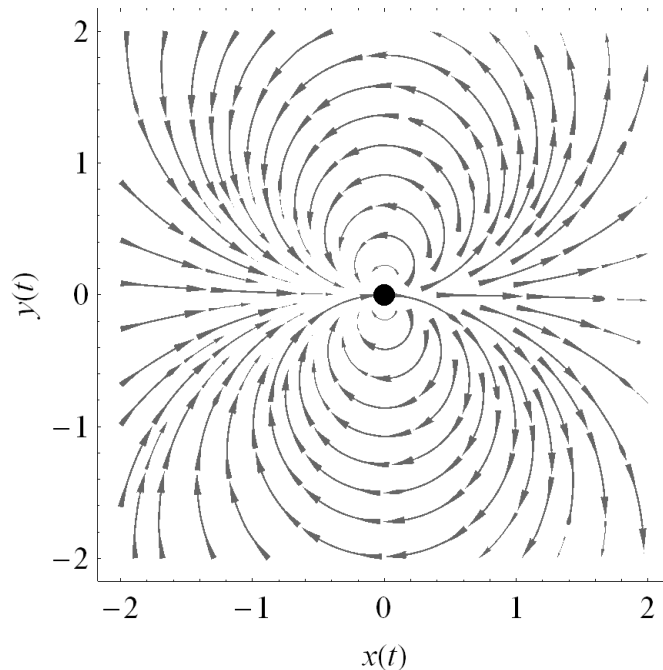


19.36. ábra. A fázistér az origó környezetében

vált előjelet az r_0 gyöknél, akkor a határciklus félig stabil, azaz egyik oldalról közelednek hozzá, másik oldalon pedig távolodnak tőle a trajektóriák.

19.245. Megoldás (Feladat) Vezessük be a $z(t) = x(t) + iy(t)$ függvényt. Erre a differenciálegyenlet $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = P(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iQ(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, azaz $\dot{z} = z^2$. Ez szétválasztható változójú differenciálegyenlet, osszuk el z^2 -tel, majd integráljuk. Ekkor az egyenlet megoldása $z(t) = 1/(c - t)$, ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex konstans. Határozzuk meg a függőleges tengelyről induló megoldásokat. Ezekre $z(0) = Ki$, tehát $c = 1/Ki$, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós konstans. Azaz $z(t) = Ki/(1 - tKi) = (Ki - tK^2)/(1 + t^2K^2)$. Így mivel x és y a z valós és képzetes része, azért $x(t) = (-tK^2)/(1 + t^2K^2)$ és $y(t) = K/(1 + t^2K^2)$. E két egyenletből a t változót eliminálhatjuk (az y segítségével kifejezzük t -t, majd ezt az x képletébe helyettesítjük), ezzel az $x^2 = (K - y)y$ összefüggést kapjuk. Ez az $x^2 + (y - K)^2 = K^2$ egyenlettel egyenértékű, ami egy olyan kör egyenlete, amelynek középpontja a függőleges koordinátatengelyen van és áthalad az origón (középpontja a $(0, K)$ pont, sugara K). Tehát a rendszernek az origó az egyensúlyi pontja, az x tengely invariáns, rajta jobbra haladnak a megoldások, a többi pályák pedig olyan körök (valójában homoklinikus pályák), amelyeknek középpontja a függőleges koordinátatengelyen van és áthaladnak az origón. A felső félsíkban ezen körökön pozitív irányban haladnak a megoldások, az

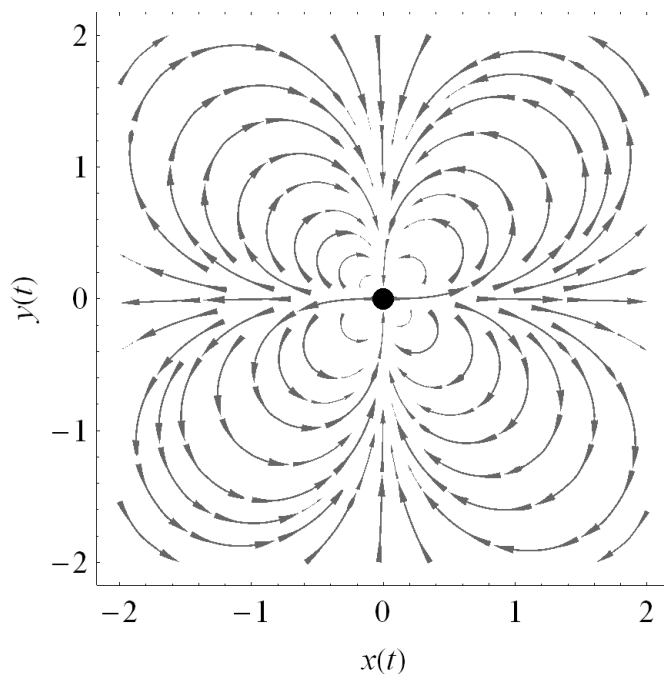
alsó félsíkban pedig negatív irányban. Megjegyezzük, hogy amennyiben az $x^2 + (y - K)^2 - K^2 = 0$ képlet már ismert, akkor deriválással azt kapjuk, hogy ennek deriváltja $2x(x^2 + (y - K)^2 - K^2)$, tehát ha $x^2 + (y - K)^2 - K^2 = 0$ fennáll a trajektória kezdőpontjában, akkor minden pontjában fennáll, azaz ezen képlettel megadott körvonal invariáns görbe (19.37. ábra).



19.37. ábra.

19.246. Megoldás (Feladat) Vezessük be a $z(t) = x(t) + iy(t)$ függvényt. Erre a differenciálegyenlet $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = P(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) + iQ(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, azaz $\dot{z} = z^3$. Ez szétválasztható változójú differenciálegyenlet, osszuk el z^3 -nal, majd integráljuk. Ekkor az egyenlet megoldása $z^2(t) = \frac{1}{c-2t}$, ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex konstans. Az iránymezőt megrajzolva észrevehetjük, hogy az $y = x$ és $y = -x$ egyenesekről induló megoldásokat célszerű meghatározni. Ezekre $z(0) = K(1 + i)$, melyből $c = \frac{1}{2K^2i}$, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós konstans. Ezért $z^2(t) = \frac{1}{c-2t}$ reciprokát véve, és felhasználva, hogy $z = x + iy$, azt kapjuk, hogy $\frac{1}{x^2 - y^2 + 2ixy} = \frac{1}{2K^2i} - 2t$. Ennek képzetes része $\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{1}{2K^2}$, amely egyenértékű a $4xy(K^2 - xy) = (x^2 - y^2)^2$ összefüggéssel. Ezen összefüggésnek megfelelő görbék adják (különböző $K \in \mathbb{R}$ értékekre) az első és harmadik síknegyedben a pályákat. A másik két síknegyedben fekvő pályákat hasonlóképpen számíthatjuk ki a $z(0) = K(1 - i)$

kezdeti feltétel felhasználásával. A kapott görbék olyan homoklinikus pályákat adnak, melyek a koordinátatengelyeket érintve futnak be az origóba. Az első és harmadik síknegyedben a pályákon a megoldás pozitív irányban halad, a másik két negyedben pedig negatív irányban (ezt az iránymezőből egyszerűen láthatjuk). A rendszernek az origó az egyensúlyi pontja, az x és y tengely invariáns, az x tengelyen távolodnak, az y tengelyen pedig az orihoz közelednek a megoldások. Megjegyezzük, hogy amennyiben a $(x^2 - y^2)^2 - 4xy(K^2 - xy) = 0$ képlet már ismert, akkor azt kapjuk, hogy $4(x^2 - y^2)((x^2 - y^2)^2 - 4xy(K^2 - xy))$, tehát ha $(x^2 - y^2)^2 - 4xy(K^2 - xy) = 0$ fennáll a trajektória kezdőpontjában, akkor minden pontjában fennáll, azaz ezen képlettel megadott körvonal invariáns görbe (19.38. ábra).



19.38. ábra.

20. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

20.247. Megoldás (Feladat) Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$\frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial t} + K'(t) \frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial x} = -K'(t) \varrho'_0(x - K(t)) + K'(t) \varrho'_0(x - K(t)) = 0.$$

20.248. Megoldás (Feladat) A megoldást olyan kétszer folytonosan differenciálható függvények között keressük, amelyek a sík valamely *konvex* tartományán vannak értelmezve. Ha az egyenletet így írjuk: $\partial_1(\partial_2 u(x, y)) = 0$, akkor megállapítható, hogy minden rögzített y mellett $\partial_2 u(\cdot, y)$ állandó – ugyanis $\partial_2 u(\cdot, y)$ értelmezési tartománya minden rögzített y mellett (nyílt) intervallum, mivel \mathcal{D}_u konvex –, ezért alkalmas, nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénnyel $\partial_2 u(x, y) = c(y)$ teljesül. Ez az összefüggés azt vonja maga után, hogy

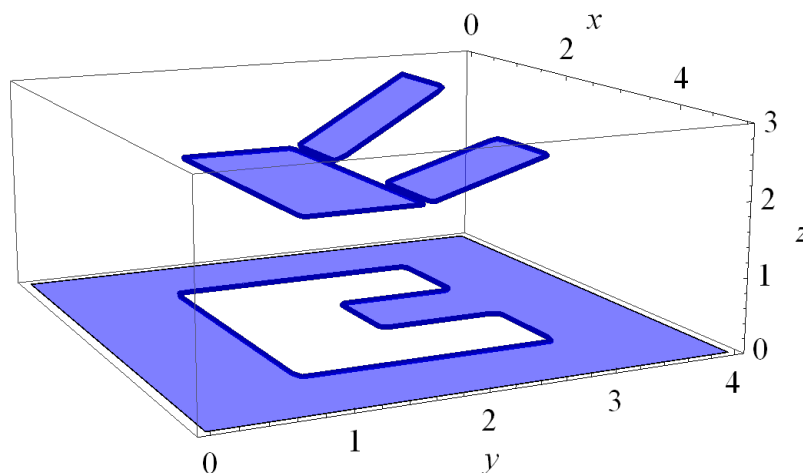
$$u(x, y) = \int_{y_0}^y c(s) ds + C_1(x) = C_1(x) + C_2(y),$$

ahol C_1 és C_2 nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények, $y_0 \in \mathcal{D}_c$ pedig tetszőleges pont. Így az általános megoldás

$$u(x, y) = C_1(x) + C_2(y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

ahol C_1 és C_2 nyílt intervallumon értelmezett folytonosan *differenciálható* függvények, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pedig (nyílt intervallumok Descartes-szorzata lévén) konvex tartomány.

Megjegyzés. A [26] tankönyvben hiányzó *konvex* jelző fontosságára mutat a 20.248. ábra, amely példát mutat olyan v függvényre, amelynek első változó szerinti deriváltja nulla, mégsem adható meg a második változó függvényként.



20.1. ábra. Példa olyan függvényre, amelynek első változó szerinti deriváltja nulla, mégsem adható meg a második változó függvényeként.

20.249. Megoldás (Feladat) Számítsuk ki a vegyes parciális deriváltakat mindkét egyenletből, majd használjuk fel újra az eredeti egyenleteket:

$$\begin{aligned}\partial_{21}u(x, y) &= u(x, y) + (1 + y)\partial_2u(x, y) \\ &= u(x, y) + (1 + y)(u(x, y)^2 + 2xu(x, y)), \\ \partial_{12}u(x, y) &= 2u(x, y)\partial_1u(x, y) + 2u(x, y) + 2x\partial_1u(x, y) \\ &= 2u(x, y) + (2u(x, y) + 2x)(u(x, y) + yu(x, y)).\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$u(x, y)(1 + (1 + y)u(x, y)) = 0,$$

vagyis ezek lehetnek a megoldások:

$$u_1(x, y) := 0, \quad u_2(x, y) := -\frac{1}{1 + y}$$

alkalmas összefüggő nyílt halmazokon. Behelyettesítés mutatja, hogy csak a triviális u_1 függvény a megoldás, akár az egész síkon. Sokkal hosszabb számolás után hasonló eredményre jutunk, ha megoldjuk külön a két egyenletet, majd összevetjük a kapott megoldásait.

20.250. Megoldás (Feladat) Mivel itt a 9.2. szakasz jelöléseivel $f(a, b, c) = (5, 2)$, $h(a, b, c) = 0$, ezért a karakterisztikus differenciálegyenlet:

$$\dot{x} = 5, \quad \dot{y} = 2, \quad \dot{u} = 0;$$

ennek megoldásai, azaz a **karakterisztikus görbék**:

$$\tilde{x}(t) = 5t + C_1, \tilde{y}(t) = 2t + C_2, \tilde{u}(t) = C_3.$$

A karakterisztikus görbe paraméterezésének kezdetét úgy akarjuk megválasztani, hogy átmenjen a megadott görbén, tehát valamilyen $\xi_0 \in \mathcal{D}_g$ mellett teljesüljön:

$$C_1 = \tilde{x}(0) = 2\xi_0, C_2 = \tilde{y}(0) = -\xi_0, C_3 = \tilde{u}(0) = 9\xi_0^2,$$

így a 9.2. szakasz jelöléseivel

$$r_1(t) = 5t + 2\xi_0, r_2(t) = 2t - \xi_0, \gamma(t) = 9\xi_0^2.$$

Feladatunk most már az, hogy keressünk olyan φ függvényt, amelyre teljesül, hogy értelmezési tartományának minden (x, y) pontjához van olyan (\mathbf{r}, γ) karakterisztikus görbe, hogy $\mathbf{r}(0) = (x, y)$, és amellyel minden $(x, y) \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén $\gamma(t) = \varphi(\mathbf{r}(t))$ teljesül, ahol $\mathbf{r}(t) := (r_1(t), r_2(t))$. Nyilván az (*egyetlen*) megoldás:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \varphi(x, y) := \frac{(2x - 5y)^2}{9},$$

ez tehát a parciális differenciálegyenlet olyan megoldása, amely átmege a megadott görbén, amint azt akár behelyettesítéssel verifikálhatja is az Olvasó.

Hogyan határoztuk meg a φ függvényt? Meghatároztuk az

$$R_1(t, \xi_0) := 5t + 2\xi_0, R_2(t, \xi_0) := 2t - \xi_0$$

függvényt *globális* inverzét, ami egyértelműen lehetséges,

Császár, Á.: Valós analízis I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. 479. oldal, 7.3. tétel

mivel

$$\det \left(\begin{bmatrix} \partial_1 R_1(t^1, \xi_0^1) & \partial_2 R_1(t^1, \xi_0^1) \\ \partial_1 R_2(t^2, \xi_0^2) & \partial_2 R_2(t^2, \xi_0^2) \end{bmatrix} \right) = -9 \neq 0.$$

Más szavakkal, megoldottuk az

$$x = R_1(t, \xi_0) \quad y = R_2(t, \xi_0)$$

egyenletrendszert a (t, ξ_0) változópárra, majd az eredményül kapott függvényt komponáltuk a γ függvényvel. Pontosabban, ha tehát $G(t, \xi_0) := 9\xi_0^2$, és $\mathbf{R} := (R_1, R_2)$, akkor $G = \varphi \circ \mathbf{R}$, vagyis $\varphi = G \circ \mathbf{R}^{-1}$.

20.251. Megoldás (Feladat) Mivel itt a 9.2. szakasz jelöléseivel $f(a, b, c) = (1, 2)$, $h(a, b, c) = 0$, ezért a karakterisztikus differenciálegyenlet:

$$\dot{t} = 1, \dot{x} = 2, \dot{\varrho} = 0;$$

ennek megoldásai, azaz a **karakterisztikus görbék**:

$$\tilde{t}(t) = t + C_1, \tilde{x}(t) = 2t + C_2, \tilde{\varrho}(t) = C_3.$$

A karakterisztikus görbe paraméterezésének kezdetét úgy akarjuk megválasztani, hogy átmenjen a megadott görbén, tehát valamilyen $\xi_0 \in \mathcal{D}_g$ mellett teljesüljön:

$$C_1 = \tilde{t}(0) = 0, C_2 = \tilde{x}(0) = \xi, C_3 = \tilde{\varrho}(0) = \varrho_0(\xi_0),$$

így a 9.2. szakasz jelöléseivel

$$r_1(t) = t, r_2(t) = 2t + \xi_0, \gamma(t) = \varrho_0(\xi_0).$$

Feladatunk most már az, hogy keressünk olyan $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ függvényt, amellyel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén $\gamma(t) = \varphi(\mathbf{r}(t))$ teljesül, ahol $\mathbf{r}(t) := (r_1(t), r_2(t))$. Nyilván az (egyetlen) megoldás:

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, x) \mapsto \varphi(t, x) := \varrho_0(x - 2t),$$

ez tehát a parciális differenciálegyenlet olyan megoldása, amely átmegegy a megadott görbén.

Vegyük észre (lásd a [26] 9.1.1. szakaszának 9.1. példáját), hogy amit megoldottunk, az a *transzportegyenlet* speciális esete: a ϱ_0 kezdeti tömegsűrűségű anyag 2 sebességgel halad, ennek az eredménye az lesz, hogy a $t \in \mathbb{R}$ időpontban az $x \in \mathbb{R}$ helyen a sűrűségét $\varrho(t, x) = \varrho_0(x - 2t)$ adja meg. Amennyiben éppen tömegsűrűségről van szó, akkor fel kell tennünk, hogy a kezdeti sűrűséget megadó függvény csak *nemnegatív* értékeket vesz fel. A megoldásról pedig megállapíthatjuk, hogy megőrzi ezt a fizikailag fontos tulajdonságot. A feladat alapján azt is látjuk, hogy a kezdetben jelenlévő össztömeg, azaz ϱ_0 integrálja a számegyenesen megmarad: tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ időpontban megegyezik $\varrho(t, \cdot)$ integráljával. Végül pedig érdemes még azt is megemlíteni, hogy a sűrűség a folyamat során a $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | x - 2t = \text{állandó}\}$ 2 meredekségű egyenesek mentén nem változik, így a folyamat egy tömegpont 2 sebességű mozgása általánosításának tekinthető.

Megjegyzés. Tanulságos megvizsgálni a transzportegyenlet megoldásit bonyolultabb sebességfüggvények esetén vagy akár a legáltalánosabb

$$\frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial t} + m(t, x, \varrho(t, x)) \frac{\partial \varrho(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})) \quad (20.1)$$

alakban.

Megjegyzendő, hogy a fizikailag fontos tulajdonságok éppúgy teljesülnek, mint a fent tárgyalt legegyszerűbb esetben. Végül pedig megemlítjük, hogy az elsőrendű homogén kvázilineáris parciális differenciálegyenletek (azaz amelyeknél a jobb oldal nulla) alkalmas tartományon valamelyik együttthatófüggvénnyel való osztással nyilván a transzportegyenlettel azonos alakra hozhatók.

20.252. Megoldás (Feladat) Mivel itt $f(a, b, c) = (5a, 2b)$, $h(a, b, c) = 0$, ezért a karakterisztikus differenciálegyenlet:

$$\dot{\tilde{x}} = 5\tilde{x}, \dot{\tilde{y}} = 2\tilde{y}, \dot{\tilde{u}} = 0;$$

ennek megoldásai, azaz a **karakterisztikus görbék**:

$$\tilde{x}(t) = C_1 e^{5t}, \tilde{y}(t) = C_2 e^{2t}, \tilde{u}(t) = C_3.$$

A karakterisztikus görbe paraméterezésének kezdetét úgy akarjuk megválasztani, hogy átmenjen a megadott görbén:

$$C_1 = \tilde{x}(0) = 2\xi_0, C_2 = \tilde{y}(0) = -\xi_0, C_3 = \tilde{u}(0) = 9\xi_0^2,$$

tehát

$$r_1(t) = 2\xi_0 e^{5t}, r_2(t) = -\xi_0 e^{2t}, \gamma(t) = 9\xi_0^2.$$

Keressünk olyan $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ függvényt, amellyel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén $\gamma(t) = \varphi(\mathbf{r}(t))$ teljesül, ahol $\mathbf{r}(t) := (r_1(t), r_2(t))$. Nyilván csak ezt találjuk:

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto \varphi(x, y) := 18 \frac{y^3}{x} \sqrt[3]{\frac{2y}{x}},$$

ez tehát a parciális differenciálegyenlet olyan megoldása, amely átmegy a megadott görbén, amint azt akár behelyettesítéssel verifikálhatja is az Olvasó. Ha összefüggő nyílt halmazon értelmezett függvényeket szeretnénk megoldásnak tekinteni, akkor ennek a φ függvénynek a bal és a jobb félsíkra vett megszorításait (vagy azok összefüggő nyílt halmazra vett megszorításait) választhatjuk.

20.253. Megoldás (Feladat) Most $f(a, b, c) = (c, -1)$, $h(a, b, c) = 1$, ezért a karakterisztikus differenciálegyenlet:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{u}, \dot{\tilde{y}} = -1, \dot{\tilde{u}} = 1;$$

ennek megoldásai, azaz a karakterisztikus görbék:

$$\tilde{x}(t) = \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_1, \tilde{y}(t) = -t + C_2, \tilde{u}(t) = t + C_3.$$

Válasszuk meg a karakterisztikus görbe paraméterezésének kezdetét úgy, hogy átmenjen a megadott görbén:

$$C_1 = \tilde{x}(0) = -\xi_0, C_2 = \tilde{y}(0) = \xi_0, C_3 = \tilde{u}(0) = 1,$$

tehát

$$r_1(t) = \frac{t^2}{2} + t - \xi_0, r_2(t) = -t + \xi_0, \gamma(t) = t + 1.$$

Feladatunk most már az, hogy keressünk olyan tartományon értelmezett, folytonosan differenciálható φ függvényt, amelyhez minden $(x, y) \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén van olyan karakterisztikus görbe, amelyre $\mathbf{r}(0) = (x, y)$ és $\gamma(t) = \varphi(\mathbf{r}(t))$ teljesül, ahol $\mathbf{r}(t) := (r_1(t), r_2(t))$. Két megoldást kapunk:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 0\} \ni (x, y) \mapsto \varphi(x, y) := 1 \pm \sqrt{2(x + y)},$$

ezek tehát a parciális differenciálegyenlet olyan (maximális) megoldásai, amelyek átmennek a megadott görbén; a többi megoldás ezek leszűkítéseként adódik.

20.254. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus differenciálegyenlet:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}, \dot{\tilde{y}} = -\tilde{x}, \dot{\tilde{u}} = 2\tilde{x}\tilde{u};$$

ennek megoldásai, azaz a karakterisztikus görbék:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= C_1 \cos(t + C_2), \\ \tilde{y}(t) &= -C_1 \sin(t + C_2), \\ \tilde{u}(t) &= C_3 \exp \frac{C_1^2 \cos^2(t + C_2)}{2}. \end{aligned}$$

A karakterisztikus görbe paraméterezésének kezdetét alkalmasan megválasztva:

$$C_1 = \tilde{x}(0) = \xi_0 \sqrt{2}, C_2 = \tilde{y}(0) = -\pi/4, C_3 = \tilde{u}(0) = \xi_0 e^{-\xi^2},$$

tehát

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto u(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}} e^{\frac{3x^2 - y^2}{4}}$$

az egyik megoldás.

20.255. Megoldás (Feladat) A karakterisztikus egyenlet alkalmas kezdeti feltételek melletti megoldása:

$$r_1(t) = t + \xi, r_2(t) = \xi^2, \quad \gamma(t) = \frac{1}{\xi^{-3} - t},$$

tehát

$$T \ni (x, y) \mapsto u(x, y) = \frac{1}{y^{-3/2} + y^{1/2} - x},$$

ahol $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^{-3/2} + y^{1/2} < x\}$.

20.256. Megoldás (Feladat) A szokásos módon eljutunk oda, hogy

$$r(t) = t + \xi_0, \quad r_2(t) = t + \xi_0, \quad \gamma(t) = t + \xi_0,$$

amiből az következik, hogy a megoldás csak olyan folytonosan differenciálható, tartományon értelmezett φ függvény lehet, amelyre

$$\varphi(x, x) = x \tag{20.2}$$

teljesül, például $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = px + (1-p)y$, ahol $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megjegyzés. A megoldás tehát *nem egyértelmű*. Továbbá: a (20.2) feltétel nem elegendő ahhoz, hogy megoldást kapjunk, amint azt az első negyedben értelmezett $(x, y) \mapsto x(y/x)^2$ függvény mutatja.

20.257. Megoldás (Feladat) A szokásos módon eljutunk oda, hogy

$$r(t) = \xi_0 e^t, \quad r_2(t) = \xi_0 e^t, \quad \gamma(t) = \xi_0,$$

amiből következik, hogy a feladatnak *nincs megoldása*.

20.258. Megoldás (Feladat) A szokásos módon eljutunk oda, hogy

$$r_1(t) = \xi_0 e^t, \quad r_2(t) = \xi_0(e^t - 1), \quad \gamma(t) = t - \xi_0 e^t + 2\xi_0,$$

amiből $u(x, y) = \ln(x) - \ln(x - y) + x - 2y$, $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, x > y\}$.

20.259. Megoldás (Feladat) A szokásos módon eljutunk oda, hogy

$$r_1(t) = \xi_0 e^t, \quad r_2(t) = \xi_0^2 e^t, \quad r_3(t) = \xi_0^3 e^t, \quad \gamma(t) = \xi_0^4,$$

amiből $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y, z) \mapsto u(x, y, z) = f(y/x, z/x)$, ahol f tetszőleges olyan függvény, amelyre $f(p, p) = p^4$, például $f(p, q) = pq^3$.

Megjegyzés. Az egyváltozós függvényekre vonatkozó kvázilineáris parciális differenciálegyenlet általános alakja $a(x, u(x))u'(x) = b(x, u(x))$ lehetne, ami a hányados jobboldalú egyenlet ([26], 3.5. szakasz) általánosításának tekinthető.

20.260. Megoldás (Feladat) Ha (9.1) fennáll, akkor

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_f : (\lambda \mapsto f(\lambda \mathbf{x}))'(1) = \sum_{n=1}^N x_n \partial_n f(\mathbf{x}) = 0. \quad (20.3)$$

Fordítva: ha (20.3) fennáll, akkor ennek a (homogén, lineáris) parciális differenciálegyenletnek a karakterisztikus differenciálegyenlete

$$\dot{\tilde{x}}_n = \tilde{x}_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad \dot{\tilde{f}} = \tilde{f},$$

melynek, megoldása

$$\varphi \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_N}{x_1} \right)$$

alakú, vagyis teljesíti (9.1)-et.

Megjegyzés.

1. Ismeretes, hogy a belső energia homogén elsőfokú függvénye az entrópiának, a térfogatnak és a (mólban mért) anyagmennyiségnek: $\mathcal{U}(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda \mathcal{U}(S, V, N)$. Az Euler-egyenlet ebben az esetben:

$$S \frac{\partial \mathcal{U}(S, V, N)}{\partial S} + V \frac{\partial \mathcal{U}(S, V, N)}{\partial V} + N \frac{\partial \mathcal{U}(S, V, N)}{\partial N} = \mathcal{U}(S, V, N),$$

és ha a szokásos módon bevezetjük a *hőmérséklet*, a *nyomás* és a *mól-szám* elnevezésű **intenzív mennyiségeket**:

$$\begin{aligned} T(S, V, N) &:= \frac{\partial \mathcal{U}(S, V, N)}{\partial S}, \\ p(S, V, N) &:= -\frac{\partial \mathcal{U}(S, V, N)}{\partial V}, \\ \mu(S, V, N) &:= \frac{\partial \mathcal{U}(S, V, N)}{\partial N}, \end{aligned} \quad (20.4)$$

akkor a fenti összefüggést így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(S, V, N) &= T(S, V, N)S - p(S, V, N)V + \mu(S, V, N)N \quad (20.5) \\ &= (T(S, V, N) \quad -p(S, V, N) \quad \mu(S, V, N)) \cdot \begin{pmatrix} S \\ V \\ N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Szokás még használni egy (az eddigiekhez képest csekély többletinformációt adó) összefüggést, a Gibbs–Duhem-relációt is. Deriváljuk

a (20.5) összefüggést:

$$\mathcal{U}'(S, V, N) = \left(\begin{pmatrix} \partial_1 T(S, V, N) & \partial_2 T(S, V, N) & \partial_3 T(S, V, N) \\ -\partial_1 p(S, V, N) & -\partial_2 p(S, V, N) & -\partial_3 p(S, V, N) \\ \partial_1 \mu(S, V, N) & \partial_2 \mu(S, V, N) & \partial_3 \mu(S, V, N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ V \\ N \end{pmatrix} \right)^\top + (T(S, V, N) \quad -p(S, V, N) \quad \mu(S, V, N)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan a (20.4) definíció alapján adódik a nevezetes **Gibbs–Duhem-reláció**:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 T(S, V, N) & \partial_2 T(S, V, N) & \partial_3 T(S, V, N) \\ -\partial_1 p(S, V, N) & -\partial_2 p(S, V, N) & -\partial_3 p(S, V, N) \\ \partial_1 \mu(S, V, N) & \partial_2 \mu(S, V, N) & \partial_3 \mu(S, V, N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ V \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20.6)$$

vagy egészen röviden: $\mathcal{U}'' \text{id}_{\mathbb{R}^3} = \mathbf{0}$, ami azt mutatja, hogy a bevezetett intenzív mennyiségek deriváltjai egymással lineárisan összefüggnek, kettő ismeretében a harmadik kifejezhető.

3. Ismertetünk még két szokásos definíciót. Az

$$\mathcal{A}(S, V, N) := \mathcal{U}(S, V, N) + p(S, V, N)V - T(S, V, N)S$$

képlettel értelmezett **Gibbs-féle energia** (amire régebben a \mathcal{G} jelet és a Gibbs-féle szabadenergia elnevezést használták) a fentiek szerint: $\mathcal{A}(S, V, N) = \mu(S, V, N)N$. Amennyiben több – M számú – kémiai anyagfajta van jelen, a

$$\mathcal{A}(S, V, N_1, N_2, \dots, N_M) = \sum_{m=1}^M \mu_m(S, V, N_1, N_2, \dots, N_M) N_m$$

általánosabb alakhoz jutunk.

A fizikában inkább az \mathcal{F} **Helmholtz-féle (szabad)energia** használatos, amelynek definíciója: $\mathcal{F}(S, V, N) := \mathcal{U}(S, V, N) + p(S, V, N)V$.

4. Ismeretes, hogy az entrópia is homogén elsőfokú függvénye a belső energiának, a térfogatnak és a (mólban mért) anyagmennyiségnek: $\mathcal{S}(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda \mathcal{S}(U, V, N)$. Ha a fajlagos (azaz egy móltra jutó) belső energiát, térfogatot és entrópiát rendre $u := \frac{U}{N}$, $v := \frac{V}{N}$, $s(u, v) := \mathcal{S}(u, v, 1)$ jelöli, akkor a homogenitás miatt $\mathcal{S}(U, V, N) = N s(u, v)$.

20.261. Megoldás (Feladat) Az együtthatófüggvények az egész síkon értelmezve vannak. Írjuk fel az egyenlet diszkriminánsát:

$$d(x, y) := \begin{vmatrix} x - y & x - y \\ x - y & y \end{vmatrix} = (x - y)(2y - x).$$

Az egyenlet nyilván az első és a harmadik síknegyed szögfelező egyenesén és az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2y = x\}$ egyenes pontjaiban parabolikus. Megjegyzendő azonban, hogy ez a halmaz nem tartomány.

20.262. Megoldás (Feladat) Az együtthatófüggvények az egész síkon értelmezve vannak. Írjuk fel az egyenlet diszkriminánsát:

$$d(x, y) := \begin{vmatrix} -y & x^2 \\ x^2 & xy \end{vmatrix} = -x(y^2 + x^3).$$

Az egyenlet nyilván az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee y^2 + x^3 = 0\}$ halmaz pontjaiban parabolikus. Megjegyzendő azonban, hogy ez a halmaz nem tartomány.

Elliptikus ott, ahol a diszkrimináns pozitív, azaz az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee y^2 + x^3 > 0\}$ halmazon, amely két diszjunkt tartomány egyesítése, végül pedig hiperbolikus ott, ahol a diszkrimináns negatív, azaz az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee y^2 + x^3 < 0\}$ halmazon, amely szintén két diszjunkt tartomány egyesítése.

20.263. Megoldás (Feladat) Legyen a diffeomorfizmus $\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, az új ismeretlen függvény pedig $U(\zeta(x, y)) := u(x, y)$. A közvetett függvény deriválási szabályából kapjuk: $u' = U' \circ \zeta \cdot \zeta'$, és $u'' = \zeta' U'' \circ \zeta \cdot (\zeta')^\top + U' \circ \zeta \cdot \zeta''$, tehát – ha az U függvényre vonatkozó egyenlet együtthatóit a megfelelő nagybetűkkel jelöljük, akkor –

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \zeta' \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot (\zeta')^\top.$$

Mivel a két szélső tényező determinánsa egymással azonos, de nullától különböző, a transzformált egyenlet típusa azonos az eredetiével.

Megjegyzés. Az Olvasóra hagyjuk a fenti képletek részletes értelmezését.

20.264. Megoldás (Feladat) A szorzatalakot az egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y).$$

A nulla függvénytől különböző és folytonos (sőt, kétszer folytonosan differenciálható) megoldás az egységnyezet valamely pontjának környezetében nem veszi fel a nulla értéket, ezért ott

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

teljesül. (Alább kiderül, hogy az ebben a környezetben talált megoldások az egész Ω halmazon megoldásai az egyenletnek.) Ez azonban csak úgy állhat fenn, ha a bal oldalon álló mindkét összeadandó állandó. A peremfeltételeket is figyelembe véve tehát az

$$X''(x) = \alpha X(x), \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (20.7)$$

és az

$$Y''(y) = (\lambda - \alpha)Y(y), \quad Y(0) = Y(\pi) = 0 \quad (20.8)$$

peremérték-feladatokat kell megoldanunk. A (20.7) feladatnak csak akkor van megoldása, ha $\alpha = -k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) alakú, és ekkor a $[0, \pi] \ni x \mapsto X_k(x) = C_k \sin(kx)$ ($C_k \in \mathbb{R}$) függvények a megoldások. Hasonlóan, $[0, \pi] \ni y \mapsto Y_l(y) = D_l \sin(ly)$ ($l \in \mathbb{N}, D_l \in \mathbb{R}$). Így tehát a szorzatalakú sajátfüggvények:

$$\Omega \ni (x, y) \mapsto u_{kl}(x, y) := E_{kl} \sin(kx) \sin(ly), \quad (20.9)$$

a hozzájuk tartozó sajátértékek pedig a $-(k^2 + l^2)$ ($k, l \in \mathbb{N}$) alakú számok. Mivel a (20.9) függvények alkalmas E_{kl} együtthatók mellett *teljes ortonormált rendszert* alkotnak, az összes sajátfüggvény előáll ezek végtelen soraként.

20.265. Megoldás (Feladat) Ismeretes (verifikálható), hogy a (9.3) összefüggésből az

$$r^2 \Delta u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r \partial_r (r \partial_r U(r, \varphi)) + \partial_\varphi^2 U(r, \varphi)$$

reláció vezethető le, tehát a Helmholtz-egyenlet az U függvényre nézve:

$$r \partial_r (r \partial_r U(r, \varphi)) + \partial_\varphi^2 U(r, \varphi) = \lambda r^2 U(r, \varphi).$$

A szorzatalakot ebbe az egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$r \Phi(\varphi) (R'(r) + r R''(r)) + R(r) \Phi''(\varphi) = \lambda r^2 R(r) \Phi(\varphi).$$

Innen adódik, hogy

$$\frac{r R'(r) + r^2 R''(r)}{R(r)} - \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

teljesül. Ez azonban csak úgy teljesülhet, ha mindkét oldalon konstans áll. A peremfeltételeket is figyelembe véve tehát meg kell oldanunk a

$$\Phi''(\varphi) = -\alpha \Phi(\varphi), \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0 \quad (20.10)$$

peremérték-feladatot. Ennek megoldásai a $[0, \pi] \ni \varphi \mapsto C_k \cos(k\varphi)$ ($k \in \mathbb{Z}, C_k \in \mathbb{R}$) alakú függvények. A másik tényezőre ezek után a következő egyenlet áll fenn:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - (r^2 + k^2)R(r) = 0 \quad R(1) = 0 \quad (20.11)$$

peremérték-feladatot kell megoldanunk. Bevezetve a $Q(r) := R(r/\sqrt{\lambda})$ függvényt és figyelembe véve α értékét, a $Q(x) := R(x/\sqrt{\lambda})$ függvényre a k -adik Bessel-egyenletet kapjuk:

$$x^2 Q''(x) + xQ'(x) + (x^2 - k^2)Q(x) = 0, \quad (20.12)$$

amelynek két független megoldása az elsőfajú és a másodfajú k -adrendű Bessel-függvény. Általános megoldása ezek lineáris kombinációja, a másodfájúnak 0 nincs az értelmezési tartományában. Hasonlóan, $[0, \pi] \ni y \mapsto Y_k(y) = D_k \sin(lx)$ ($l \in \mathbb{N}, D_k \in \mathbb{R}$). Így tehát a szorzatalakú sajátfüggvények:

$$\Omega \ni (x, y) \mapsto u_{kl}(x, y) := E_{kl} \sin(kx) \sin(ly), \quad (20.13)$$

a hozzájuk tartozó sajátértékek pedig a $k^2 + l^2$, $k, l \in \mathbb{N}$ alakú számok. Mivel az (20.13) függvények alkalmas E_{kl} együtthatók mellett teljes ortonormált rendszert alkotnak, az összes sajátfüggvény előáll ezek végtelen soraként.

20.266. Megoldás (Feladat) Keressük a megoldást ilyen alakban: $u_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k$, ahol az a, b, \dots, k együtthatók valós (vagy akár komplex) számok. Behelyettesítéssel adódik, hogy $c = -3a$ $b = -3d$ $g = -e$, viszont f, h, i és k értéke tetszőleges, tehát az általános harmadrendű polinom-alakú megoldás

$$u_3(x, y) = ax(x^2 - 3y^2) + dy(y^2 - 3x^2) + e(x^2 - y^2) + fxy + hx + iy + k \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2). \quad (20.14)$$

Innen leolvashatók az u_2 másod- és az u_1 elsőfokú megoldások:

$$u_2(x, y) = e(x^2 - y^2) + fxy + hx + iy + k \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$u_1(x, y) = hx + iy + k \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Hasonlóan, tehát együttható-összevetéssel lehet meghatározni polinom-alakú megoldásokat kettőnél több változó esetén is. Jegyezzük meg, hogy ezek a megoldások általában nem szorzatalakúak.

20.267. Megoldás (Feladat) Az (20.14) alak együtthatóit a peremfeltételekből meghatározva ezt a megoldást kapjuk:

$$[0, 3] \times [0, 2] \ni (x, y) \mapsto u(x, y) := -\frac{7}{3}xy + 2x + 4y + 1.$$

A kapott megoldás nyilván nem szorzatalakú.

21. fejezet

Variációszámítás

21.268. Megoldás (Feladat) Nyilvánvaló, hogy $\sup J = 1$, ezt az értéket viszont a megadott függvényhalmaz elemein nem veszi föl.

21.269. Megoldás (Feladat) Itt különösen az lesz tanulságos, hogy az alkalmazandó módszerekhez menet közben számos szigorító feltevést kell tennünk, majd a megoldásról ki fog derülni, hogy egészen általános feltételek mellett is megfelelő. Először is: nyilván csak olyan függvények között kereshetjük a megoldásokat, amelyek csak pozitív értékeket vehetnek fel, vagyis $\forall t \in \mathcal{D}_x \ x(t) > 0$. Ezek körében egyenletünk egyenértékű (azaz azonos megoldásokkal bír) a következővel:

$$-2x\ddot{x} + \dot{x}^2 + 1 = 0.$$

Tegyük fel, hogy a megoldás kétszer folytonosan deriválható, és első két deriváltja sem veszi fel sehol a nulla értéket:

$$x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad \forall t \in \mathcal{D}_x: \dot{x}(t) \neq 0 \quad \text{és} \quad \ddot{x}(t) \neq 0. \quad (21.1)$$

Ekkor a megoldás és deriváltja is invertálható, és létezik olyan $y : \mathcal{R}_{\dot{x}} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amellyel

$$x(t) = y(\dot{x}(t)) \quad (t \in \mathcal{D}_x). \quad (21.2)$$

Tegyük fel, hogy y differenciálható, akkor

$$\dot{x}(t) = y'(\dot{x}(t))\ddot{x}(t) \quad (t \in \mathcal{D}_x), \quad (21.3)$$

ebből a (21.1) feltétel felhasználásával adódik, hogy minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén $y(\dot{x}(t)) \neq 0$. Az eredeti egyenlet (21.3) felhasználásával így írható:

$$-2y(\dot{x}(t))\frac{\dot{x}(t)}{y'(\dot{x}(t))} + \dot{x}^2(t) + 1 = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

amiből viszont $-\dot{x}$ invertálhatósága miatt – kapjuk

$$-2y(\xi) \frac{\xi}{y'(\xi)} + \xi^2 + 1 = 0 \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}),$$

vagyis

$$\frac{y'(\xi)}{y(\xi)} = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}),$$

tehát

$$y(\xi) = a(\xi^2 + 1) \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}, a \in \mathbb{R}^+),$$

következésképpen

$$x(t) = a(\dot{x}^2(t) + 1) \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

ahonnan

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{x(t) - a}{a}} \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

legvégül pedig

$$x(t) = a + \left(\frac{t}{2\sqrt{a}} + c \right)^2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

a (10.1) egyenlet teljes megoldása. Ez az x függvény csak pozitív értékeket vesz föl, de például deriváltja fölveheti a nullát, tehát a levezetés érvényességéhez le kellene szűkíteni.

21.270. Megoldás (Feladat) A 10.269. Feladat (21.1) feltevésével, a (21.2) bevezetésével felhasználva a (21.3) azonosságot:

$$y(\dot{x}(t)) \frac{\dot{x}(t)}{y'(\dot{x}(t))} - \dot{x}^2(t) - 1 = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

amiből viszont $-\dot{x}$ invertálhatósága miatt – kapjuk

$$y(\xi) \frac{\xi}{y'(\xi)} - \xi^2 - 1 = 0 \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}),$$

vagyis

$$2 \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}),$$

tehát

$$y^2(\xi) = a(\xi^2 + 1) \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}, a \in \mathbb{R}^+),$$

következésképpen

$$x^2(t) = a(\dot{x}^2(t) + 1) \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

ahonnan

$$\dot{x}(t) = \frac{\sqrt{x^2(t) - (\sqrt{a})^2}}{\sqrt{a}} \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

legvégül pedig

$$x(t) = \sqrt{a} \operatorname{ch} \left(\frac{t+b}{\sqrt{a}} \right) \quad (t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R})$$

a (10.2) egyenlet teljes megoldása. Ez az x függvény csak pozitív értékeket vesz föl, de például deriváltja fölveheti a nullát, tehát a levezetés érvényességéhez le kellene szűkíteni.

21.271. Megoldás (Feladat) A 10.269. Feladat (21.1) feltevésével, a (21.2) bevezetésével felhasználva a (21.3) azonosságot:

$$2y(\dot{x}(t)) \frac{\dot{x}(t)}{y'(\dot{x}(t))} + \dot{x}^2(t) + 1 = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

amiből viszont $-\dot{x}$ invertálhatósága miatt – kapjuk

$$2y(\xi) \frac{\xi}{y'(\xi)} + \xi^2 + 1 = 0 \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}),$$

vagyis

$$\frac{y'(\xi)}{y(\xi)} = -\frac{2\xi}{\xi^2 + 1} \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}),$$

tehát

$$y(\xi) = \frac{a}{\xi^2 + 1} \quad (\xi \in \mathcal{R}_{\dot{x}}, a \in \mathbb{R}^+),$$

következésképpen

$$x(t) = \frac{a}{\dot{x}^2(t) + 1} \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

ahonnan

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{a - x(t)}{x(t)}} \quad (t \in \mathcal{D}_x),$$

legvégül pedig a következő implicit összefüggést kapjuk a (10.2) egyenlet teljes megoldására

$$\frac{a}{2} \arcsin(1 - 2x(t)/a) + \frac{a\pi}{4} - \sqrt{ax(t) - x^2(t)} = t + b \quad (t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R})$$

Ez az x függvény csak pozitív értékeket vesz föl, azonban a deriváltja miatt föl kell tennünk, hogy minden $t \in \mathcal{D}_x$ esetén $x(t) \neq 0$ és $x(t) \neq a$. A $0 < x(t) < a$ feltételt kielégítő megoldások értelmezési tartománya $\mathcal{D}_x =] - b, a\pi/2[$.

21.272. Megoldás (Feladat) Mivel ez az alapfüggvény nem függ sem az első, sem a második változójától, ezért az Euler–Lagrange-egyenlet így egyszerűsödik:

$$\partial_3 f(t, x(t), \dot{x}(t)) = \text{állandó}, \quad (21.4)$$

azaz esetünkben a következő, még egyszerűbb alakot kapjuk:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 1}} = \text{állandó}.$$

Ennek teljes megoldása:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto x_0(t) := \alpha t + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \quad (21.5)$$

Ugyan alapfüggvényünkre teljesül a regularitás

$$\partial_{33} f(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0 \quad (21.6)$$

feltétele, hiszen $\partial_{33} f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 1/(1 + \dot{x}(t)^2 + 1)^{3/2} > 0$, ez még mindig nem elegendő ahhoz, hogy az extrémálisok (relatív gyenge) minimumot adjanak. A [26] könyv 10.6. Tételét alkalmazva viszont meg tudjuk mutatni, hogy az extrémálisok valóban relatív gyenge minimumot adnak.

- Az alapfüggvény háromszor folytonosan differenciálható.
- Az extrémálisok kétszer folytonosan differenciálhatóak.
- A (21.6) regularitás miatt $\partial_{33} f$ az extrémálisok mentén is szigorúan pozitív.
- Megmutatjuk, hogy az extrémálisok kielégítik az erős Jacobi-feltételt. Ehhez először írjuk föl a Jacobi-féle differenciálegyenletet, amelynek általános alakja:

$$\ddot{\eta}(t) \partial_{33} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + \dot{\eta}(t) \frac{d}{dt} (\partial_{33} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))) + \eta(t) \left(\frac{d}{dt} (\partial_{23} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))) - \partial_{22} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \right) = 0,$$

ami esetünkben $(1 + a^2)\ddot{\eta} = 0$, vagyis $\mathbb{R} \ni t \mapsto \eta(t) = \gamma t + \delta$ ($\gamma, \delta \in \mathbb{R}$). Ha megköveteljük, hogy $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$, akkor az $\mathbb{R} \ni t \mapsto \eta(t) = t$ függvényhez jutunk, amely tetszőleges $b > 0$ szám esetén teljesíti az erős Jacobi-feltételt, mert nincs gyöke a $]0, b]$ intervallumban.

Az

$$\int_0^b \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt$$

funkcionál (a 0 és a b abszcisszájú pontokat összekötő – függvény képeként megadható – görbék ívhossza) tehát az egyenesszakasz esetén relatív gyenge minimumot vesz fel.

21.273. Megoldás (Feladat) A 10.272. Feladat megoldási módszerét követve most az $\ddot{x} = x$ Euler–Lagrange-egyenletet kapjuk vagy integrálva $\dot{x}^2(t) + x^2(t) = \text{állandó}$. Ennek teljes megoldása

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) := a \cos(t) + b \sin(t) \quad (a, b \in \mathbb{R}). \quad (21.7)$$

A probléma reguláris, hiszen $\partial_{33}f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 1 > 0$. Az alapfüggvény háromszor folytonosan differenciálható, az extrémálisok kétszer folytonosan differenciálhatóak. A Jacobi-féle differenciálegyenlet ebben az esetben $\ddot{\eta} + \eta = 0$, s ennek az $\eta(a) = 0, \dot{\eta} = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbb{R} \ni t \mapsto -\sin(a - t)$, amelyik nem tűnik el az $]a, a + \pi - \varepsilon]$ intervallumon, ahol $0 < \varepsilon < \pi$, tehát egy ilyen intervallumon teljesül az erős Jacobi-feltétel, így a [26] 10.6. Tétel miatt az (21.7) extrémálisok az

$$\int_a^{a+\pi-\varepsilon} 1/2(\dot{x}(t)^2 - x(t)^2) dt$$

integrál relatív gyenge minimumát adják.

21.274. Megoldás (Feladat) Most az Euler–Lagrange-egyenlet $\dot{x}(t)(2t\ddot{x} + \dot{x}(t)) = 0$, ennek megoldásai

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) := \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad \mathbb{R}^\pm \ni t \mapsto x(t) := \alpha\sqrt{\pm t} + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\partial_{33}f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 6t\dot{x}$, a probléma csak bizonyos tartományon értelmezett bizonyos függvények körében reguláris. Az alapfüggvény háromszor folytonosan differenciálható, az extrémálisok kétszer folytonosan differenciálhatóak. A Jacobi-féle differenciálegyenlet ebben az esetben az állandótól különböző megoldásokon

$$\alpha t \ddot{\eta}(t) + \alpha/2 \dot{\eta}(t) = 0,$$

s ennek az $\eta(a) = 0, \dot{\eta} = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto 2(\sqrt{at} - a)$, amelyik nem tűnik el az $]a, b]$ intervallumon, ahol $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges, tehát egy ilyen intervallumon teljesül az erős Jacobi-feltétel, így a [26] 10.6. Tétel miatt az $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto x(t) := \alpha\sqrt{t} + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) extrémálisok az

$$\int_a^b \dot{x}(t)(t\dot{x}(t)^2 - 3x(t)) dt$$

integrál relatív gyenge minimumát adják.

21.275. Megoldás (Feladat)

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= -\frac{\dot{x} \ln(y)}{2x^2} - \frac{\dot{y}}{2xy} - \frac{b}{x} + c, \\ \frac{d}{dt}(\partial_2 f(x, \dot{x}, y, \dot{y})) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\ln(y)}{2x}\right) = \frac{\dot{y}}{2xy} - \frac{\dot{x} \ln y}{2x^2}, \\ \partial_3 f(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= -\frac{\dot{x}}{2xy} - \frac{\dot{y} \ln(x)}{2y^2} - \frac{a}{y} + d, \\ \frac{d}{dt}(\partial_4 f(x, \dot{x}, y, \dot{y})) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\ln(x)}{2y}\right) = -\frac{\dot{x}}{2xy} + \frac{\dot{y} \ln x}{2y^2}.\end{aligned}$$

A fentiek összevetésével

$$\begin{aligned}-\frac{\dot{x} \ln(y)}{2x^2} - \frac{\dot{y}}{2xy} - \frac{b}{x} + c &= \frac{\dot{y}}{xy} - \frac{\dot{x} \ln(y)}{2x^2}, \\ \frac{\dot{x}}{2xy} - \frac{\dot{y} \ln(x)}{2y^2} - \frac{a}{y} + d &= -\frac{\dot{x}}{2xy} + \frac{\dot{y} \ln(x)}{2y^2},\end{aligned}$$

vagyis $c - b/x = \dot{y}/(xy)$, $\dot{x}/(xy) = a/y - d$, amiből következik (10.4).

21.276. Megoldás (Feladat) A funkcionálhoz tartozó alapfüggvény legyen:

$$]0, T[\times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ni (t, K, P) \mapsto f(t, K, P) := (bK - P - C^*)^2,$$

ennek parciális deriváltjai:

$$\partial_2 f(t, K, P) = 2b(bK - P - C^*), \quad \partial_3 f(t, K, P) = -2(bK - P - C^*),$$

ezért $t \mapsto \partial_3(t, K(t), \dot{K}(t)) = -2(b\dot{K} - \ddot{K})$. Így a

$$-bC^* = \ddot{K}(t) - b^2 K(t) \quad (21.8)$$

Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet most másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet. A homogén egyenlet megoldásai

$$K_1(t) = e^{bt}, \quad K_2(t) = e^{-bt} \quad (t \in]0, T[).$$

A (21.8) egyenlet egy partikuláris megoldása a $t \mapsto K_0(t) = C^*/b$ konstans függvény. Így a (21.8) egyenlet általános megoldása

$$K(t) = \frac{C^*}{b} + c_1 e^{bt} + c_2 e^{-bt} \quad (t \in]0, T[),$$

ahonnan $C(t) = C^* + 2c_2 e^{-bt}$ ($t \in]0, T[$). Feltehető, hogy a $C_0 := C(0)$ mennyiséget ismerjük, amivel $C(t) = C^* + (C_0 - C^*)e^{-bt}$ ($t \in]0, T[$).

A Jacobi-egyenlet: $2\ddot{\eta} - 2b^2\eta = 0$, ennek az $\eta(0) = 0$ és $\dot{\eta}(0) = 1$ feltételt kielégítő megoldása: $t \mapsto \sin(bt)/b$, ami kielégíti az erős Jacobi-feltételt, tehát a fenti C függvény valóban maximum.

22. fejezet

Közelítő megoldások

22.277. Megoldás (Feladat) Legyen $x_0(t) := 1$ és az $x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t (2x_k(s) - s) ds$ iterációt kell elvégeznünk (22.1. ábra):

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t (2 - s) ds = 1 + 2t - \frac{1}{2}t^2,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (2 + 3s - s^2) ds = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3,$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left(2 + 3s + 3s^2 - \frac{2}{3}s^3 \right) ds = 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + t^3 - \frac{1}{6}t^4.$$

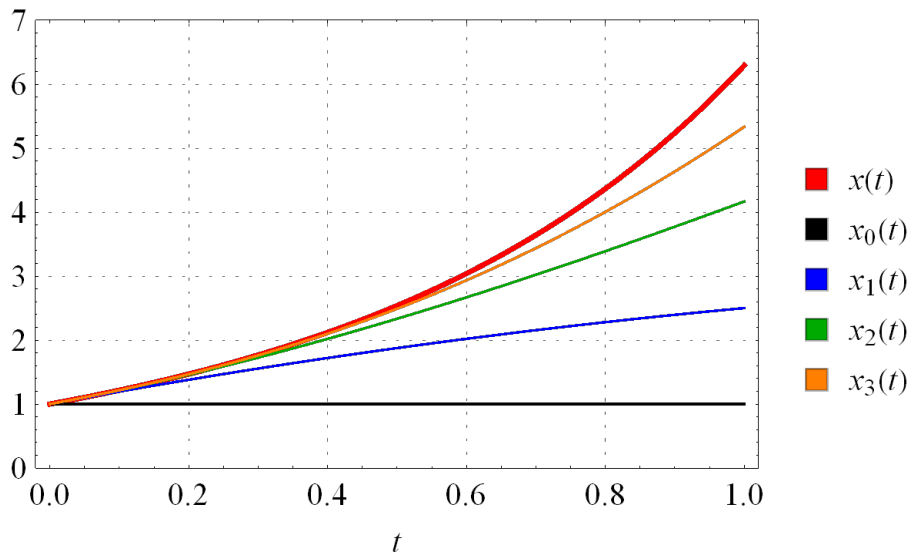
22.278. Megoldás (Feladat) Legyen $x_0(t) := 1$ és az $x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t x_k(s)(3 - x_k(s)) ds$ iterációt kell elvégeznünk (22.2. ábra):

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t 2 ds = 1 + 2t,$$

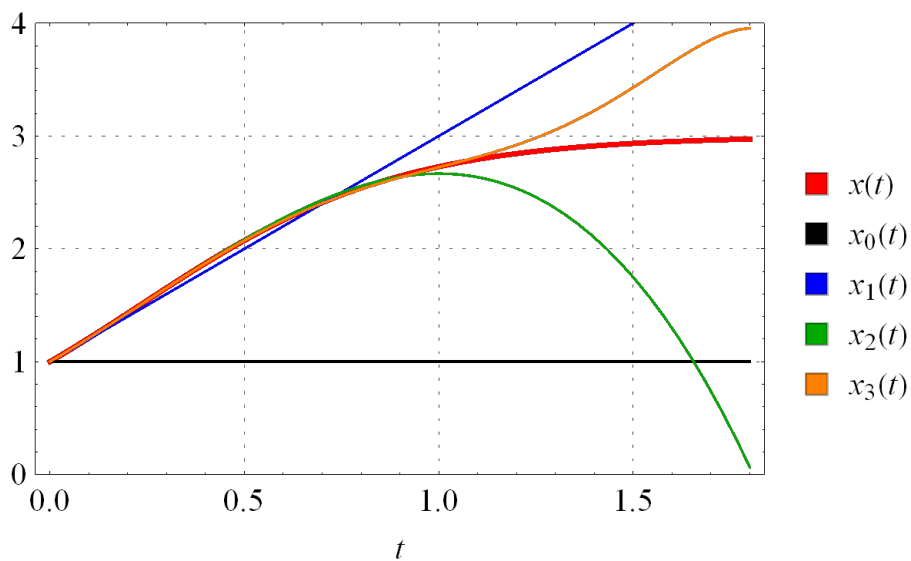
$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (2 + 2s - 4s^2) ds = 1 + 2t + t^2 - \frac{4}{3}t^3,$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(2 + 2s - 3s^2 - \frac{16}{3}s^3 + \frac{13}{3}s^4 + \frac{8}{3}s^5 - \frac{16}{9}s^6 \right) ds \\ &= 1 + 2t + t^2 - t^3 - \frac{4}{3}t^4 + \frac{13}{15}t^5 + \frac{4}{9}t^6 - \frac{16}{63}t^7. \end{aligned}$$

22.279. Megoldás (Feladat) Legyen $x_0(t) := 0$ és az $x_{k+1}(t) = \int_0^t (-x_k(s) +$



22.1. ábra. A pontos megoldás és a közelítő megoldások (fokozatos közelítés)



22.2. ábra. A pontos megoldás és a közelítő megoldások (fokozatos közelítés)

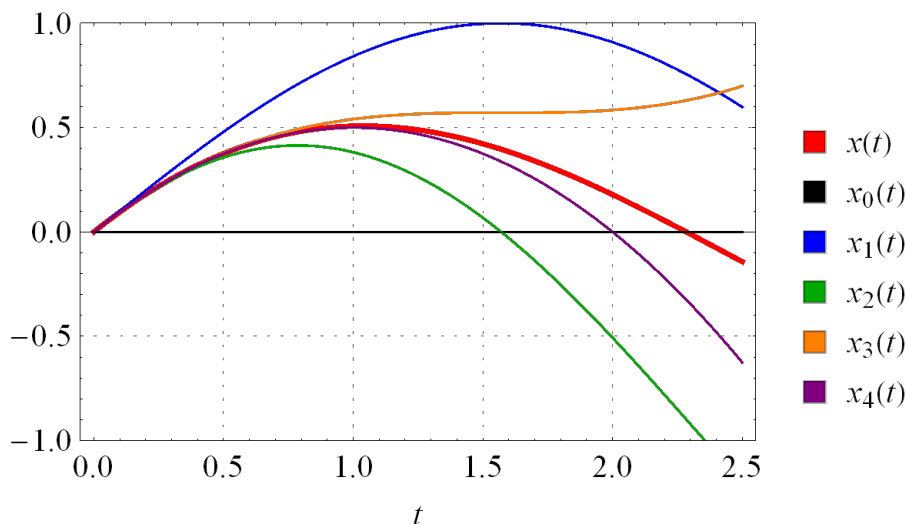
$\cos(s)$) ds iterációt kell elvégeznünk (22.3. ábra):

$$x_1(t) = \int_0^t \cos(s) \, ds = \sin(t),$$

$$x_2(t) = \int_0^t (-\sin(s) + \cos(s)) \, ds = \cos(t) + \sin(t) - 1,$$

$$x_3(t) = \int_0^t (1 - \sin(s)) \, ds = -1 + t + \cos(t),$$

$$x_4(t) = \int_0^t (1 - t) \, ds = t - \frac{1}{2}t^2$$



22.3. ábra. A pontos megoldás és a közelítő megoldások (fokozatos közelítés)

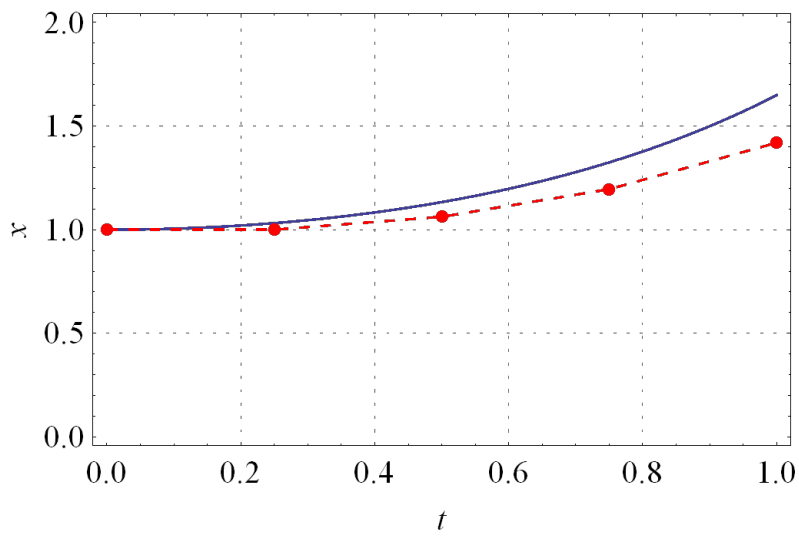
22.280. Megoldás (Feladat) Az alkalmazandó iteráció $x_{k+1} = x_k + h \cdot t_k x_k = (1+h^2 k)x_k$, ahol $x_0 = 1$, $t_0 = 0$. A numerikus eredmények a 22.1. táblázatban találhatóak, a 22.4. ábrán pedig a pontos megoldás grafikonja (kék, folytonos) és az Euler-féle töröttvonal (piros, szaggatott) látható.

k	0	1	2	3	4
t_k	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000
x_k	1.000	1.000	1.062	1.195	1.419

22.1. táblázat. Numerikus eredmények

22.281. Megoldás (Feladat) Az alkalmazandó iteráció $x_{k+1} = x_k + h \cdot 3x_k(1 - x_k)$, ahol $x_0 = 0.1$, $t_0 = 0$. A numerikus eredmények a 22.2. táblázatban találhatóak, a 22.5. ábrán pedig a pontos megoldás grafikonja (kék, folytonos) és az Euler-féle töröttvonal (piros, szaggatott) látható.

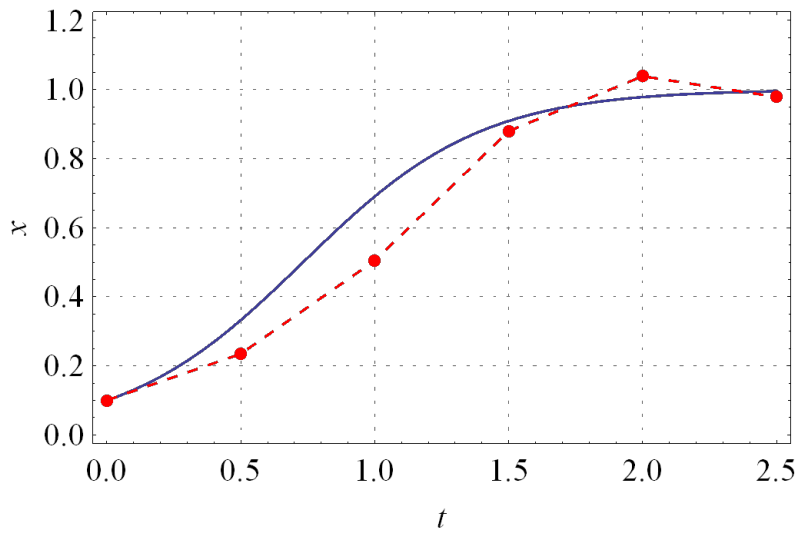
22.282. Megoldás (Feladat) Az alkalmazandó iteráció $x_{k+1} = x_k + h \cdot (-2x_k + 4) = (1 - 2h)x_k + 4h$, ahol $x_0 = 0$, $t_0 = 0$. A numerikus eredmények a 22.3. táblázatban találhatóak, a 22.6. ábrán pedig a pontos megoldás grafikonja (kék, folytonos) és az Euler-féle töröttvonal (piros, szaggatott) látható.



22.4. ábra. A pontos és a közelítő megoldás (Euler-féle töröttvonal)

k	0	1	2	3	4	5
t_k	0.000	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500
x_k	0.100	0.235	0.505	0.880	1.038	0.979

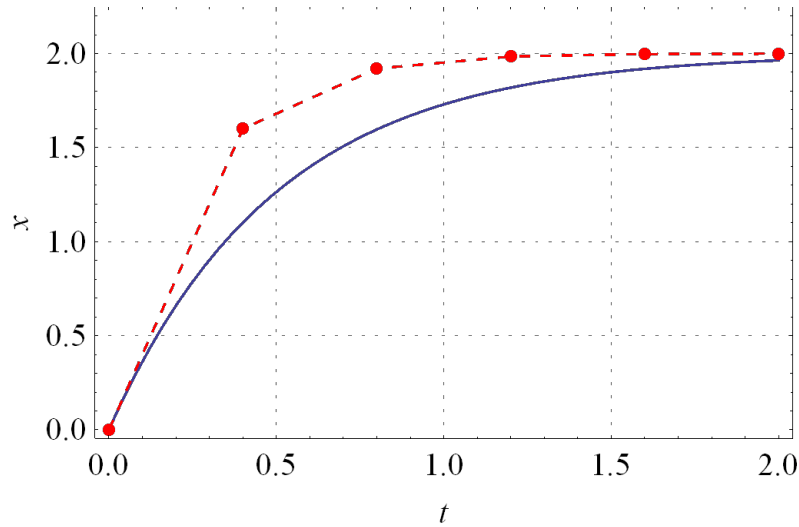
22.2. táblázat. Numerikus eredmények



22.5. ábra. A pontos és a közelítő megoldás (Euler-féle töröttvonal).

k	0	1	2	3	4	5
t_k	0.000	0.400	0.800	1.200	1.600	2.000
x_k	0.000	1.600	1.920	1.984	1.997	1.999

22.3. táblázat. Numerikus eredmények

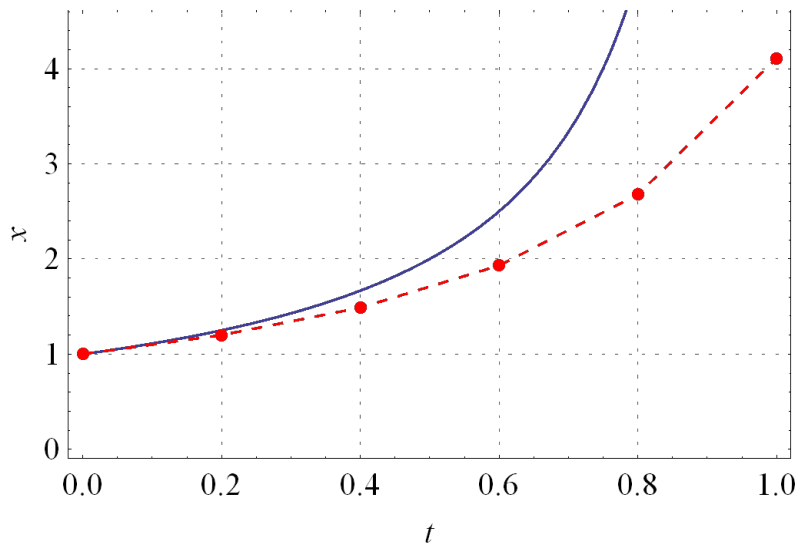


22.6. ábra. A pontos és a közelítő megoldás (Euler-féle töröttvonal).

22.283. Megoldás (Feladat) Az alkalmazandó iteráció $x_{k+1} = x_k + h \cdot x_k^2 = hx_k(1 + x_k)$, ahol $x_0 = 1$. A numerikus eredmények a 22.4. táblázatban találhatóak, a 22.7. ábrán pedig a pontos megoldás grafikonja (kék, folytonos) és az Euler-féle töröttvonal (piros, szaggatott) látható.

k	0	1	2	3	4	5
t_k	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
x_k	1.000	1.200	1.488	1.931	2.676	4.109

22.4. táblázat. Numerikus eredmények



22.7. ábra. A pontos és a közelítő megoldás (Euler-féle töröttvonal)

22.284. Megoldás (Feladat) Az egyenlet többszöri deriválásával:

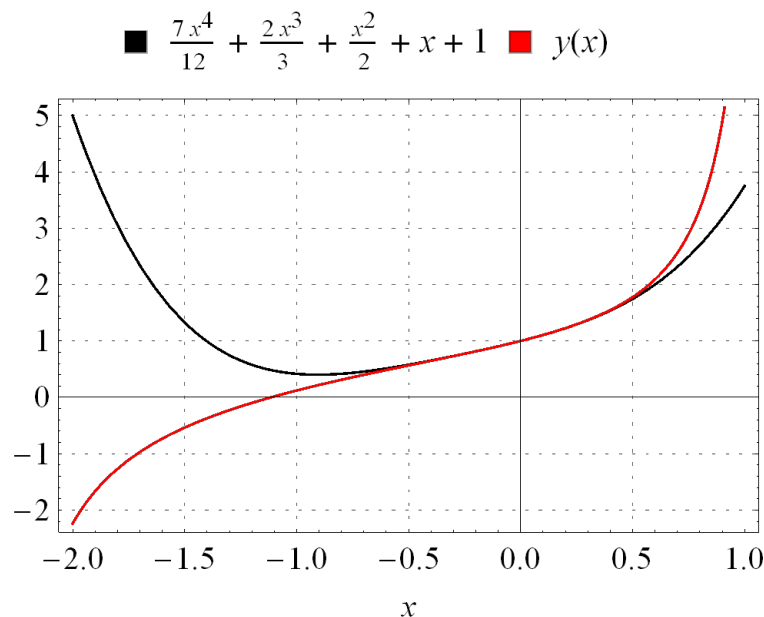
$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x)^2 - x, \\y''(x) &= 2y(x)y'(x) - 1, \\y^{(3)}(x) &= 2y(x)y''(x) + 2y'(x)^2, \\y^{(4)}(x) &= 2y(x)y^{(3)}(x) + 6y'(x)y''(x).\end{aligned}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve az $x = 0$ helyettesítés után: $c_1 = c_0^2$, $c_2 = 2c_0c_1 - 1$, $c_3 = 2c_1^2 + 2c_0c_2$, $c_4 = 6c_1c_2 + 2c_0c_3$. Számszerűen: $c_0 = c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 4$ és $c_4 = 14$, vagyis (22.8. ábra)

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \dots$$

22.285. Megoldás (Feladat) Az egyenlet többszöri deriválásával:

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x) + e^{y(x)}, \\y''(x) &= e^{y(x)}y'(x) + y'(x), \\y^{(3)}(x) &= e^{y(x)}y''(x) + y''(x) + e^{y(x)}y'(x)^2, \\y^{(4)}(x) &= e^{y(x)}y^{(3)}(x) + y^{(3)}(x) + e^{y(x)}y'(x)^3 + 3e^{y(x)}y'(x)y''(x).\end{aligned}$$



22.8. ábra. A pontos és közelítő megoldás (Taylor-polinom)

A kezdeti értéket figyelembe véve az $x = 0$ helyettesítés után: $c_1 = c_0 + e^{c_0}$, $c_2 = e^{c_0}c_1 + c_1$, $c_3 = e^{c_0}(c_1^2 + c_2) + c_2$, $c_4 = e^{c_0}(c_1^3 + 3c_2c_1 + c_3) + c_3$. Számszerűen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$ és $c_4 = 17$, vagyis (22.9. ábra)

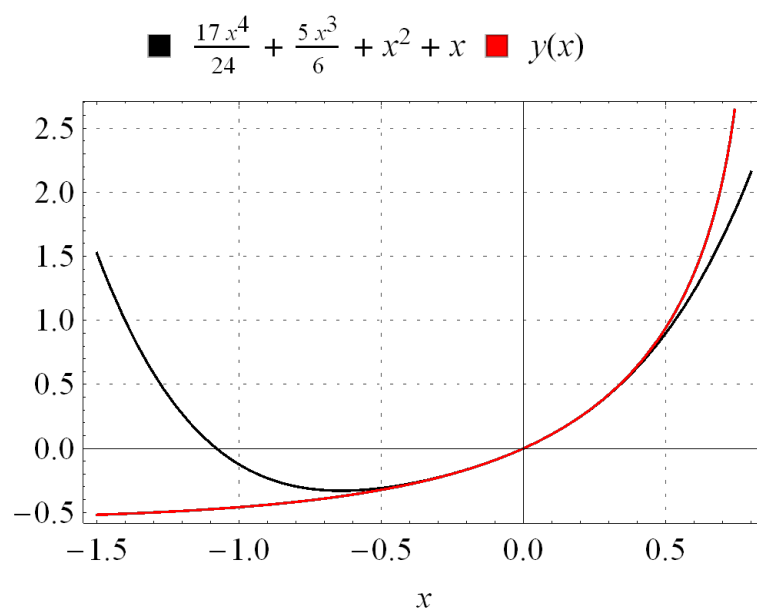
$$y(x) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{24}x^4 + \dots$$

22.286. Megoldás (Feladat) Az egyenlet többszöri deriválásával:

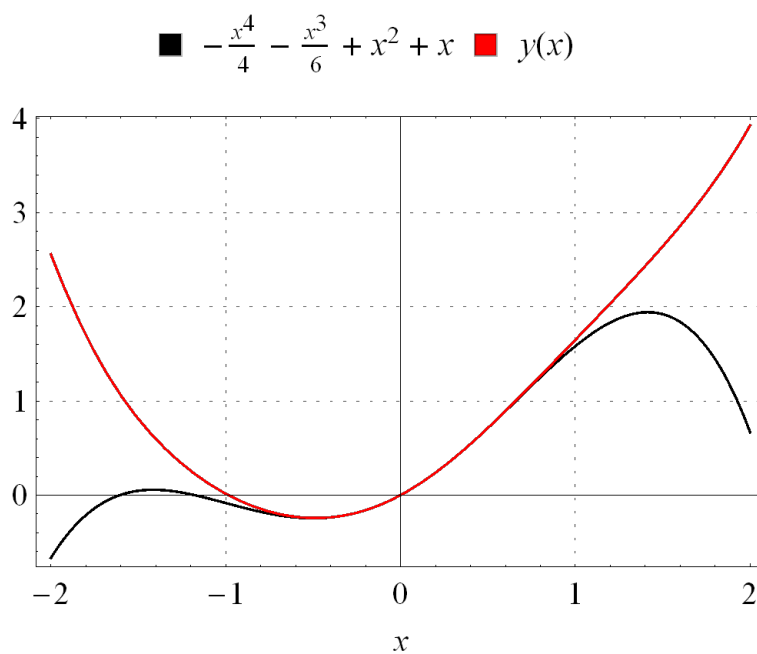
$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos(y(x)) + 2x, \\ y''(x) &= 2 - y'(x) \sin(y(x)), \\ y^{(3)}(x) &= -y'(x)^2 \cos(y(x)) + y''(x) \sin(y(x)), \\ y^{(4)}(x) &= \sin(y(x))(y'(x)^3 - y^{(3)}(x)) - 3y'(x)y''(x) \cos(y(x)). \end{aligned}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve az $x = 0$ helyettesítés után: $c_1 = \cos(c_0)$, $c_2 = 2 - c_1 \sin(c_0)$, $c_3 = c_1^2(-\cos(c_0)) - c_2 \sin(c_0)$, $c_4 = c_1^3 \sin(c_0) - c_3 \sin(c_0) - 3c_2c_1 \cos(c_0)$. Számszerűen: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1$ és $c_4 = -6$, vagyis (22.10. ábra)

$$y(x) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$



22.9. ábra. A pontos és közelítő megoldás (Taylor-polinom)



22.10. ábra. A pontos és közelítő megoldás (Taylor-polinom)

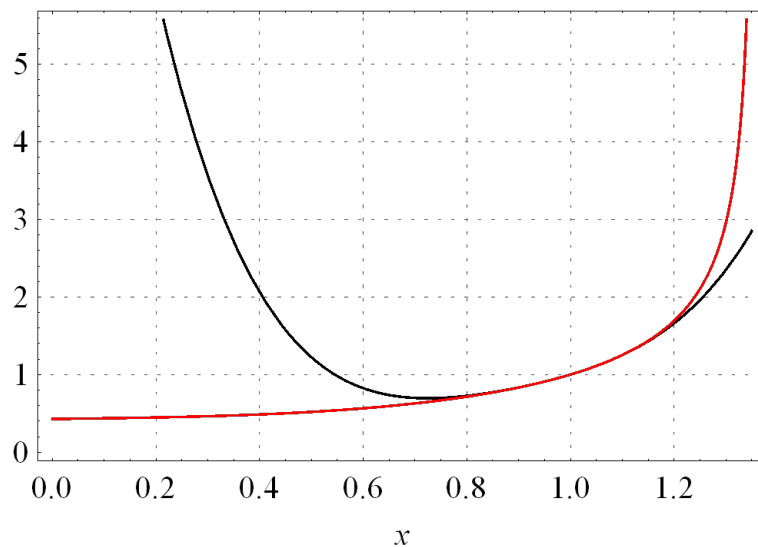
22.287. Megoldás (Feladat) Az egyenlet többszöri deriválásával:

$$\begin{aligned}y'(x) &= x^2 + y(x)^3, \\y''(x) &= 3y(x)^2 y'(x) + 2x, \\y^{(3)}(x) &= 3y(x)^2 y''(x) + 6y(x) y'(x)^2 + 2, \\y^{(4)}(x) &= 3y(x)^2 y^{(3)}(x) + 6y'(x)^3 + 18y(x) y'(x) y''(x).\end{aligned}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve az $x = 1$ helyettesítés után: $c_1 = c_0^3 + 1$, $c_2 = 3c_1 c_0^2 + 2$, $c_3 = 3c_2 c_0^2 + 6c_1^2 c_0 + 2$, $c_4 = 6c_1^3 + 18c_0 c_2 c_1 + 3c_0^2 c_3$. Számszerűen: $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 8$, $c_3 = 50$ és $c_4 = 486$, vagyis (22.11. ábra)

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + \frac{25}{3}(x-1)^3 + \frac{81}{4}(x-1)^4 + \dots$$

$$\blacksquare \frac{81}{4} (x-1)^4 + \frac{25}{3} (x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \quad \blacksquare y(x)$$



22.11. ábra. A pontos és közelítő megoldás (Taylor-polinom)

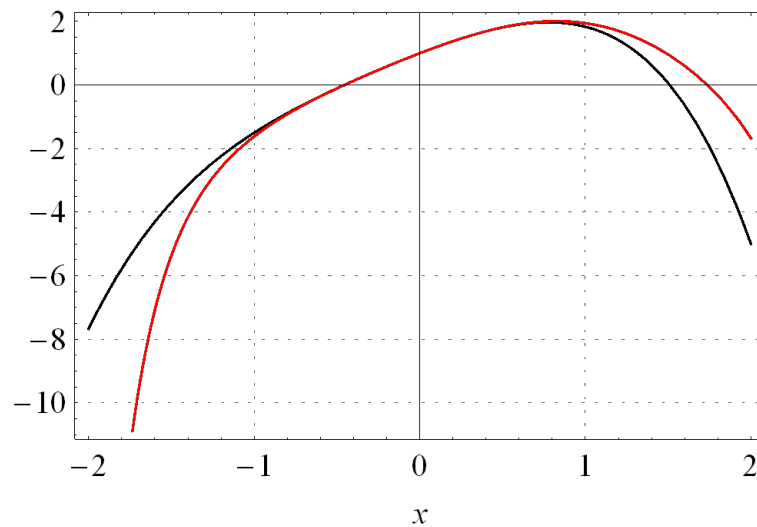
22.288. Megoldás (Feladat) Az egyenlet többszöri deriválásával:

$$\begin{aligned}y''(x) &= xy'(x) - y(x)^2, \\y^{(3)}(x) &= xy''(x) - 2y(x)y'(x) + y'(x), \\y^{(4)}(x) &= xy^{(3)}(x) - 2y(x)y''(x) + 2y''(x) - 2y'(x)^2.\end{aligned}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve az $x = 0$ helyettesítés után: $c_2 = -c_0^2$, $c_3 = c_1 - 2c_0c_1$, $c_4 = -2c_1^2 - 2c_0c_2 + 2c_2$. Számszerűen: $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = -2$ és $c_4 = -8$, vagyis (22.12. ábra)

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \dots$$

$$\blacksquare -\frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 1 \quad \blacksquare y(x)$$



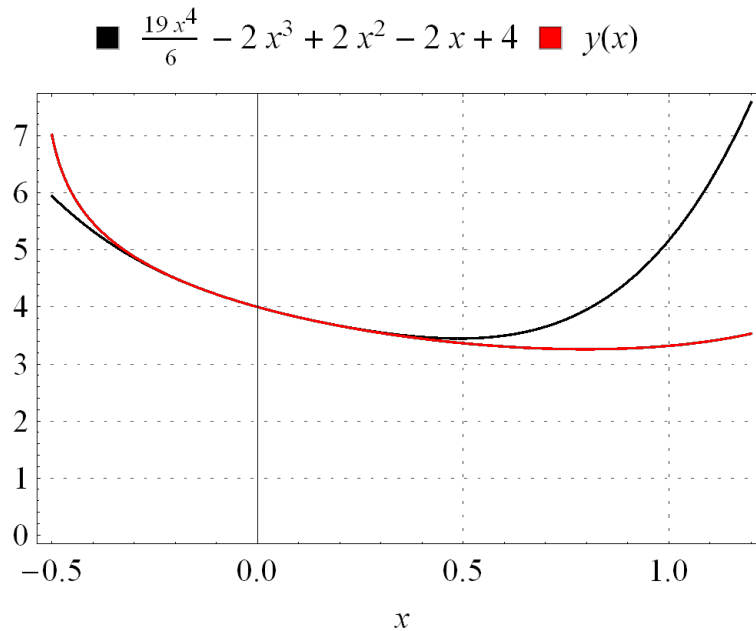
22.12. ábra. A pontos és közelítő megoldás (Taylor-polinom)

22.289. Megoldás (Feladat) Az egyenlet többszöri deriválásával:

$$\begin{aligned} y''(x) &= y'(x)^2 + xy(x), \\ y^{(3)}(x) &= xy'(x) + 2y'(x)y''(x) + y(x), \\ y^{(4)}(x) &= 2y''(x)^2 + xy''(x) + 2y'(x) + 2y^{(3)}(x)y'(x). \end{aligned}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve az $x = 0$ helyettesítés után: $c_2 = c_1^2$, $c_3 = c_0 + 2c_1c_2$, $c_4 = 2c_2^2 + 2c_1 + 2c_1c_3$. Számszerűen: $c_0 = 4$, $c_1 = -2$, $c_2 = 4$, $c_3 = -12$, $c_4 = 76$, vagyis (22.13. ábra)

$$y(x) = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \dots$$



22.13. ábra. A pontos és közelítő megoldás (Taylor-polinom)

22.290. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+3)(n+4)a_{n+4} - a_n) x^{n+2} = 0, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)} \quad (n \geq 4).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 + \dots, \quad y_1(x) = x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{1440}x^9 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.291. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\ &= 2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n+2)a_n) x^n = 0, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = a_0, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{n-1} \quad (n \geq 2).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \dots, \quad y_1(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.292. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 - 2a_0 + (6a_3 - 6a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 + 3n + 2)a_n) x^n = 0, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = a_0, \quad a_3 = a_1, \quad a_n = a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots, \quad y_1(x) = x + x^3 + x^5 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.293. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned}
 & (1+x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 5x \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 5na_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= 2a_2 + 3a_0 + (6a_3 + 8a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} + (n^2 + 4n + 3)a_n)x^n = 0,
 \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = \frac{-3}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{4}{3}a_1, \quad a_n = -\frac{n+1}{n}a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^4 + \dots, \quad y_1(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{5}x^5 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.294. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned}
 & (1-x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= 2a_2 - 2a_1 + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 + 3n + 2)a_{n+1})x^n = 0,
 \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2}a_0, \quad a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} \quad (n \geq 2).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \dots, \quad y_1(x) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.295. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - x + 1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (4x - 2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\
 &= 2(a_2 - a_1 + a_0) + 6(a_3 - a_2 + a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 + 3n + 2)a_{n+1})x^n = 0,
 \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = a_1 - a_0, \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 - x^2 - x^3 + x^5 + \dots, \quad y_1(x) = x + x^2 - x^4 - x^5 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.296. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
 &= 2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+3)a_{n+3} - (n+1)a_{n+1} + a_n)x^{n+1} = 0,
 \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_2 = 0, \quad a_n = \frac{n-2}{n(n-1)}a_{n-2} - \frac{1}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n \geq 3).$$

A két lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \dots, \quad y_1(x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \dots,$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$.

22.297. Megoldás (Feladat) A behelyettesítés után

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} - x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x-2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= 6a_3 - 2a_1 + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3} - (n^2 + 3n + 2)a_{n+1} + (n+1)a_n) x^n,
 \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy:

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_0, \quad a_n = -\frac{1}{n(n-1)}a_{n-3} + \frac{1}{n}a_{n-2} \quad (n \geq 4).$$

A három lineárisan független megoldás így:

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots, \quad y_1(x) = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \dots, \quad y_2(x) = x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \dots$$

amivel $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$.

Irodalomjegyzék

- [1] Bege A.: Differenciálegyenletek: gyakorlatok és feladatok, Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2008.
- [2] Farkas M. (szerk.): Matematika VIII. Differenciálegyenletek, Műegyetem Kiadó, Budapest, 1988.
- [3] Farkas Miklósné: Közönséges differenciálegyenletek, (Egyetemi jegyzet: BME VIK), Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [4] Filippov, A. F.: Differenciálegyenletek. Példatár, (Kézirat), Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [5] Hale, J.K., Kocak, H.: Dynamics and bifurcations, Springer, 1991.
- [6] Hatvani L., Krisztin T., Makay G.: Dinamikus modellek a közgazdaságban, Polygon, Szeged, 2001.
- [7] Horváth Z.: Bevezetés a differenciálegyenletek megoldásába, NOVADAT, Győr, 1994.
- [8] Hubbard, J.H., West, B.H., Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Springer, 1995.
- [9] Kósa A., Schipp F., Szabó D.: Közönséges differenciálegyenletek, (Kézirat), Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- [10] Kósa A.: Matematika VIII. Differenciálegyenletek (Fogalmak, eredmények, példák), GATE MGK MSZI, Gödöllő, 1992.
- [11] Kósa A.: Variációszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [12] Krasnov, M. L.: Ordinary differential equations, Mir Publisher, Moscow, 1987.
- [13] Matvejev N. M.: Közönséges differenciálegyenletek. Feladatgyűjtemény. (7. kiadás), Lan Publishing, Szentpétervár, 2002.

- [14] Móczár J., Márkus F.: Lie-szimmetriák egy közgazdasági alkalmazása, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 28, 2011, pp. 77–93.
- [15] Perko, L., *Differential Equations And Dynamical Systems*, Springer, 2008.
- [16] Petrovszickj, I. G.: *Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- [17] Ponomarjov, K. K.: *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. (Gyakorlati feladatok)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [18] Pontrjagin, L. Sz.: *Közönséges differenciálegyenletek*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [19] Reinhardt, F.; Soeder, H.: *Differenciálegyenletek*, In: *SH Atlasz Matematika*, Springer Verlag, Budapest, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hing Kong, Barcelona, 1993, pp. 354–373.
- [20] Sárközi P.: *A differenciálegyenletek elméletének elemei, (A pannonhalmi főiskola könyvei; 1.)*, Pannonhalma, 1932.
- [21] Simon L., Baderko, E. A.: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [22] Sztjepanov, V. V.: *A differenciálegyenletek tankönyve*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [23] Suták J.: *A differenciálegyenletek elmélete*, Athaneum Nyomda, Budapest, 1906.
- [24] Tallós P.: *Dinamikai rendszerek alapjai*, Aula, Budapest, 1999.
- [25] Terkéki J.: *Differenciálegyenletek*, Polygon, Szeged, 1997.
- [26] Tóth J., Simon L. P.: *Differenciálegyenletek. (Bevezetés az elméletbe és alkalmazásokba)*, TYPOT_EX Kiadó, 2005, 2009.