Véges testek és alkalmazásaik / 2006 ősz / Küronya Alex

3. Házi feladat

1. Legyen K egy végtelen test, $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ egy nemnulla polinom. Mutassuk meg, hogy f mint $\mathbb{A}(K)$-en értelmezett függvény nem azonosan nulla.

2. Tekintsük az $n \times n$-es $\mathbb{F}_q$ feletti 1 determinánsú mátrixok $SL(n, \mathbb{F}_q)$ csoportját, mint $\mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{F}_q)$ egy részhalmazát. Igazoljuk, hogy $SL(n, \mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{F}_q)$ egy hiperfelület, és adjuk meg az $\mathbb{F}_q$ feletti pontjainak számát.

3. * (Euler-formula) Jelöljön K egy tetszőleges testet, legyen $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tetszőleges m-edfokú homogén polinom. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = m \cdot f \ .$$

4. Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{F}_2$ feletti kétváltozós homogén harmadfokú polinomnak van nemtriviális nullhelye.

5. (Véges Fourier-transzformált) Legyen $\mathbb{F}_q$ egy véges test, $f : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ tetszőleges függvény. jelölje

$$\hat{f}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q} \cdot \sum_{t \in \mathbb{F}_q} f(t)\overline{\psi(st)} \ ,$$

ahol $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ a $\psi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)}$ függvény. Igazoljuk, hogy

$$f(t) = \sum_{t \in \mathbb{F}_1} \hat{f}(s)\psi(st) \ .$$

6. Legyen K tetszőleges test, $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ideál. Mutassuk meg hogy egy $h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ polinomra $h \in \mathrm{Rad}(I)$ pontosan akkor, ha $1 \in (I, 1 - yh) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n, y]$.

7. * Legyen p prím, n természetes szám, amelyre $n | p-1$. Ekkor

$$N(x^n = a) = \sum \chi(a) \ ,$$

ahol az összegzés az összes olyan χ karakteren fut végig, amelyeknek a rendje osztja n-t.