Véges testek és alkalmazásaik / 2006 ősz / Küronya Alex

4. Házi feladat

1. Legyen $\mathbb{F}_q$ véges test, $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ olyan polinom, amelyenk a foka minden változóban kisebb, mint q. Igazoljuk, hogy ha $f = 0$ mint $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)$-en értelmezett fügvvények, akkor f a nulla polinom.

2. Egy $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot *redukált*nak hívunk, ha minden $1 \leq i \leq n$ esetén $\deg_i(f) < q$. Mutassuk meg, hogy minden $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ polinomhoz egyértelműen létezik olyan $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ redukált polinom, amelyre $f = g$ mint $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q)$-n értelmezett függvények.

3. ** Bizonyítsuk be a Chevalley–Warning-tétel alábbi formáját: legyen $\mathbb{F}_q$ véges test, $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$. Ha minden $1 \leq i \leq k$-ra $f_i(0) = 0$, és

$$n > \sum_{i=1}^{k} \deg(f_i) \ ,$$

akkor az $f_1, \ldots, f_k$ polinomoknak legalább 2 nullhelye van $\mathbb{F}_q$ felett.

4. $\circ$ Legyen $\chi \in \mathrm{Char}(\mathbb{F}_q)$ egy multiplikatív karakter, $a \in \mathbb{F}_q$. Mutassuk meg, hogy
   (1) $\chi(1) = 1$,
   (2) $\chi(a)$ $(q-1)$-edik egységgyök,
   (3) $\chi(a^{-1}) = \chi(a)^{-1} = \overline{\chi(a)}$.

5. * Ha $a \in \mathbb{F}_q^{\times}$, $a \neq 1$, akkor $\sum_{\chi \in \mathrm{Char}(\mathbb{F}_q)} \chi(a) = 0$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\chi_1, \ldots, \chi_r$ mind ϵ-tól különböző karakterek, amelyekre $\chi_1 \cdot \ldots \cdot \chi_r = \epsilon$, akkor

$$g(\chi_1) \cdot \ldots \cdot g(\chi_r) \ = \ \chi_r(-1) \cdot J(\chi_1, \ldots, \chi_r) \ .$$

7. * Legyenek $\chi_1, \ldots, \chi_r$ mind ϵ-tól különböző karakterek, $\chi_1 \cdot \ldots \cdot \chi_r = \epsilon$. Igazoljuk, hogy

$$J(\chi_1, \ldots, \chi_r) \ = \ -\chi_r(-1) \cdot J(\chi_1, \ldots, \chi_r) \ ,$$

ahol $J(\chi_1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1$.

8. Legyen p tetszőleges prímszám, a, b, c egészek. Számítsuk ki az alábbi, Legendre-szimbólumokból álló összegeket:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{i}{p}\right) \ , \ \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{ai+b}{p}\right) \ , \ \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{i^2+ai+b}{p}\right) \ .$$

9. Tetszőleges p prímszám esetén legyen n olyan egész, amelyre $p \equiv 1 \pmod{n}$, χ az $\mathbb{F}_p$ test egy n-edrendű karaktere. Mutassuk meg, hogy $g(\chi)^n \in \mathbb{Z}[\zeta]$, ahol $\zeta = e^{2\pi i n}$.