Véges testek és alkalmazásaik / 2006 ősz / Küronya Alex

5. Házi feladat

Minden gyűrű kommutatív egységelemes.

Definíció: Legyen B kommutatív gyűrű, $A \subseteq B$ részgyűrű (beleértve, hogy $1_B = 1_A$). Azt mondjuk, hogy egy $b \in B$ elem *egész* A felett, ha teljesít egy

$$b^k + a_1 b^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

egyenletet, ahol $a_i \in A$ minden i-re; továbbá B-t *egész*nek hívjuk A felett, ha minden $b \in B$ egész A felett.

1. Az iménti jelölésekkel mutassuk meg, hogy B pontosan akkor lesz végesen generált A-modulus, ha végesen generált A-algebra, és egész A felett.

2. Legyen $A \subseteq B \subseteq C$ részgyűrűk egy sorozata. Igazoljuk, hogy ha B egész A felett, C egész B felett, akkor C egész A felett is.

3. * (Nakayama-lemma) Legyen M egy végesen generált modulus az A gyűrű felett, $I \subseteq A$ tetszőleges ideál. Tegyük fel, hogy minden $a \in 1 + I$ elem esetén ha $aM = 0$, akkor $M = 0$ is egyben. Bizonyítsuk be, hogy ha $IM = M$, akkor $M = 0$.

4. Legyenek $A \subseteq B$ gyűrűk úgy, hogy B véges A-modulus, legyen továbbá $I \subseteq A$ tetszőleges ideál. Mutassuk meg, hogy ha $I \neq A$, akkor $IB \neq B$.

Definíció: Egy A integritási tartomány *normális*, ha a hányadostestjének minden eleme egész A felett.

5. * Legyenek A normális K hányadostesttel, L/K véges algebrai bővítés. Igazoljuk, hogy egy $u \in L$ elem pontosan akkor egész A felett, ha a K feletti minimálpolinomjának együtthatói mind A-beliek.

6. Mutassuk meg, hogy ha K tetszőleges test, akkor $K[x]$ normális, míg $K[x,y]/(x^2 - y^3)$ nem.

7. Igazoljuk, hogy minden UFD normális.

8. Legyenek $A \subseteq B$ integritási tartományok, B egész A felett. Ekkor A pontosan akkor test, ha B test.