Algebrai kombinatorika / 2009 ősz / Küronya Alex

3. Gyakorlat

1. Legyen $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ egy partíció, m pozitív egész. Az ún. m-változós általánosított elemi illetve teljes szimmetrikus polinomokat az alábbi módon definiáljuk.

$$\begin{aligned} e_\lambda(X) &\stackrel{\text{def}}{=} e_{\lambda_1}(X) \cdot \cdots \cdot e_{\lambda_k}(X) \ , \\ h_\lambda(X) &\stackrel{\text{def}}{=} h_{\lambda_1}(X) \cdot \cdots \cdot h_{\lambda_k}(X) \ . \end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy e_λ és h_λ valóban szimmetrikus polinomok. Mutassuk meg, hogy az

$$\{e_\lambda(X) \mid \lambda \text{ egy természetes szám partíciója}\}$$

halmaz az $R[X_1, \ldots, X_m]$-beli szimmetrikus polinomok gyűrűjének egy szabad generátorrendszere R felett.

2. Igazoljuk az alábbi azonosságokat az $R[X_1, \ldots, X_m, T]$ $m+1$-változós polinomgyűrűben.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - X_i T} &= \sum_{n \geq 0} h_n(X) T^n \\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k(X) h_{n-k}(X) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Az iménti azonosság segítségével mutassuk meg, hogy

$$R[h_1(X), \ldots, h_n(X)] = R[e_1(X), \ldots, e_n(X)] \ .$$

Bizonyítsuk be, hogy a teljes szimmetrikus polinomok generálják az R feletti szimmetrikus polinomok gyűrűjét.

3. Legyen $p_n(X_1, \ldots, X_m) \stackrel{\text{def}}{=} X_1^n + \cdots + X_m^n$ az n-edik hatványösszeg-polinom, λ mint fent egy partíció. Lássuk be az alábbi összefüggéseket.

$$\begin{aligned} ne_n(X) - p_1(X)e_{n-1}(X) + p_2(X)e_{n-2}(X) - \cdots + (-1)^n p_n(X) &= 0 \\ nh_n(X) - p_1(X)h_{n-1}(X) - p_2(X)h_{n-2}(X) - \cdots - p_n(X) &= 0 \end{aligned}$$

Definíció. Legyen $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ a G véges csoport egy reprezentációja. Egy $W \subseteq V$ altér *invariáns*, ha minden $g \in G$ esetén

$$\rho(g)(W) \subseteq W \ .$$

A ρ reprezentációt *irreducibilis*nak mondjuk, ha nincsen nemtriviális (értsd: 0-tól és V-től különböző) invariáns altere.

4. Mutassuk meg, hogy ha G abel-csoport, akkor minden irreducibilis reprezentációja egydimenziós.

5. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket a háromváltozós elemi és teljes szimmetrikus polinomok között.

$$e_2(X) = \begin{vmatrix} h_1(X) & h_2(X) \\ h_0(X) & h_1(X) \end{vmatrix} \ , \ e_3(X) = \begin{vmatrix} h_1(X) & h_2(X) & h_3(X) \\ h_0(X) & h_1(X) & h_2(X) \\ 0 & h_0(X) & h_1(X) \end{vmatrix}$$

Definíció. Egy T tabló *tartalma* az a $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ természetes számokból álló sorozat, amelyre T-ben μ_1 darab 1-es, μ_2 darab 2-es van, és így tovább. Ha λ, μ két partíció, akkor a $K_{\lambda,\mu}$ ún. *Kostka-szám* azt mondja meg, hogy hány T Young-tabló létezik λ alakkal és μ tartalommal.

6. Legyenek λ, μ partíciók. Igazoljuk az alábbiakat.
(1) Ha $|\lambda| \neq |\mu|$, akkor $K_{\lambda,\mu} = 0$.
(2) $K_{\lambda,\lambda} = 1$.
(3) Ha $\mu \not\leq \lambda$ a lexikografikus rendezésre nézve[1], akkor $K_{\lambda,\mu} = 0$.
(4) $K_{\lambda,\mu} \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha minden $i \geq 1$ esetén

$$\mu_1 + \dots + \mu_i \ \leq \ \lambda_1 + \dots + \lambda_i \ .$$

(5) Határozzuk meg a $K_{\lambda,\mu}$ számot ha $\lambda = (3,2)$ és $\mu = (1,1,1,1,1)$.

Házi feladatok

7. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságot a háromváltozós szimmetrikus polinomok körében.

$$s_{(2,1)(X)} \ = \begin{vmatrix} h_2(X) & h_3(X) \\ h_1(X) & h_1(X) \end{vmatrix}$$

8. Az alábbi tablót egy egy dobozzal kisebb tablóból kaptuk sorbaillesztéssel. Határozzuk meg az eredeti tablót, és az abba beszúrandó elemet (a bekarikázott elem van az újonnan hozzáadott dobozban).

1	2	2	3	5
2	3	6	6	
4	4	7	7	
5	6			

9. ** Tetszőleges $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$ partícióra igazoljuk az ún. *Jacobi–Trudi-formulát*:

$$s_\lambda(X_1, \dots, X_m) \ = \ \det(h_{\lambda_i + j - i}(X))_{1 \leq i,j \leq k} \ .$$

10. ** Bizonyítsuk be a Jacobi–Trudi-formula alábbi alakját (ez volt a Schur-polinomok eredeti definíciója).

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \ = \ \frac{\det(X_j^{\lambda_i + m - j})_{1 \leq i,j \leq m}}{\det(X_j^{m-i})_{1 \leq i,j \leq m}} \ .$$

[1] A lexikografikus rendezésben $\mu \leq \lambda$ pontosan akkor, ha az első olyan indexre, amelyre $\mu_i \neq \lambda_i$, $\mu_i < \lambda_i$ teljesül.