Algebrai kombinatorika / 2009 ősz / Küronya Alex

5. Gyakorlat

1. Határozzuk meg az $L(w,k)$ számokat a $k = 1,2,3$ esetekben a
$$w = 1432254323145213$$
szóra.

2. Legyen a w szó Knuth-ekvivalens a T tabló szavával. Mutassuk meg, hogy T sorainak a száma megegyezik a w-ben található leghosszabb szigorúan fogyó sorozat hosszával. Általánosabban, igazoljuk, hogy a T első k oszlopában található dobozok száma megegyezik azzal a legnagyobb számmal, amely előállítható, mint k darab diszjunkt szigoúan fogyó w-beli szó hosszainak az összege.

3. (Erdős–Szekeres) Mutassuk meg, hogy minden természetes számokból álló legalább n^2+1 hosszú sorozatban van vagy egy legalább n hosszú monoton növő, vagy egy n hosszú szigorúan fogyó részsorozat. Adjunk példát arra, hogy az állítás éles.

4. Keressünk olyan 6 hosszú w szót, amelyre $L(w,1) = 4$, $L(w,2) = 6$, de nincs w-ben diszjunkt négy és kettő hosszú növő sorozat.

5. Adjuk meg az alábbi w szavak $P(w)$ tablóját és $Q(w)$ beillesztési tablóját.
   (1) 1234234343432
   (2) 123331243221123
   (3) 86427531

Minden esetben fejtsük vissza a w szót a $(P(w), Q(w))$ tablópárból.

Házi feladatok

6. (Cauchy–Littlewood) Igazoljuk a Schur-polinomokra vonatkozó alábbi azonosságot a Robinson–Schensted–Knuth megfeleltetés segítségével:
$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)s_\lambda(y_1,\ldots,y_m)\ .$$

Definíció. Egy $w = x_1\ldots x_r$ szót *fordított rácsszónak* nevezünk, ha az $x_r, x_{r-1},\ldots,x_1$ sorozat minden kezdőszelete legalalább annyi 1-est tartalmaz mint 2-est, legalább annyi 2-est, mint hármast, és így tovább.

7. Döntsük le, hogy az alábbi szavak közül melyik fordított rácsszó.
   (1) 2132121
   (2) 1232121
   (3) 13212311321

8. Legyenek $w \equiv w'$ Knuth-ekvivalens szavak. Bizonyítsuk be, hogy w' pontosan akkor fordított rácsszó, ha w az.

9. Igazoljuk, hogy a $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ Littlewood–Richardson-szám megegyezik azoknak a fordított rácsszavaknak a számával, amelyek ν_1 darab 1-est, ν_2 darab 2-est, stb. tartalmaznak, és előállnak $w = tu$ alakban, ahol t egy λ-alakú, u pedig egy ν-alakú tabló szava.

Definíció. Legyen $\mathbb{C}[S_n]$ az S_n szimmetrikus csoporthoz tartozó ún. *csoportalgebra*. Ez a

$$\sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma \sigma$$

alakú komplex együtthatós formális lineáris kombinációk halmaz, ahol a szorzást a S_n-beli elemek szorzása és a disztributivitás adják.

10. Ellenőrizzük, hogy S_n egy komplex reprezentációja ugyanaz, mint egy bal $\mathbb{C}[S_n]$-modulus.

11. Mutassuk meg, hogy S_n hat az n-dobozú Young-diagramok számozásain az alábbi módon: egy T számozás esetén $\sigma \cdot T$ az a számozás, ahol az i elem helyére $\sigma(i)$-t írjuk.

12. Egy n-dobozú Young-diagram T számozásához hozzárendelhetjük T ún. *$R(T)$ sor- , illetve $C(T)$ oszlopcsoportját*, ahol

$$\begin{aligned} R(T) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma \cdot T \text{ minden sora } T \text{ ugyanazon sorának egy permutációja}\} \ , \\ C(T) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma \cdot T \text{ minden oszlopa } T \text{ ugyanazon oszlopának egy permutációja}\} \ . \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy $R(T)$, $C(T)$ valóban részcsoportjai S_n-nek, továbbá

$$R(\sigma \cdot T) \, = \, \sigma R(T) \sigma^{-1} \ , \ C(\sigma \cdot T) \, = \, \sigma C(T) \sigma^{-1} \ .$$

13. Legyen T egy n-dobozú Young-diagram egy számozása. Tekintsük az alábbi $\mathbb{C}[S_n]$-beli elemeket:

$$a_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma \ , \ b_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau \in C(T)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau \ , \ c_T \stackrel{\text{def}}{=} b_T a_T \ .$$

A c_T elem neve a T-hez tartozó *Young-szimmetrizátor*. Lássuk be az alábbi műveleti azonosságokat: ha $\sigma \in R(T)$ és $\tau \in C(T)$, akkor

(1) $\sigma a_T = a_T \sigma = a_T$,
(2) $\operatorname{sgn}(\tau)\tau b_T = b_T \operatorname{sgn}(\tau)\tau = b_T$,
(3) $a_T^2 = |R(T)| a_T$, $b_T^2 = |C(T)| b_T$,
(4) $\sigma c_T \operatorname{sgn}(\tau)\tau = c_T$.

14. ** Az előző feladatok jelöléseivel ha T és U különböző alakú diagramok számozásai, akkor $c_T \mathbb{C}[S_n] c_U = 0$.

15. ** Legyen $V_T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[S_n] c_T \leq \mathbb{C}[S_n]$ a c_T elem által generált részmodulus. Igazoljuk, hogy V_T izomorfia erejéig csak T alakjától függ, és V_T az S_n csoport egy irreducibilis reprezentációja.