GALOIS-ELMÉLET / 2006 TAVASZ

1. HÁZI FELADAT

1. Legyen (X,τ) egy topologikus tér. Mutassuk meg, hogy az X-beli zárt halmazokra teljesülnek az alábbiak:
(1) $\emptyset$ és X zárt halmazok.
(2) Véges sok zárt halmaz uniója szintén zárt.
(3) Zárt halmazok tetszőleges metszete zárt.
Emellett igazoljuk, hogy egy X-beli halmazrendszer pontosan akkor lesz valamely topológiára nézve a zárt halmazok összessége, ha a fenti három kitételnek megfelel.

2. (Részhalmazok lezárásának és belsejének tulajdonságai) Legyen X egy tetszőleges topologikus tér, $A,B\subseteq X$ részhalmazok.
(i) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{int}(A)=\{\,x\in X\,|\,\exists U\subseteq X$ nyílt halmaz, amelyre $x\in U\subseteq A\,\}$.
(ii) Bizonyítsuk be, hogy $\overline{A}=\{\,x\in X\,|\,\forall U$ nyílt halmazra X-ben $U\cap A\neq\emptyset\,\}$.
(iii) Igazoljuk, hogy A pontosan akkor nyílt, ha $A=\mathrm{int}(A)$, és pontosan akkor zárt, ha $A=\overline{A}$. Mutassuk meg továbbá, hogy $X-\mathrm{int}(A)=\overline{X-A}$, és $X-\overline{A}=\mathrm{int}(X-A)$.
(iv) Igazoljuk az alábbi azonosságokat: $\mathrm{int}(A)\cap\mathrm{int}(B)=\mathrm{int}(A\cap B)$, $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$. Lássuk be, hogy

$$\bigcap_\alpha \mathrm{int}(A_\alpha)\supseteq \mathrm{int}\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)=\mathrm{int}\left(\bigcap_\alpha \mathrm{int}(A_\alpha)\right),\ \bigcup_\alpha \mathrm{int}(A_\alpha)\subseteq \mathrm{int}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right).$$

(v) Mutassuk meg, hogy abból, hogy $A\subseteq B$ következik, hogy $\mathrm{int}(A)\subseteq\mathrm{int}(B)$, and $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

3. * Legyen $f:(X,d)\to(Y,d')$ egy metrikus terek közti függvény. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos a hagyományos ϵ-δ definíció szerint, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt.

4. Tekintsünk egy L/K véges normális testbővítést. Ekkor

$$|\mathrm{Aut}_K(L)|=[L:K]_s\leq[L:K]\ .$$

Speciálisan $|\mathrm{Aut}_K(L)|=[L:K]$ pontosan akkor áll, ha L/K szeparábilis.

5. Legyen L/K egy algebrai testbővítés. Igazoljuk, hogy L/K pontosan akkor Galois, ha

$$K=L^{\mathrm{Aut}_K(L)}\ .$$

6. Adjunk meg egy olyan L testet és $G\subseteq\mathrm{Aut}(L)$ részcsoportot, amelyre L/L^G nem Galois.

7. * Legyen L/K egy véges Galois-bővítés, $H\subseteq\mathrm{Gal}(L/K)$ egy részcsoport.
(i) Igazoljuk, hogy létezik olyan $\alpha\in L$ elem, amelyre igaz, hogy minden $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$ esetén $\sigma(\alpha)=\alpha$ pontosan akkor, ha $\sigma\in H$.
(ii) Mutassuk meg, hogy $L^H=K(\alpha)$.

8. * Legyen L algebrailag zárt test, $\sigma\in\mathrm{Aut}(L)$. Jelölje $K\overset{\mathrm{def}}{=}L^\sigma$ a σ testautomorfizmus fixtestét. Lássuk be, hogy K minden véges bővítése ciklikus Galois-bővítés.

9. ** Igazoljuk, hogy ha $p_1,\dots,p_k$ páronként különböző prímszámok, akkor $L=\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_k})$ Galois-bővítés, amelynek a Galois-csoportja

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k\ .$$